I. Un Sillabario dei Piani di Traslazione.

(1.1) Definizione.

Un piano finito di traslazione π è uno spazio vettoriale V di dimensione $2 \cdot d$ sul campo K che è isomorfo a $GF(q=p^r)$, con p numero primo e r numero intero, con una collezione S di sottospazi di dimensione d che hanno a due a due intersezione identica e che coprono V. K si chiama <u>il nucleo</u>, S si chiama <u>la fibrazione</u> e gli elementi di S si chiamano <u>le componenti</u> di π(o di S).

(1.2) Definizione–coordinate.

Sia S una fibrazione per π (1.1). Si scelgano tre qualunque elementi distinti di S, W_1, W_2, W_3. Allora si può scegliere una base per π (per V) tale che

$$W_1 \text{ è } \{(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{d},y_1,y_2,\ldots y_d) \mid y_i \text{ in } K,\ i = 1,2,\ldots,d\},$$

$$W_2 \text{ è } \{(x_1,x_2,\ldots x_d,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{d}) \mid x_i \text{ in } K,\ i = 1,2,\ldots,d\},$$

$$W_3 \text{ è } \{(x_1,x_2,\ldots x_d,x_1,x_2,\ldots x_d) \mid x_i \text{ in } K,\ i = 1,2,\ldots,d\}.$$

Se W_4 è nella $S - \{W_1,W_2,W_3,\}$, allora

W_4 è $\{(x_1,x_2,\ldots x_d(x_1,x_2,\ldots x_d)M \mid x_i$ in K, $i = 1,2,\ldots,d$, ove M è una matrice di dimensione d per d, non-singolare$\}$.

Useremo la seguente notazione: x per $(x_1, x_2, \dots x_d)$, y per $(y_1, y_2, \dots y_d)$, $(x = 0)$ per W_1, $(y = 0)$ per W_2, $(y = x)$ per W_3 e $(y = xM)$ per W_4. Inoltre sia la fibrazione $S = \{x = 0,\ y = 0,\ y = xN_i,\quad i = 1,2,\dots,q^d-1$ dove N_i sono matrici d per d non-singolari$\}$. Allora, $N_i - N_j$ per $i \neq j$, $i,j = 1,2,\dots,q^d-1$ è non-singolare.

Dimostrazione:

Scegliamo una base $\{e_1, e_2, \dots e_d\}$ per W_2 e una base $\{f_1, f_2, \dots f_d\}$ per W_1. Estendiamo queste due basi alla base per π che è eguale a $\{e_1, e_2, \dots e_d, f_1, f_2, \dots f_d\}$. Quindi, un vettore $(x_1, x_2, \dots x_d\ y_1, y_2, \dots y_d)$ è in W_1 se e soltanto se $x_1 = x_2 = \cdots x_d = 0$ e questo vettore è in W_2 se e soltanto se $y_1 = y_2 = \cdots y_d = 0$. Noi asseriamo che se $(x_1, x_2, \dots x_d, y_1, y_2, \dots y_d)$ è in W_3, allora $(y_1, y_2, \dots y_d)$ è una funzione lineare di $(x_1, x_2, \dots x_d)$.

Si osservi che se $(x_1, x_2, \dots x_d, y_1, y_2, \dots y_d)$ e $(x_1, x_2, \dots, x_d, z_1, z_2, \dots z_d)$ sono in W_3, allora è anche $(0, 0, \dots, 0, z_1 - y_2, \dots z_d - y_d)$ in W_3. D'altra parte $W_1 \cap W_3 = 0$, quindi $y_i = z_i$ per $i = 1, 2, \dots d$, e quindi $(y_1, y_2, \dots y_d) = f((x_1, x_2, \dots x_d))$ per una qualche funzione f. Ancora, in modo simile, si prova che f è una funzione lineare su K. Sia $f((x_1, x_2, \dots x_d)) = (x_1, x_2, \dots x_d)M$ per una opportuna matrice M. Si cambi base mediante la matrice

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}$$

(M non-singolare). Allora, W_3 è $(y = x)$. Per di più, sia W_4 in $S - \{W_1, W_2, W_3\}$, allora W_4 è $y = xN$ per una qualche matrice N. Nota: Siano $(y = xN)$ e $(y = xR)$ in S. Allora, $N - R$ è non-singolare perchè, se $z(N-R) = \mathcal{O}$ allora $(z, zR) = (z, zN)$ cosicchè $z = 0$ o $N = R$.

Vice versa: Se troviamo una collezione $\mathcal{M}$ di matrici (d per d) sul campo K che è isomorfo a $GF(q)$ con:

(1) $|\mathcal{M}| = q^d$,

(2) $\mathcal{O}$, I in M, e

(3) Se M, N in $\mathcal{M}$, allora $M-N = \mathcal{O}$ o non-singolare,

allora possiamo costruire un piano di traslazione mediante la fibrazione $S = \{\{(x_1, x_2, \ldots x_d, (x_1, x_2, \ldots x_d)T) \mid T \text{ in } \mathcal{M},\ x_i \text{ in } K,\ i = 1, 2, \ldots d\} \cup \{(0, 0, \ldots, 0, y_1, y_2, \ldots y_d)\ y_i \text{ in } K,\ i = 1, 2, \ldots d\}\}$. $\mathcal{M}$ si chiama una fibrazione di matrici.

(1.3) Definizione: *Il Gruppo di Collineazioni* $\mathcal{G}$.

Con la notazione di (1.1), il gruppo delle traslazioni $\mathcal{T} = \langle (x,y) \longrightarrow (x,y) + (c,d) \mid (c,d) \in V \rangle$ è un gruppo di collineazioni di π. Nota: Possiamo riguardare π come un piano affine con punti della forma (x,y) e le cui rette sono le componenti $\mathcal{L}$ di π e $\{\mathcal{L} + (c,d) \mid (c,d) \in V\}$. $\mathcal{T}$ è transitivo sui punti. Dunque, qualunque elemento di $\mathcal{G}$ è in $\Gamma L(2d, q) \cdot \mathcal{T}$ (vedi André [1]).

$\mathcal{G} \cap \Gamma L(2d, q)$ si dice il complemento di traslazione e $\mathcal{G} \cap GL(2d, q)$ si dice il complemento lineare di traslazione.

(1.4) L'ordine e ℓ_∞.

Con la notazione di (1.1), l'ordine di π è q^d. Possiamo estendere il piano affine a un piano proiettivo. Useremo la notazione ℓ_∞ per la retta all'infinito. Allora, $\mathcal{G}|\ell_\infty$ è isomorfo a $\mathcal{G}/\tilde{\mathcal{H}}$ dove $\tilde{\mathcal{H}}$ è il gruppo $\langle (x,y) \longrightarrow (x,y)\begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in K-\{0\}\rangle$. $\tilde{\mathcal{H}}$ si chiama il gruppo delle omologie del nucleo.

(1.5) Gruppi di Ordine p^s, dove $q = p^r$.

Sia H un gruppo di collineazioni di ordine p^s nel complemento lineare di traslazione. Allora, H fissa una componente $\mathcal{L}$ e fissa un punto $\neq 0$ del sottospazio di $\mathcal{L}$.

Dimostrazione:

Noi assumiamo che $H \leq GL(2d,q)$. Allora, H è un gruppo lineare su uno spazio vettoriale e deve quindi fissare un qualche vettore, il quale è contenuto in una qualche componente che deve essere fissata.

Ora, assumiamo che H sia un gruppo di collineazioni di ordine $q^d \leq GL(2d,q)$. Sia $\mathcal{L} \equiv (x = 0)$ la componente fissata da H e supponiamo che H agisca transitivamente su $\ell_\infty-\{(\infty)\}$ (usiamo (∞) per indicare $\mathcal{L} \cap \ell_\infty$ quando pensiamo a ℓ_∞ come una retta del piano proiettivo). Nelle nostre condizioni,

$$H = \left\{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \;\middle|\; A,B,C \text{ non-singolari o } (A = C = I \text{ e } B = 0)\right\}.$$

Allora, $(y = \mathcal{O})H = \{y = xA^{-1}B\}$ e $\{(x = \mathcal{O}), (y = \mathcal{O})H\}$ è una fibrazione.

Viceversa:

(1.6) Sia H un gruppo di ordine q^d costituito da matrici di ordine d per d su $GF(q)$, ossia

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} A_i, & B_i \\ \mathcal{O}, & C_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & I \end{bmatrix} \;\middle|\; (A_0 = C_0 = I, B_0 = \mathcal{O}) \text{ e } i = 0, 1, \dots, q^d - 1 \right\}.$$

Se A_i, B_i, C_i, $A_k^{-1}B_k - A_j^{-1}B_j$ sono non-singolari per $i \neq 0$, $k \neq j$ allora $\{(x = \mathcal{O}), \{(y = \mathcal{O})H = (y = xA_i^{-1}B_i)\}\}$ è una fibrazione.