

LEZIONI SUI PIANI DI TRASLAZIONE

di

Norman L. Johnson

INTRODUZIONE.

Le Lèzioni qui presentate sono quelle tenute durante la primavera del 1985 a Lecce. Alcune di queste lezioni sono state tenute anche a Bari, Bologna, Firenze, Napoli, Palermo, Perugia e Roma.

Vorrei ringraziare il C.N.R. italiano per il supporto finanziario. Inoltre, vorrei ringraziare il Professor Mauro Biliotti per l'organizzazione della mia visita a Lecce.

Infine, vorrei ringraziare le seguenti persone per l'aiuto cortese: a Bari - la Professoressa Luca Maria Abatangelo, la Professoressa Bambina Larato e il Professor Vito Abatangelo, a Bologna - il Professor Giampaolo Menichetti, a Firenze - il Professor Adriano Barlotti e il Professor Antonio Rosati, a Lecce - la Professoressa Gabriella Murciano, la Professoressa Rosanaⁿ Marinosci e il Professor Giuseppe Micelli, a Napoli - il Professor Guglielmo Lunardon, a Palermo - il Professor Claudio Bartolone e il Professor Federico Bartolozzi, a Perugia - la Professoressa Rita Vincenti e il Professor Alessandro Basile, a

Roma - la Professoressa Maria Luisa de Resmini e il Professor Giuseppe Tallini.

In questo quaderno, si studiano i piani finiti di traslazione π . Una parte principale di queste note è lo studio dei piani di traslazione di ordine n che hanno gruppi di ordine n (vedi sezioni II, VI, e XII). Anche, considereremo la compatibilità tra elazioni e collineazioni di Baer (sezioni IV e VII). Inoltre, ci sono lezioni su piani di ordine p^t che ammettono $SL(2, p^r \geq p^{t/2})$ e su piani di traslazione e parallelismi regolari. Invece di dare qui una descrizione completa delle materie presentate, rimando per esse alle introduzioni delle singole sezioni.

Alcuni teoremi qui presentati sono nuovi. Cioè, non sono già pubblicati. Questo include la struttura generale di sezione II, sezione VI e (10.3). Inoltre Jha e io abbiamo provato alcuni altri risultati durante le visite a Lecce e Palermo. Per esempio una parte di sezione V, sezione XI, sezione XIII, e (7.8) sono stati finiti quando Jha (e io) siamo stati in Italia durante la primavera del 1985.

I. Un Sillabario dei Piani di Traslazione.

(1.1) Definizione.

Un piano finito di traslazione π è uno spazio vettoriale V di dimensione $2 \cdot d$ sul campo K che è isomorfo a $GF(q=p^r)$, con p numero primo e r numero intero, con una collezione S di sottospazi di dimensione d che hanno a due a due intersezione identica e che coprono V . K si chiama il nucleo, S si chiama la fibrazione e gli elementi di S si chiamano le componenti di π (o di S).

(1.2) Definizione-coordinate.

Sia S una fibrazione per π (1.1). Si scelgano tre qualunque elementi distinti di S , W_1, W_2, W_3 . Allora si può scegliere una base per π (per V) tale che

$$W_1 \text{ è } \{(0, 0, \dots, 0, y_1, y_2, \dots, y_d) \mid y_i \text{ in } K, i = 1, 2, \dots, d\},$$

$$W_2 \text{ è } \{(x_1, x_2, \dots, x_d, 0, 0, \dots, 0) \mid x_i \text{ in } K, i = 1, 2, \dots, d\},$$

$$W_3 \text{ è } \{(x_1, x_2, \dots, x_d, x_1, x_2, \dots, x_d) \mid x_i \text{ in } K, i = 1, 2, \dots, d\}.$$

Se W_4 è nella $S - \{W_1, W_2, W_3\}$, allora

$$W_4 \text{ è } \{(x_1, x_2, \dots, x_d)(x_1, x_2, \dots, x_d)M \mid x_i \text{ in } K, i = 1, 2, \dots, d, \text{ ove } M \text{ è una matrice di dimensione } d \text{ per } d, \text{ non-singolare}\}.$$

Useremo la seguente notazione: x per (x_1, x_2, \dots, x_d) , y per (y_1, y_2, \dots, y_d) , $(x = 0)$ per W_1 , $(y = 0)$ per W_2 , $(y = x)$ per W_3 e $(y = xM)$ per W_4 . Inoltre sia la fibrazione $S = \{x = 0, y = 0, y = xN_i, i = 1, 2, \dots, q^{d-1} \text{ dove } N_i \text{ sono matrici } d \text{ per } d \text{ non-singolari}\}$. Allora, $N_i - N_j$ per $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, q^{d-1}$ è non-singolare.

Dimostrazione:

Scegliamo una base $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ per W_2 e una base $\{f_1, f_2, \dots, f_d\}$ per W_1 . Estendiamo queste due basi alla base per π che è eguale a $\{e_1, e_2, \dots, e_d, f_1, f_2, \dots, f_d\}$. Quindi, un vettore $(x_1, x_2, \dots, x_d, y_1, y_2, \dots, y_d)$ è in W_1 se e soltanto se $x_1 = x_2 = \dots = x_d = 0$ e questo vettore è in W_2 se e soltanto se $y_1 = y_2 = \dots = y_d = 0$. Noi asseriamo che se $(x_1, x_2, \dots, x_d, y_1, y_2, \dots, y_d)$ è in W_3 , allora (y_1, y_2, \dots, y_d) è una funzione lineare di (x_1, x_2, \dots, x_d) .

Si osservi che se $(x_1, x_2, \dots, x_d, y_1, y_2, \dots, y_d)$ e $(x_1, x_2, \dots, x_d, z_1, z_2, \dots, z_d)$ sono in W_3 , allora è anche $(0, 0, \dots, 0, z_1 - y_1, \dots, z_d - y_d)$ in W_3 . D'altra parte $W_1 \cap W_3 = 0$, quindi $y_i = z_i$ per $i = 1, 2, \dots, d$, e quindi $(y_1, y_2, \dots, y_d) = f((x_1, x_2, \dots, x_d))$ per una qualche funzione f . Ancora, in modo simile, si prova che f è una funzione lineare su K . Sia $f((x_1, x_2, \dots, x_d)) = (x_1, x_2, \dots, x_d)M$ per una opportuna matrice M . Si cambi base mediante la matrice

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}$$

(M non-singolare). Allora, W_3 è $(y = x)$. Per di più, sia W_4 in $S - \{W_1, W_2, W_3\}$, allora W_4 è $y = xN$ per una qualche matrice N . Nota: Siano $(y = xN)$ e $(y = xR)$ in S . Allora, $N - R$ è non-singolare perchè, se $z(N-R) = 0$ allora $(z, zR) = (z, zN)$ cosicchè $z = 0$ o $N = R$.

Viceversa: Se troviamo una collezione \mathcal{M} di matrici (d per d) sul campo K che è isomorfo a $GF(q)$ con:

$$(1) |\mathcal{M}| = q^d,$$

$$(2) 0, I \text{ in } \mathcal{M}, \text{ e}$$

$$(3) \text{ Se } M, N \text{ in } \mathcal{M}, \text{ allora } M-N = 0 \text{ o non-singolare,}$$

allora possiamo costruire un piano di traslazione mediante la fibrazione $S = \{(x_1, x_2, \dots, x_d, (x_1, x_2, \dots, x_d)T) \mid T \text{ in } \mathcal{M}, x_i \text{ in } K, i = 1, 2, \dots, d\} \cup \{(0, 0, \dots, 0, y_1, y_2, \dots, y_d) \mid y_i \text{ in } K, i = 1, 2, \dots, d\}$. \mathcal{M} si chiama una fibrazione di matrici.

(1.3) Definizione: Il Gruppo di Collineazioni \mathcal{G} .

Con la notazione di (1.1), il gruppo delle traslazioni $\mathcal{T} = \{(x, y) \longrightarrow (x, y) + (c, d) \mid (c, d) \in V\}$ è un gruppo di collineazioni di π . Nota: Possiamo riguardare π come un piano affine con punti della forma (x, y) e le cui rette sono le componenti \mathcal{L} di π e $\{\mathcal{L} + (c, d) \mid (c, d) \in V\}$. \mathcal{T} è transitivo sui punti. Dunque, qualunque elemento di \mathcal{G} è in $\Gamma L(2d, q) \cdot \mathcal{T}$ (vedi André [1]).

$\mathcal{G} \cap \Gamma L(2d, q)$ si dice il complemento di traslazione e $\mathcal{G} \cap GL(2d, q)$ si dice il complemento lineare di traslazione.

(1.4) L'ordine e \mathcal{L}_∞ .

Con la notazione di (1.1), l'ordine di π è q^d . Possiamo estendere il piano affine a un piano proiettivo. Useremo la notazione \mathcal{L}_∞ per la retta all'infinito. Allora, $\mathcal{G}|_{\mathcal{L}_\infty}$ è isomorfo a $\mathcal{G}/\tilde{\mathcal{H}}$ dove $\tilde{\mathcal{H}}$ è il gruppo $\langle (x,y) \rightarrow (x,y) \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in K - \{0\} \rangle$. $\tilde{\mathcal{H}}$ si chiama il gruppo delle omologie del nucleo.

(1.5) Gruppi di Ordine p^s , dove $q = p^r$.

Sia H un gruppo di collineazioni di ordine p^s nel complemento lineare di traslazione. Allora, H fissa una componente \mathcal{L} e fissa un punto $\neq 0$ del sottospazio di \mathcal{L} .

Dimostrazione:

Noi assumiamo che $H \leq GL(2d, q)$. Allora, H è un gruppo lineare su uno spazio vettoriale e deve quindi fissare un qualche vettore, il quale è contenuto in una qualche componente che deve essere fissata.

Ora, assumiamo che H sia un gruppo di collineazioni di ordine $q^d \leq GL(2d, q)$. Sia $\mathcal{L} \equiv (x = 0)$ la componente fissata da H e supponiamo che H agisca transitivamente su $\mathcal{L}_\infty - \{(\infty)\}$ (usiamo (∞) per indicare $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}_\infty$ quando pensiamo a \mathcal{L}_∞ come una retta del piano proiettivo). Nelle nostre condizioni,

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \mid A, B, C \text{ non-singolari o } (A = C = I \text{ e } B = 0) \right\}.$$

Allora, $(y = 0)H = \{y = xA^{-1}B\}$ e $\{(x = 0), (y = 0)H\}$ è una fibrazione.

Viceversa:

(1.6) Sia H un gruppo di ordine q^d costituito da matrici di ordine d per d su $GF(q)$, ossia

$$H = \left\{ \left[\begin{array}{cc} A_i & B_i \\ 0 & C_i \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \mid (A_0 = C_0 = I, B_0 = 0) \text{ e } i = 0, 1, \dots, q^d - 1 \right\}.$$

Se $A_i, B_i, C_i, A_k^{-1}B_k - A_j^{-1}B_j$ sono non-singolari per $i \neq 0, k \neq j$ allora $\{(x = 0), \{(y = 0)H = (y = xA_i^{-1}B_i)\}\}$ è una fibrazione.

II. Sulla struttura dei piani di traslazione di ordine q^2 che hanno un gruppo di collineazioni di ordine q^2 .

Considereremo piani di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che hanno un gruppo di collineazioni di ordine q^2 nel complemento lineare di traslazione e daremo una classificazione che fa uso di certe funzioni su $GF(q)$.

Lo studio delle relazioni tra il piano e le funzioni è stato iniziato da Kantor [51] con le funzioni "likeable." Anche Fink, Johnson, Wilke [11] e Johnson, Wilke [50] hanno studiato funzioni simili alle funzioni likeable e le hanno chiamate "desirable" per q dispari e "elusive" per q pari. Ad esempio, i piani di Lüneburg-Tits sono elusive.

Altri autori hanno lavorato su queste funzioni—likeable e elusive (Ad esempio, Biliotti, Menichetti [4], Cohen [7], e Ganley [17]). Ganley ha provato che le funzioni "likeable" nel caso q pari danno soltanto i piani di Betten. Inoltre, Biliotti e Menichetti hanno provato che le funzioni "elusive" danno soltanto i piani di Betten, i piani di Lüneburg-Tits e un nuovo piano di ordine 64.

Inoltre, Bartolone [3] ha cominciato questi studi nel 1981, là dove ha studiato i piani di traslazione di ordine q^2 che hanno un gruppo di ordine $q^2(q-1)$ (si veda anche sezione IX). Jha, Johnson [22] e Jha, Johnson, Wilke [38] hanno approfondito gli studi di Bartolone.



Dunque, sia π un piano di traslazione di ordine q^2 , $q = p^r$, con nucleo $F \cong GF(q)$. Sia \mathcal{G} un gruppo contenuto nel complemento lineare di traslazione, di ordine q^2 . Per (1.5), \mathcal{G} fissa una componente \mathcal{L} che possiamo supporre sia $(x = 0)$.

(2.1) Teorema. Sia q dispari. Allora \mathcal{G} contiene un sottogruppo di elazioni E di ordine $\geq q$ e \mathcal{G} non contiene sottogruppi di Baer. Inoltre, \mathcal{G} ha un'orbita regolare su $\mathcal{L}_\infty - \{(\infty)\}$.

Dimostrazione:

$\mathcal{G} \subseteq GL(4, q)$ e $|\mathcal{G}| = q^2$. Sia $E \triangleleft \mathcal{G}$ il sottogruppo delle elazioni di asse $(x = 0)$.

Allora, $\mathcal{G}|_{\mathcal{L}} \cong \mathcal{G}|_{\mathcal{L}}$ e $\mathcal{G}|_{\mathcal{L}} \leq GL(2, q)$. Poichè $|GL(2, q)| = q(q^2 - 1)(q - 1)$, allora $|E| \geq q$.

Se esiste $g \in \mathcal{G}$ che fissi $P \in \mathcal{L}_\infty - \{(\infty)\}$, allora g deve fissare almeno q punti affini di OP e inoltre, in modo simile, g deve fissare q punti affini di \mathcal{L} (nota: \mathcal{L} e OP hanno dimensione due). Allora, $\text{Fix}(\langle g \rangle)$ è un sottopiano di Baer. D'altra parte, Foulser [12] ha provato che gruppi di elazioni e gruppi di Baer non sono compatibili (vedi anche sezione IV).

(2.2). In generale, \mathcal{G} non contiene elementi di Baer se e soltanto se \mathcal{G} è transitivo su $\mathcal{L}_\infty - \{(\infty)\}$.

(2.3). Il sottogruppo di elazioni E di asse \mathcal{L} ($= (x = 0)$) ha ordine almeno q .

Sia $q = p^r$, allora $|E| = p^{r+t}$ per un certo t con $0 \leq t \leq r$.

(2.4). Si può scegliere le coordinate in modo tale che una elazione σ in $Z(\mathcal{G})$ (centro) abbia la forma $\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Dimostrazione.

$E \triangleleft \mathcal{G}$ è un sottogruppo abeliano elementare e quindi uno spazio vettoriale su $GF(p)$. Allora, \mathcal{G} , agendo su E , deve fissare un qualche sottospazio $\langle \sigma \rangle$ di dimensione uno di E . Quindi, \mathcal{G} centralizza σ . Allora, σ ha la forma $\begin{bmatrix} I & B \\ 0 & I \end{bmatrix}$ ma possiamo scegliere $(y = 0)\sigma$ in modo tale che sia $(y = x)$. Ne segue che possiamo assumere che B sia I .

Ora, possiamo assumere che $\mathcal{G}|_{(x=0)} \subseteq \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ perchè la restrizione è un p -sottogruppo di $SL(2, q)$.

Sia $\lambda \subseteq K$ tale che $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in (\mathcal{G}|_{x=0})$ per $a \in \lambda$. Quindi, $|\lambda| = p^{r-t}$.

(2.5). Si può scegliere le coordinate in modo tale che \mathcal{G} sia rappresentabile nella forma:

$$\left\{ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \mid a \in \lambda \right\}.$$

Dimostrazione:

Sia $g \in \mathcal{G}$, g fissa ($x = 0$) cosicchè g sarà rappresentato da una matrice della forma $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ dove A, B, C sono matrici 2 per 2. Ma, $\sigma = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$ è nel centro di \mathcal{G} cosicchè $A = C$. Cioè, $\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B+C \\ 0 & C \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A+B \\ 0 & C \end{bmatrix}$.

Ora consideriamo $(y = 0)\mathcal{G}$. Si ha:

$$(x, 0) \longrightarrow \left[x \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$\in \left[y = x \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \right] \equiv \left[y = x \begin{bmatrix} b_1 - ab_3 & b_2 - ab_4 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \right].$$

In sezione VI, considereremo il caso più generale ma per il resto della sezione,

(2.6) facciamo il presupposto che \mathcal{G} abbia un'orbita regolare su $\mathcal{L}_\infty - \{(\infty)\}$.

Rimandando alla forma (2.5), abbiamo $\{[b_3, b_4] \mid g \in \mathcal{G}\} = K \times K$.

$$(2.7) \text{ Sia } b_3 = 0 \text{ in } g = \begin{bmatrix} 1 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Allora } a = 0.$$

Dimostrazione:

Supposto non vero, allora $(x_1, x_2, y_1, y_2)g = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ se e soltanto se $x_1 = 0$, e $b_4 x_2 + y_1 a = 0$. Quindi, g fisserebbe ogni punto di $\{(0, x_2, -a^{-1} b_4 x_2, y_2) \mid x_2, y_2 \in K\}$. Questo è impossibile perché non ci sono elementi di Baer per (2.2) e (2.6).

$$(2.8) \text{ Sia } b_3 = 0. \text{ Allora } b_1 = b_4 \text{ o } \mathcal{G} = E.$$

Dimostrazione:

Se $b_3 = 0$ allora $a = 0$ per (2.7). Consideriamo

$$\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c & \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix} \\ 0 & 1 & \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -c & F \\ 0 & 1 & \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove $\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$. Questo elemento precedente

è

$$h = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} 0 & c(b_1 - b_4) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Cioè, $(y = 0)h \equiv \left[y = x \begin{bmatrix} 0 & c(b_1 - b_4) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]$ cosicchè $c(b_1 - b_4) = 0$. Se $\mathcal{G} \neq \mathcal{E}$ c'è un qualche $c \neq 0$ in λ . In questo caso, $b_1 = b_4$.

Se $E = \mathcal{G}$ allora π è un piano su un semicorpo. Quindi, possiamo assumere $E \neq \mathcal{G}$.

Inoltre,

$$(2.9) \quad E \supseteq \left\{ \left[\begin{array}{c|c} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \mid u \in K \text{ e } m \text{ è una funzione} \right. \\ \left. \text{additiva su } K \right\} = E_0. \text{ Inoltre, } E_0 \subseteq Z(\mathcal{G}).$$

Dimostrazione:

Se $b_3 = 0$ allora $b_1 = b_4$ e $b_2 = m(b_1)$ per una qualche funzione m . Ma E è additivo e quindi anche m è additiva. Si noti che $\{[b_3, b_4]\} = K \times K$ cosicchè, $|\{[0, b_4]\}| = |K| = |E_0|$.

$$(2.10). \text{ Sia } b_4 = 0 \text{ in } g = \begin{bmatrix} 1 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Allora, } a, b_1,$$

b_2 sono rappresentabili mediante le funzioni T, L, R su F dove:

$$a = T(b_3), \quad b_1 = L(b_3), \quad b_2 = R(b_3).$$

Dimostrazione:

$$(y = 0) \xrightarrow{g} \left[y = x \begin{bmatrix} b_1 - b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} \right] \text{ con } b_4 = 0.$$

Sia $k = \begin{bmatrix} 1 & c & d_1 & d_2 \\ 0 & 1 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ allora, $((y = 0)k) =$

$\left[y = x \begin{bmatrix} d_1 - cb_3 & d_2 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} b_1 - ab_3 & b_2 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_1 - cb_3 & d_2 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}$ è non-singolare se $g \neq k$. Pertanto, $g = k$ e $a = T(b_3)$, $b_1 = L(b_3)$ e $b_2 = R(b_3)$ (cioè, $a = c$ cosicché $b_1 = d_1$ e $b_2 = d_2$).

(2.11) Teorema Fondamentale per l'orbita regolare.

Sia π un piano di traslazione di ordine $q^2 = p^{2r}$ che non sia un piano sopra un semicorpo. Il nucleo di π sia $K \cong GF(q)$ e supponiamo che π ammetta un gruppo \mathcal{G} di collineazioni di ordine q^2 contenuto nel complemento lineare di traslazione. Supponiamo infine che \mathcal{G} non abbia elementi di Baer o equivalentemente \mathcal{G} abbia un'orbita regolare sulla retta all'infinito. Allora esistono le funzioni T, L, R, m su K tali che \mathcal{G} può essere rappresentato nella forma seguente: $\mathcal{G} = \{M(b, u) \mid b, u \in K\}$ dove

$$M(b,u) = \begin{bmatrix} 1 & T(b) & u+L(b) & m(u)+uT(b)+R(b) \\ 0 & 1 & b & u \\ 0 & 0 & 1 & T(b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inoltre:

1) m e T sono additive e $m(a) = 0$ per ogni $a \in GF(p)$.

2) $|\{T(b) \mid b \in K\}| = p^{r-t}$ per un certo t tale che $0 \leq t \leq r$.

3) Il gruppo E delle elazioni ha ordine p^{r+t} e è costituito da tutte e sole le matrici $M(b,u)$ tali che $T(b) = 0$.

4) $L(a) + L(b) + T(b)a = L(a+b) + bT(a)$ per ogni $a, b \in K$.

5) $R(a) + R(b) + L(b)T(a) = m(bT(a)) + bT(a)T(a) + R(a+b)$ per ogni $a, b \in K$.

Dimostrazione.

$$M(b,0)M(a,0) = M(a+b,bT(a)) \quad \text{da cui}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & T(a)+T(b) & L(a)+T(b)a+L(b) & R(a)+R(b)+L(b)T(a) \\ 0 & 1 & a+b & bT(a) \\ 0 & 0 & 1 & T(a)+T(b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & T(a+b) & bT(a)+L(a+b), & m(bT(a))+bT(a)T(a+b)+R(a+b) \\ 0 & 1 & a+b & bT(a) \\ 0 & 0 & 1 & T(a+b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per (2.9), e gli (1,2)-elementi delle due matrici, (1) è provato. (2) e (3) sono veri per (2.4) e (2.5). Gli (1,3)-elementi delle due matrici danno (4) e gli (1,4)-elementi danno (5).

Adesso, consideriamo il caso q pari.

(2.12) Con le stesse ipotesi di (2.11).

Se q è pari, allora $L(x) = xT(x) + \varrho(x)$ dove ϱ è una funzione additiva su $K \cong GF(q)$ ossia $\varrho(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \varrho_j x^{2^j}$, se $q = 2^r$.

Dimostrazione.

(1) Lemma (Vaughan [61]). Sia $q = p^r$, $K \cong GF(q)$. Qualunque funzione f additiva su K può essere rappresentata nella forma $f(x) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j x^{p^j}$, dove $a_j \in K$, $j = 0, 1, \dots, r-1$.

(2) Lemma (Biliotti, Menichetti [4](1.1)). Sia g una funzione su $K \cong GF(Q)$ tale che

$$\sum_{i \in I, j \in I} k_{ij} (x^{2^i} y^{2^j} + y^{2^i} x^{2^j}) + g(x+y) + g(x) + g(y) = 0$$

per ogni $x, y \in K$, dove I, J sono sottoinsiemi finiti di N (numeri naturali) e $k_{ij} \in K$.

Allora, $g(x) = \sum_{i \in I, j \in J} k_{ij} x^{2^i + 2^j} + \varrho(x)$ dove ϱ è una

funzione additiva su K .

Ora, in ((2.11)(4)), abbiamo $L(a) + L(b) + T(b)a = L(a+b) + bT(a)$. Sia $T(z) = \sum_{i=0}^{r-1} c_i z^{2^i}$. Allora

$$(3) \quad L(a) + L(b) + \sum_{i=0}^{r-1} c_i b^{2^i} a + \sum_{i=0}^{r-1} c_i a^{2^i} b + L(a+b) = 0.$$

Sia $\sum_{i=0}^{r-1} c_i (ab^{2^i} + ba^{2^i}) = \sum_{i,j} k_{ij} (a^{2^i} b^{2^j} + b^{2^i} a^{2^j})$ dove

$k_{ij} = \begin{cases} c_i & \text{per } j = 0 \\ 0 & \text{per } j \neq 0 \end{cases}$. Possiamo usare il lemma (2) per

ottenere: $L(x) = \sum_{i,j} k_{ij} x^{2^i + 2^j} + \varrho(x)$, dove ϱ è additiva.

Allora, $L(x) = \sum_i c_i x^{2^i + 1} + \varrho(x) = xT(x) + \varrho(x)$.

(2.13) Teorema.

Con le stesse ipotesi di (2.11) e q dispari si ha $|E| = q$ o q^2 .

Dimostrazione.

Se $|E| > q$ esiste un elemento $g \in E - E_0$ della forma

$$\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{con } c_3 \neq 0. \quad (\text{Se } c_3 = 0 \text{ allora } c_1 = c_4$$

perché E_0 contiene $\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} c_1 & m(c_1) \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}$.) Se $|E| \neq q^2$, c'è un

elemento k della forma $\begin{bmatrix} 1 & e & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ con $e \neq 0$.

Consideriamo $ghg^{-1}h^{-1}$ che è eguale a

$$\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} c_3 e & ec_3(c_4 - c_1) - c_3 e^2 \\ 0 & -c_3 e \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

D'altra parte, in E_0 c'è l'elemento $\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} c_3 e & m(c_3 e) \\ 0 & c_3 e \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Quindi, $-c_3 e = c_3 e$ cosicché $c_3 = 0$ e $E = E_0$.

Abbiamo:

(2.14) Se q è dispari allora possiamo prendere $T(a) = a$ per ogni $a \in K$.

Dimostrazione. (traccia)

$$L(a) + L(b) + T(b)a = L(a+b) + bT(a) \quad \text{per } ((2.11)(4)).$$

Allora, rovesciando i ruoli di a e b , anche

$$L(b) + L(a) + T(a)b = L(b+a) + aT(b)$$

cosicché $2aT(b) = 2bT(a)$. Quindi, $aT(1) = T(a)$. Ora, possiamo cambiare base ottenendo il risultato.

(2.15) Teorema.

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che ammetta un gruppo \mathcal{G} di ordine q^2 nel complemento lineare di traslazione. Se \mathcal{G} ha un'orbita regolare su Ω_∞ allora \mathcal{G} può essere rappresentato da un gruppo di matrici della seguente forma:

Se q è pari

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & T(b) & u+bT(b)+\varrho(b) & , & m(u)+uT(b)+R(b) \\ 0 & 1 & b & , & u \\ 0 & 0 & 1 & , & T(b) \\ 0 & 0 & 0 & , & 1 \end{bmatrix} \mid b, u \in K \right\}$$

dove T, m, ϱ sono funzioni additive e $m(1) = 0$. Inoltre,

$$R(a) + R(b) + \varrho(b)T(a) = m(bT(a)) + b(T(a))^2 + R(a+b),$$

per ogni $a, b \in K$,

$$e \quad \left\| \begin{bmatrix} u+bT(b)+\varrho(b) & , & m(u)+uT(b)+R(b) \\ b & , & u \end{bmatrix} \right\| \neq 0$$

se almeno uno tra b e u non è zero.

Se q è dispari (allora $p \neq 3$ —si veda [50])

$$g = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} 1 & a & u & -\frac{1}{3}a^3 + J(a) + m(u) \\ 0 & 1 & a & u \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \mid a, u \in K \right\}.$$

dove (1) m è additiva e $m(\text{GF}(p)) \equiv 0$,

$$(2) \quad J(a+b) + m(ab) = J(a) + J(b)$$

per ogni $a, b \in K$,

$$(3) \quad \left\| \left[\begin{array}{cc} u & -\frac{1}{3}a^3 + J(a) + m(u) \\ a & u \end{array} \right] \right\| \neq 0$$

se almeno uno tra u e a non è zero.

Dimostrazione.

Per q pari, usiamo (2.12) e (2.11).

Per q dispari, vogliamo provare per (2.11) che $L(b) = bL(1)$. Cambiamo le basi mediante

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & L(1)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L(1)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Ora, sia $u \equiv u - aL(1)/2$ e sia $-a^2L(1)/4 + R(a) + m(-aL(1)/2) + a(L(1))^2/4 = t(a)$ e $t(a) = -\frac{1}{3}a^3 + J(a)$. Questo dà il

risultato (2.15).

(2.16) Note.

(i) Se $|E| = q$ allora T è uno-uno su K . In questo caso si ottengono i piani "Elusive" o "Desirable" per q pari e dispari rispettivamente.

Per q pari o dispari, ma con la forma (2.15) per q dispari e anche $m \equiv 0$, si ottengono i piani "likeable".

(ii) I piani di Betten (q pari) e Walker (q dispari) sono ottenuti per $m \equiv 0$ e $J \equiv 0$.

(iii) Ci sono poi i piani di Kantor ottenuti assumendo $m \equiv 0$ e $J(a) = k^{-1}a + ka^5$ dove k non è un quadrato.

(iv) I piani di Lüneburg-Tits sono "elusive" e il gruppo \mathcal{G} ha la forma

$$\left\{ \left[\begin{array}{cccc} 1 & b^{\alpha-1} & u+b^{1+\alpha-1} & (u+u^\alpha)+ub^{\alpha-1}+b+b^\alpha+b^{\alpha+1} \\ 0 & 1 & b & u \\ 0 & 0 & 1 & b^{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \mid b, u \in \text{GF}(2^{2k+1}) \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha : x \longrightarrow x^{2^{k+1}} \end{array} \right\}$$

Cioè, $T(b) = b^{\alpha-1}$, $m(u) = u + u^\alpha$, e $R(b) = b + b^\alpha + b^{\alpha+1}$,
 $\mathcal{Q}(b) = b$.

(v) Il piano di Biliotti-Menichetti [4] di ordine 64 è ottenuto dal gruppo delle forma

$$\left\{ \left[\begin{array}{cccc} 1 & b^2 & u+b^3+b^4 & u^2+u^4+ub^2+b+b^2+b^4+b^5+b^6 \\ 0 & 1 & b & u \\ 0 & 0 & 1 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \mid b, u \in GF(8) \right\}.$$

Cioè, $T(b) = b^2$, $m(u) = u^2+u^4$, $\ell(b) = b^4$, e $R(b) = b + b^2 + b^4 + b^5 + b^6$.

(vi) I piani di Jha-Johnson [23] di ordine q^2 sono interessanti perché il gruppo di elazioni ha ordine $2 \cdot q$. Biliotti ha recentemente provato che esiste soltanto un piano di questo tipo di ordine 64 . La domanda sulla esistenza per l'ordine $q^2 \neq 64$ è aperta.

Il gruppo \mathcal{G} ha la forma:

$$\left\{ \left[\begin{array}{cccc} 1 & t_0(b+b^2) & \left\{ \begin{array}{l} u+bt_0(b+b^2) \\ +b+t_0(b^2+b^4) \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} u+u^2+ut_0(b+b^2) \\ +t_0^2b^3(1+b)^3+S(b) \end{array} \right\} \\ 0 & 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t_0(b+b^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \mid b, u \in FD(q), \quad q \text{ pari, } t_0 \text{ costante in } GF(q) \right\}.$$

Cioè, $T(b) = t_0(b+b^2)$, $m(u) = u+u^2$, $l(b) = b + t_0(b^2+b^4)$,
 $R(b) = t_0^2 b^3(1+b)^3 + S(b)$ dove S è un funzione additiva su
 $GF(q)$.

(vii) I piani "likeable" sono derivabili. Le loro forme sono facilmente ottenute dopo la sezione tre.

III. La forma della rete derivabile in piani di traslazione di dimensione due.

Sia π un piano finito di traslazione e sia N una rete derivabile. Per Foulser [13], N è una rete di Desargues. Sia \mathfrak{B} la collezione di sottopiani di Baer di N e sia K il nucleo di π . Diciamo che π ha dimensione due se l'ordine di π è q^2 e K è isomorfo a $GF(q)$. $K-\{0\}$ agisce sulla \mathfrak{B} alla $GL(2,q)$. (Nota: Ogni componente \mathcal{L} di N è un piano di Desargues con rette $\mathcal{L} \cap b$ dove $b \in \mathfrak{B}$. Ancora, $K-\{0\}$ agisce sulla \mathcal{L} alla $GL(2,q)$. Allora da $(q, K-\{0\}) = 1$, abbiamo

(3.1) Teorema (Biliotti-Lunardon [6]).

Sia π un piano finito di traslazione di ordine q^2 e nucleo K . Sia N una rete derivabile. Allora, ci sono 0, 2 o $q+1$ sottopiani di N che sono K -sottospazi.

(3.2) Corollario.

Con le stesse ipotesi di (3.1), se $K \cong GF(q)$ (π ha dimensione due) allora ci sono 2 o $q+1$ sottopiani di N che sono K -sottospazi.

Dimostrazione. $K-\{0\}$ ha ordine $q-1$ e $\subseteq GL(2,q)$.

Ora, sia π un piano di traslazione di dimensione due con nucleo $K \cong GF(q)$. Scegliamo come tre componenti di N , $(x = 0)$, $(y = 0)$, $(y = x)$. Ancora, se $\pi = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \mid$

$x_i, y_i \in K, i = 1, 2$ }, scegliamo $\pi_0 = \{(0, x_2, 0, y_2) \mid x_2, y_2 \in K\}$ e $\pi_1 = \{(x_1, 0, y_1, 0) \mid x_1, y_1 \in K\}$ come due sottopiani di Baer (di \mathcal{N}) che siano K -sottospazi.

Le componenti di \mathcal{N} hanno la forma: $x = 0, y = 0,$
 $y = x \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & g(u) \end{bmatrix}$ dove $u \in K$ e g è una funzione uno-uno su K .
 Per Foulser [13], queste matrici sono additive e moltiplicative.
 Allora, $g(u) = u^\sigma$ per un qualche automorfismo σ di K .

(3.3) Teorema (Jha-Johnson [35]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$. Sia \mathcal{N} una rete derivabile che può essere rappresentata nella forma: $x = 0, y = 0, y = x \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u^\sigma \end{bmatrix}$ per $u \in K$ e $\sigma \in \text{Aut } K$. Siano le componenti di $\pi\text{-}\mathcal{N}$, $y = x \begin{bmatrix} a & f \\ b & g \end{bmatrix}$.

Se (x_1, x_2, x_3, x_4) in π è rappresentato nel piano derivato $\bar{\pi}$ da (x_1, x_3, x_2, x_4) allora la componente $y = x \begin{bmatrix} a & f \\ b & g \end{bmatrix}$ in π è rappresentata da $y = x \begin{bmatrix} -ab^{-1}, f-ab^{-1}g \\ b^{-1}, b^{-1}g \end{bmatrix}$. Anche, sia $(x_1, x_2)^\sigma = x^\sigma = (x_1^\sigma, x_2^\sigma)$, allora $y = x^\sigma \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$ per $u \in K$ sono componenti in $\bar{\pi}$.

Dimostrazione.

$(x_1, x_2, x_1a+x_2b, x_1f+x_2g)$ in π è $(x_1, x_1a+x_2b, x_2, x_1f+x_2g)$ in $\bar{\pi}$. Se $x_1 = \bar{x}_1, x_1a+x_2b = \bar{x}_2$ allora, $x_2 = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1a)b^{-1} = \bar{x}_1(-ab^{-1}) + \bar{x}_2b^{-1}$ e $x_1f + x_2g = \bar{x}_1f + (\bar{x}_2 - \bar{x}_1a)b^{-1}g = \bar{x}_1(f - ab^{-1}g) + \bar{x}_2b^{-1}g$.

Inoltre, le componenti in $\bar{\pi}$, $y = x^\sigma \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$ sono sottopiani di Baer di \mathcal{N} .

Ora, sia π un piano likeable di (2.15) (vedi (2.16)(i)).

Sia

$$\mathcal{G} = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} 1 & a & u & -\frac{1}{3} a^3 + J(a) \\ 0 & 1 & a & u \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \mid u, a \in K \right\}.$$

Le componenti sono: $x = 0$,

$$\begin{aligned} (y = 0)\mathcal{G} &= \left[y = x \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & -\frac{1}{3} a^3 + J(a) \\ a & u \end{bmatrix} \right] \\ &= \left[y = x \begin{bmatrix} u - a^2 & -\frac{1}{3} a^3 + J(a) - au \\ a & u \end{bmatrix} \right] \text{ per } u, a \in K. \end{aligned}$$

Se $a = 0$ sia $\mathcal{N} : x = 0, y = x \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$ per $u \in K$. Allora, i piani likeable sono derivabili.

Usando (3.3), abbiamo i piani che sono derivati dai piani likeable:

(3.4) Sia π un piano likeable con gruppo

$$\mathcal{S} = \left\{ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & a & u & -\frac{1}{3} a^3 + J(a) \\ 0 & 1 & a & u \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \mid a, u \in K \right\}.$$

Allora, un piano $\bar{\pi}$ può costruirsi per derivazione con componenti:

$$x = 0, \quad y = x \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}, \quad y = x \begin{bmatrix} -ua^{-1} + a, & \frac{1}{3} a^3 + J(a) - u^2 a^{-1} \\ a^{-1} & a^{-1} u \end{bmatrix}$$

per $u, a \neq 0$ in K .

IV. Involuzioni di Baer nei piani di traslazione che hanno ampi gruppi di elazioni.

Sia π un piano di traslazione di ordine p^r che ha due p -gruppi: un gruppo \mathfrak{B} di Baer (\mathfrak{B} fissa ogni punto di un sottopiano di Baer) e un gruppo di elazioni \mathfrak{E} . Se p è dispari allora, Foulser [12], 1974 ha provato che si verifica l'uno o altro: $\mathfrak{B} = \langle 1 \rangle$ o $\mathfrak{E} = \langle 1 \rangle$.

Ma ci sono piani di traslazione di ordine 2^r che hanno 2-collineazioni di Baer e elazioni. Per esempio, sia Σ un piano di Desargues di ordine 2^{2s} . Sia $\sigma : x \rightarrow x^{2^s}$, $\sigma \in \text{Aut GF}(2^{2s})$. Allora, se (x, y) sono i punti di Σ , $(x, y) \rightarrow (x^\sigma, y^\sigma)$ è una collineazione di Baer di Σ che ha ordine due.

Nel caso più generale, Ganley [18] 1973, ha provato che $|\mathfrak{B}| \leq 2$ nei piani su semicorpi. In questo caso, c'è un gruppo \mathfrak{E} di elazioni che fissa una componente \mathcal{L} e agisce transitivamente sulle componenti $\neq \mathcal{L}$.

(4.1) Definizione.

Un piano finito di semi-traslazione è un piano affine di ordine q^2 che ha un gruppo H di traslazioni di ordine q^2 tale che ogni orbita di H di punti è un sottopiano di Baer.

(4.2) Nota: è possibile avere p -gruppi di Baer e p -gruppi di elazioni nei piani di semi-traslazione.

Dimostrazione.

Sia π_1 un piano di Desargues, nella catena:

$$\pi_1 \xrightarrow{\text{deriva}} \pi_2 \xrightarrow{\text{dualizza}} \pi_3 \xrightarrow{\text{deriva}} \pi_4,$$

π_4 è un piano di semi-traslazione di ordine q^2 , $q = p^r$, che ha un gruppo di Baer \mathfrak{B} di ordine q e un gruppo di elazioni \mathfrak{E} di ordine q dove \mathfrak{B} e \mathfrak{E} si centralizzano (si veda Johnson [47]).

Allora, il risultato di Foulser per piani di traslazione è proprio sorprendente. Inoltre, per piani di ordine pari, abbiamo:

(4.3) Teorema (Jha-Johnson [25],[26]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 , q pari. Sia \mathfrak{B} un 2-gruppo di Baer nel complemento (che fissa ogni elemento del sottopiano di Baer) e sia \mathfrak{E} un gruppo di elazioni.

(1) Se $|\mathfrak{B}| \geq 2\sqrt{q}$ allora $|\mathfrak{E}| \leq 2$.

(2) Se $|\mathfrak{E}| = q$ e \mathfrak{B} , \mathfrak{E} si normalizzano, allora $|\mathfrak{B}| \leq 2$.

Dimostrazione.

La dimostrazione per (1) è simile alla dimostrazione per (2). C'è un lemma di Dempwolff [9] il quale afferma che se $|\mathfrak{B}| > \sqrt{q}$ allora c'è un 2-gruppo $\bar{\mathfrak{B}}$ di Baer di ordine $|\mathfrak{B}|$

tale che \mathcal{E} e \mathcal{B} si centralizzano.

La dimostrazione in dimensione arbitraria è simile a quella per la dimensione due ma più complicata. Qua daremo le dimostrazioni solo per nucleo $K \cong \text{GF}(q)$. Inoltre, normalmente, supporremo per semplicità che i gruppi siano nel complemento lineare.

Dunque, sia π un piano di traslazione di ordine $q^2 = 2^{2r}$ che ha nucleo K isomorfo a $\text{GF}(2^r) = \text{GF}(q)$. Sia $\pi = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \mid x_i, y_i \in K \text{ per } i = 1, 2\}$. Sia π_0 un sottopiano di Baer di π che ha la rappresentazione $\{(0, x_2, 0, y_2) \mid x_2, y_2 \in K\}$. Usiamo la notazione di sezione II.

Consideriamo una fibrazione di π della forma $(x = 0)$, $(y = 0)$, $y = xM$ dove $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ e M è una matrice non-singolare di ordine due per due. Prendiamo $(x = 0)$, $(y = 0)$, $(y = x)$ come componenti di π_0 .

Primo, facciamo il presupposto che π abbia un gruppo di elazioni \mathcal{E} di ordine q con asse $(x = 0)$ e un gruppo \mathcal{B} di Baer che fissi ogni punto di π_0 . Infine, assumiamo che \mathcal{E} , \mathcal{B} si normalizzino.

(4.4) Sia K_0 il nucleo di π_0 (π_0 è un sottopiano di traslazione). Allora, $K_0 = K$ e π_0 è un piano di Desargues.

Dimostrazione.

\mathcal{B} fissa π_0 . Se $|\mathcal{B}| > 2$ allora π_0 è un K -sottopiano (si veda Foulser [13]). Allora $K|\pi_0 \leq K_0$. $|K_0| \leq q$ perché

π_0 ha ordine q . Quindi, $K|\pi_0 = K_0$.

(4.5) Possiamo scegliere coordinate tali che \mathfrak{g} abbia la forma:

$$\left\{ \sigma_b = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid b \in \lambda \subseteq K \text{ con } 0, 1 \in \lambda \right\}.$$

(4.6) Le componenti di π_0 possono essere rappresentate nella forma: $\left[y = x \begin{bmatrix} a & f(a) \\ 0 & a \end{bmatrix} \right]$, ($x = 0$) dove $a \in K$, e f è una funzione additiva su K .

Dimostrazione.

Una componente $y = x \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ di π_0 è fissata da \mathfrak{B} .

Allora,

$$\begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se e soltanto se $c = 0$ e $a = d$.

\mathfrak{g} agisce transitivamente sulle componenti di $\pi_0^{-1}(x = 0)$ e \mathfrak{g} è Abeliano elementare. Quindi, f è una funzione additiva su K e

(4.7) È possibile rappresentare \mathfrak{g} nella forma

$$\left\{ \tau_c = \left[\begin{array}{cc|cc} I & \begin{bmatrix} c & f(c) \\ 0 & c \end{bmatrix} & & \\ \hline 0 & I & & \end{array} \right] \mid c \in K \right\}.$$

$$(4.8) \text{ Per } \sigma_d = \begin{bmatrix} 1 & d & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & d \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d \in \lambda \quad \text{e} \quad \tau_e = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} e & f(e) \\ 0 & e \end{bmatrix} \\ \hline 0 & I \end{bmatrix},$$

$e \in K$ si ha che $\sigma_d \tau_e$ è un' involuzione di Baer e una

componente $y = x \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$, $m_i \in K$, $i = 1, 2, 3, 4$ è fissata da

$$\sigma_d \tau_e \Leftrightarrow m_3 = d^{-1}e \quad \text{e} \quad dm_4 = f(e) + ed + m_1d.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \sigma_d \tau_e \text{ fissa } y = x \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} &\Leftrightarrow \left[x \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x \left(\begin{bmatrix} e & f(e)+de \\ 0 & e \end{bmatrix} \right) \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \in \left[y = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \right]. \quad \text{Quindi,} \quad \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e & f(e)+de \\ 0 & e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uguagliando gli elementi delle matrici si ottiene il risultato.

(4.9) Per ogni $d \in \lambda$ e $c \in K$, il gruppo $\mathcal{G}_{b,c} = \langle \sigma_b \tau_c, \sigma_1 \tau_{b^{-1}c} \rangle$ di ordine 4 fissa ogni punto del sottopiano

$$\pi_{b,c} = \{(0, y, b^{-1}c, y_1, y_2) \mid y_1 y_2 \in K\}.$$

Allora, $\mathcal{G}_{b,c}$ fissa ogni componente $y = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$ di $\pi_{b,c}$.

Quindi, da (4.8), $dm_4 = f(e) + ed + m_1d$ per
 $(d,e) \in \{(b,c), (1, b^{-1}c)\}$. Per $(d,e) = (1, b^{-1}c)$, abbiamo
 $m_4 = f(b^{-1}c) + b^{-1}c + m_1$. Quindi,

$$f(b^{-1}c) + b^{-1}c = m_1 + m_4 = b^{-1}(f(c) + bc).$$

$$(4.10) \quad f(c) + bc = bf(b^{-1}c) + c \quad \text{per } b \in \lambda \quad \text{e per } \underline{\text{tutti}} \quad c \in K.$$

Dimostrazione.

Abbiamo eliminato il riferimento alla componente
 $y = x \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$. Quindi, (4.10) è vero per tutti i $c \in K$.

Si mette $c = 1$ e si usa $f(1) = 0$ ($(y = x)$ è una
 componente di π_0) per ottenere

$$(4.11) \quad b^{-1}(b+1) = f(b^{-1}) \quad \text{per } b \in \lambda.$$

Se $c = b$ abbiamo,

$$(4.12) \quad \begin{aligned} f(b) + b^2 &= bf(1) + b \quad \text{o} \\ f(b) &= b+b \end{aligned}$$

Se $c = b^2$

$$(4.13) \quad \begin{aligned} f(b^2) + b^3 &= bf(b) + b^2 = b(b+b^2) + b^2 \quad \text{o} \\ f(b^2) &= 0. \end{aligned}$$

$$(4.14) \quad f(b^{2^i}) = 0 \quad \text{per ogni } i = 1, 2, \dots.$$

Ma $b^q = b^{2 \cdot 2^{r-1}} = b$ cosicché $f(b) = 0 = b + b^2 = b(b+1)$.

Allora, $b = 0$ o 1 .

Quindi, abbiamo la dimostrazione della parte (2).

La Dimostrazione di (1).

Ora, prendiamo $|\mathfrak{B}| \geq 2\sqrt{q}$ e vogliamo provare che $|\mathfrak{E}| \leq 2$. Di nuovo, \mathfrak{E} ha asse $(x = 0)$, \mathfrak{B} fissa ogni punto di π_0 . Per Dempwolff [9](2.7) e Jha-Johnson [25](2.0), possiamo assumere che \mathfrak{B} , \mathfrak{E} si centralizzino. Noi daremo la dimostrazione solo per piani di dimensione due--nucleo $K \cong \text{GF}(q)$.

(4.15) (Vedi (4.5)). Possiamo scegliere le coordinate in modo che

$$\mathfrak{B} = \left\{ \sigma_b = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid b \in \lambda \subseteq K \right. \\ \left. \text{con } 0, 1 \in \lambda \text{ e } |\lambda| \geq 2\sqrt{q} \right\}.$$

$$\mathfrak{E} = \left\{ \tau_c = \begin{bmatrix} I & c & f(c) \\ 0 & c & \\ 0 & I & \end{bmatrix} \mid c \in W \subseteq K \text{ dove } 0, 1 \in W \right. \\ \left. \text{e } f \text{ è una funzione additiva su } W \right\}.$$

Inoltre (4.8) è ancora vera con queste ipotesi.

(4.16) Per ogni $c \neq 0$ in W , $|\lambda c \cap \lambda| \geq 4$.

Dimostrazione.

λc e λ sono sottogruppi additivi di K e quindi sono sottospazi vettoriali su $GF(2)$. Se $q = 2^r$, $r \geq \dim(\lambda c + \lambda) \geq (\frac{r}{2} + 1) + (\frac{r}{2} + 1) - \dim(\lambda c \cap \lambda)$. Allora, $\dim(\lambda c \cap \lambda) \geq 2$.

Abbiamo,

(4.17) Per ogni $c \in W$, c'è un $b \in \lambda$ tale che $bc \in \lambda$. Quindi il gruppo $\mathcal{G}_{b,c} = \langle \sigma_b \tau_1, \sigma_{bc} \tau_c \rangle$ di ordine 4 fissa ogni punto di un sottopiano $\pi_{b,c}$ di Baer. Inoltre, se $y = x \begin{bmatrix} m_1 \\ m_3 \\ m_2 \\ m_4 \end{bmatrix}$ è una componente di $\pi_{b,c}$ allora $m_3 = d^{-1}e$ ed anche $dm_4 = f(e) + ed + m.d$ per $(d,e) \in \{(b,1), (bc,c)\}$.

Dimostrazione. (Si veda (4.8) e (4.9).)

Ricorda che $f(1) = 0$ cosicché per $(d,e) = (b,1)$, $bm_4 = f(1) + b + m.b$ che implica $m_4 = m_1 + 1$.

Quindi,

$$(4.18) \quad f(c) + bc^2 + bc = 0.$$

Inoltre, (4.18) è vero per tutti gli elementi di $\lambda c \cap \lambda$ e $|\lambda c \cap \lambda| \geq 4$. Quindi, $f(c) = b(c+c^2) = d(c+c^2)$ per $b \neq d$ in

$\lambda c \cap \lambda - \{0\}$ cosicché, $c+c^2 = 0$. Quindi $c = 0$ o 1 .

In [25], Jha e Johnson considerano la situazione massimale dove il piano ha ordine q^2 , $|\mathfrak{B}| = q$ e il gruppo che è generato dalle elazioni è diedrale di ordine massimo.

(4.19) Teorema (Jha-Johnson (4.1), (4.2) [25])

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 , q pari $\neq 8$. Sia \mathfrak{B} un 2-gruppo di Baer di ordine q e \mathfrak{D} un gruppo diedrale di ordine $2(q+1)$ che è generato da elazioni.

(1) Allora π è un piano derivato.

(2) Se il nucleo K di π è isomorfo a $GF(q)$ allora π è un piano di Hall e viceversa.

V. Reti Derivabili che sono costruite mediante collineazioni Centrali e Piani di traslazione di Baer-Elazione.

(5.1) Definizione.

Un piano di traslazione π di ordine p^{2r} è chiamato un piano di Baer-Elazione se e soltanto se possiede un p -gruppo nonbanale di Baer e un gruppo nonbanale di elazioni.

Per Foulser [12], deve essere $p = 2$. Ci sono molti esempi di piani di Baer-elazione. Per esempio, i piani di Desargues e di Hall sono piani di Baer-elazione. Biliotti, Menichetti [5] hanno studiato piani di traslazione che possono essere derivati da piani su semicorpi e che ammettono elazioni con più di un'asse. In questa situazione, il numero degli assi meno uno è l'ordine del nucleo. Se il nucleo è $GF(q)$ e l'ordine q^2 (del piano), il piano deve essere di Hall (si veda anche Johnson-Rahilly [49]).

(5.2) Definizione.

Sia π un piano di traslazione di ordine $q^2 = 2^{2r}$. Sia \mathfrak{B} un 2-gruppo di Baer e \mathfrak{E} un gruppo di elazioni. Se $|\mathfrak{B}| = 2^b$ e $|\mathfrak{E}| = 2^e$, diciamo ^{che} π è un $(2^b, 2^e)$ -piano di Baer-elazione. Normalmente, assumiamo che $\mathfrak{B}, \mathfrak{E}$ si normalizzino.

In questa notazione, i risultati di Jha-Johnson nella sezione IV sono:

- Se π è di tipo $(2^b, q)$ allora $b \leq 1$ e
 Se π è di tipo $(\geq 2\sqrt{q}, 2^e)$ allora $e \leq 1$.

Dunque, considereremo piani di tipo $(2,q)$ o $(q,2)$. Per semplicità, assumiamo che il nucleo K sia isomorfo a $GF(q)$.

$(q,2)$ -piani.

(5.3) Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 , q pari, e nucleo $K \cong GF(q)$. Sia π un piano di Baer-elazione di tipo $(q,2)$ con gruppi \mathcal{B} , \mathcal{E} nel complemento di traslazione, cosicché \mathcal{B} è un 2-gruppo di Baer di ordine q e \mathcal{E} è un gruppo di elazioni di ordine 2 con asse \mathcal{L} . Assumiamo che \mathcal{B} fissi il sottopiano π_0 .

(5.4) (1) \mathcal{B} , \mathcal{E} si centralizzano o π è di Hall.

(2) \mathcal{B} è nel complemento lineare.

Dimostrazione (1).

Se \mathcal{B} , \mathcal{E} non si centralizzano allora ci sono almeno due gruppi di Baer di ordine $|\mathcal{B}|$. In sezione VII, vedremo che in questo caso π deve essere un piano di Hall.

Dimostrazione (2).

Foulser [13] (si veda Jha-Johnson (2.2) [33]).

(5.5) Possiamo scegliere le coordinate in modo tale che

$$\pi = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \mid x_i, y_i \in K, i = 1, 2\},$$

$$\pi_0 = \{(0, x_2, 0, y_2) \mid x_2, y_2 \in K\},$$

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in K \right\}$$

e le componenti di π_0 hanno la forma: $x = 0$, $y = x \begin{bmatrix} a & f(a) \\ 0 & a \end{bmatrix}$
dove $a \in K$ e f è un funzione su K con $f(0) = f(1) = 0$.

Nota. È possibile che f non sia additiva.

Dimostrazione. Si veda (4.5) e (4.6).

In modo simile,

(5.6) Possiamo scegliere le coordinate in modo tale che

$$\mathfrak{E} = \left\langle \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\rangle = \langle \sigma \rangle.$$

(5.7) $\mathfrak{B}\mathfrak{E}$ contiene $q-1$ involuzioni di Baer τ_a per $a \in K - \{0\}$ che non sono in \mathfrak{B} . Ogni involuzione di Baer fissa ogni punto di un sottopiano di Baer π_a che ha in comune solo la componente $(x = 0)$ con π_b , $a \neq b$.

Dimostrazione.

$$|\mathfrak{B}\mathfrak{E} - \mathfrak{E} - 1| = q-1 \quad \text{e} \quad \mathfrak{B}\mathfrak{E} \quad \text{è abeliano elementare.}$$

$$\tau_a = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(5.8). Sia $\tau_a = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a \neq 0$. Le componenti che τ_a

fissa hanno la forma: $x = 0$, $y = x \begin{bmatrix} u & G(u, a^{-1}) \\ a^{-1} & u+1 \end{bmatrix}$ dove G è una funzione: $K \times (K - \{0\}) \rightarrow K$.

Dimostrazione.

Una componente $y = x \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$ è fissata da $\tau_a \Leftrightarrow m_3 = a^{-1}$ e $m_4 = m_1 + 1$ (si veda (4.8)).

(5.9) Sia $G(0, a^{-1}) = g(a^{-1})$. Ci sono $(q-1)$ -componenti della forma

$$y = x \begin{bmatrix} 0 & , & g(a^{-1}) \\ a^{-1} & , & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in K - \{0\}.$$

Le componenti di τ_a per $a \neq 0$ hanno la forma:

$$x = 0, \quad y = x \begin{bmatrix} ba^{-1} & , & b^2 a^{-1} + b + g(a^{-1}) \\ a^{-1} & , & ba^{-1} + 1 \end{bmatrix}$$

per b in K .

Dimostrazione.

\mathfrak{B} è abeliano elementare cosicché \mathfrak{B} deve fissare ogni sottopiano π_a e agire transitivamente sulle componenti di $\pi_a \neq (X = 0)$.

$$y = x \begin{bmatrix} 0 & , & g(a^{-1}) \\ a^{-1} & , & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$y = x \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & g(a^{-1}) \\ a^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[y = x \begin{bmatrix} ba^{-1} & , & g^2 a^{-1} + b + b(a^{-1}) \\ a^{-1} & , & ba^{-1} + 1 \end{bmatrix} \right].$$

Quindi, possiamo dare la struttura per i piani di tipo (q,2) e dimensione due:

(5.10) Teorema (Jha-Johnson [33] (2.8)).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 , q pari e nucleo $K \cong GF(q)$. Se π ammette un gruppo di Baer nel complemento di traslazione di ordine q e un gruppo non-banale di elazioni, allora esistono coordinate e funzioni $f, g : K \rightarrow K$ tali che

- (1) $f(a) = f(a+1)$ per $a \in K$;
- (2) $d + d^2 + f(d)a^{-1} \neq g(a^{-1})a^{-1}$, per $d, a \neq 0$ in K ;

(3) $g(d) + g(c) \neq t(1+t \frac{dc}{c+d})$ per $d \neq c$, t in K e le componenti hanno la forma:

$$x = 0, \quad y = x \begin{bmatrix} u & f(u) \\ 0 & u \end{bmatrix},$$

$$y = x \begin{bmatrix} ba^{-1} & , & b^2a^{-1}+b+g(a^{-1}) \\ a^{-1} & , & ba^{-1}+1 \end{bmatrix}$$

per $u, b, a \neq 0$ in K e $(x, y) = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ per x_i, y_i in K , $i = 1, 2$. Viceversa, se ci sono funzioni f, g su un campo $K \cong GF(q)$ che hanno le proprietà (1), (2), (3) allora si può ottenere un piano di traslazione di ordine q^2 e tipo $(q, 2)$.

Dimostrazione.

Le condizioni (2), (3) possono essere ottenute usando la proprietà che la differenza tra due matrici (che rappresentano le componenti) è non-singolare.

(2, q)-piani

L'analisi per piani di tipo $(2, q)$ è molto simile a quella per piani di tipo $(q, 2)$. Pertanto daremo solo una traccia.

(5.11) Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 , q pari e nucleo $K \cong GF(q)$. Supponiamo che π sia un $(2, q)$ -piano con gruppi $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}$ nel complemento lineare dove \mathfrak{H} è un gruppo di

Baer di ordine 2 e \mathcal{E} è un gruppo di elazioni di ordine q . Inoltre supponiamo che \mathcal{B} , \mathcal{E} si centralizzino e che \mathcal{B} fissi ogni punto del sottopiano π_0 .

(5.12) Si possono scegliere le coordinate in modo che

$$\pi = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \mid x_i, y_i \in K, i = 1, 2\},$$

$$\pi_0 = \{(0, x_2, 0, y_2) \mid x_2, y_2 \in K\},$$

$$\mathcal{B} = \langle \tau \rangle, \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u & m(u) \\ 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid u \in K \text{ e } m \right.$$

è una funzione additiva su K con $m(0) = m(1) = 0 \left. \vphantom{\sigma_u} \right\}$.

(5.13) Esistono funzioni f, g su K dove f è uno-uno taliche $y = x \begin{bmatrix} g(v) & f(v) \\ v & 0 \end{bmatrix}$ è una componente per tutti i $v \in K$.

Dimostrazione.

Sia $y = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$ una componente. $\{[m_3, m_4]\} = K \times K$.

Consideriamo le componenti $y = x \begin{bmatrix} \overline{\quad} & \overline{\quad} \\ v & 0 \end{bmatrix}$. Ogni componente

è determinata completamente da $[v,0]$. Allora gli elementi (1,1) e (1,2) della matrice devono essere rappresentati da funzioni di V .

Nota: $\begin{bmatrix} g(u) & f(u) \\ u & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(v) & f(v) \\ v & 0 \end{bmatrix}$ è non-singolare.

Quindi, f è uno-uno.

(5.14) Le componenti di π hanno la forma

$$x = 0, \quad y = x \begin{bmatrix} u+g(v) & f(v)+m(u) \\ v & u \end{bmatrix}.$$

Dimostrazione.

Applica il gruppo \mathcal{E} a $\left[y = x \begin{bmatrix} g(v) & f(v) \\ v & 0 \end{bmatrix} \right]$.

(5.15) \mathcal{E} contiene q involuzioni di Baer

$$= \tau\mathcal{E} = \left\{ \tau\sigma_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & m(a)+a \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in K \right\}.$$

(5.16) $g(a) = a + m(a)$ per tutti gli $a \in K$.

Dimostrazione.

$\tau\sigma_a$ fissa $y = x \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = m_3$ e $m_1 = m_4 + m(a) + a$

(si veda (4.8)). Se $m_4 = u$ allora (da (5.14)) $u + g(a) = m_1 = u + m(a) + a$.

Allora, abbiamo il seguente

(5.17) Teorema (Jha-Johnson [33] (3.7)).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 , q pari, e nucleo $K \cong GF(q)$. Ammetta π un gruppo di elazioni \mathcal{E} di ordine q e un 2-gruppo nonbanale \mathcal{B} taliche \mathcal{E} e \mathcal{B} si normalizzano e, \mathcal{B} sia nel complemento lineare di traslazione. Allora ci sono funzioni f, m su K tali che

(1) f è uno-uno,

(2) m è additiva e $m(0) = m(1) = 0$,

(3) $\text{Det} \left\{ \begin{bmatrix} u+v+m(v) & f(v)+m(u) \\ v & u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+b+m(b) & f(b)+m(a) \\ b & a \end{bmatrix} \right\} \neq 0$

se almeno uno fra a, b, u, v non è zero per $a, b, u, v \in K$ e $(u, v) \neq (a, b)$ e le componenti di π possono essere rappresentate nella forma $x = 0, y = x \begin{bmatrix} u+v+m(v) & f(v)+m(u) \\ v & u \end{bmatrix}$ per tutti gli $u, v \in K$. Viceversa, funzioni f, m che hanno le proprietà sopra indicate danno un piano di traslazione di ordine q^2 e tipo $(2, q)$.

Se π è un $(q, 2)$ o $(2, q)$ -piano con molti assi (o molti sottogruppi di Baer), Jha e Johnson [33](4.5), (4.6) hanno provato:

(5.18) Teorema.

(1) Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$. Ammetta π un gruppo di Baer di ordine q . Se π ammette gruppi di elazioni con almeno due assi allora π

è un piano di Hall e viceversa un piano di Hall ammette gruppi di questo tipo.

(2) Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong \text{GF}(q)$. Ammetta π un gruppo di elazioni ξ di ordine q . Se π ammette almeno due 2-gruppi di Baer \mathfrak{B}_i , $i = 1, 2$, nel complemento lineare dove ξ, \mathfrak{B}_i si normalizzano $i = 1, 2$ ma $\mathfrak{B}_2 \not\subseteq \xi\mathfrak{B}_1$, allora π è un piano di Desargues.

Reti Derivabili Che Sono Costruite Mediante Collineazioni Centrali

Consideriamo il seguente problema: Sia π un piano di traslazione e sia \mathcal{G} un gruppo di collineazioni nel complemento e \mathcal{C} una collezione di componenti (forse vuota). Quando è $\mathcal{C} \cup U$ (una qualche orbita di \mathcal{G} di componenti) una rete sostituibile (di Desargues)?

Per esempio, c'è il seguente

(5.19) Teorema (Johnson [41]).

Sia π un piano di traslazione di ordine p^{2rt} che ammetta un gruppo di collineazioni isomorfo a $\text{SL}(2, p^r)$ dove gli elementi di ordine p sono elazioni. Sia \mathcal{C} la collezione degli assi di elazione. Allora, c'è una orbita Γ di \mathcal{C} di componenti tale che $\mathcal{C} \cup \Gamma$ è una rete di Desargues che può

essere coordinatizzata da $GF(p^{2r})$. Inoltre, per ogni orbita $\bar{\Gamma}$ tale che $|\bar{\Gamma}| = |\Gamma|$, $\mathcal{G} \cup \bar{\Gamma}$ ha questa proprietà.

Nel caso sopra, non tutte le orbite $\bar{\Gamma} \cup \mathcal{G}$ sono reti di Desargues. Ma, la situazione è diversa quando \mathcal{G} è un gruppo centrale.

Se \mathcal{F} è una fibrazione per π , useremo la notazione $\mathcal{F} = \mathcal{N} \cup \mathcal{M}$ quando \mathcal{N}, \mathcal{M} sono reti tali che ogni componente di π è in \mathcal{N} o \mathcal{M} e $\mathcal{N} \cap \mathcal{M} = \phi$.

(5.20) Teorema (Jha-Johnson [30] (3.1), (3.2)).

Sia π un piano finito di traslazione $= \mathcal{N} \cup \mathcal{M}$ dove \mathcal{N} è una rete di Desargues.

(1) Sia ξ un gruppo di elazioni con l'asse \mathcal{L} una componente di \mathcal{N} . Supponiamo che ξ sia transitivo sulle componenti di $\mathcal{N} - \mathcal{L}$.

(a) Allora $\mathcal{L} \cup$ (ogni ξ -orbita di componenti $\neq \mathcal{L}$) è una rete di Desargues.

(b) Se \mathcal{N} è derivabile allora anche $\mathcal{L} \cup$ (ogni ξ -orbita delle componenti $\neq \mathcal{L}$) è derivabile.

(2) Sia \mathcal{K} un gruppo di omologie con asse \mathcal{L} e coasse \mathcal{K} dove \mathcal{L}, \mathcal{K} sono componenti di \mathcal{N} . Supponiamo che \mathcal{K} sia transitivo sulle componenti di $\mathcal{N} - \{\mathcal{L}, \mathcal{K}\}$.

(a) Allora $\{\mathcal{L}, \mathcal{K}\} \cup$ (ogni H -orbita di componenti) è una rete di Desargues.

(b) Se N è derivabile allora anche $\{\mathcal{L}, \mathcal{K}\} \cup$ (ogni H -orbita di componenti) è derivabile.

Dimostrazione.

Sia Σ un piano di Desargues con $N \subseteq \Sigma$. Si scelga un campo K per Σ in modo che $x = 0$ sia l'asse per ξ in π e N abbia le componenti $x = 0$, $y = 0$, $y = xC$ per $C \in \lambda \subseteq K$. Allora, ξ può essere rappresentato in π nella forma $\left\{ \left[\begin{array}{cc} I & C \\ 0 & I \end{array} \right] \mid C \in \lambda \right\}$. Nota: In Σ , $y = xC$ rappresenta uno spazio di dimensione uno ma in π , x, y possono essere r -spazi vettoriali per un qualche r e C una matrice r per r su $GF(p)$ se $K \cong GF(p^r)$.

Sia $y = xM$ una componente di $\pi - \{x = 0\}$. Allora, l'orbita di $y = xM$ su ξ è $\{y = x(M+C) \mid C \in \lambda\}$.

Cambia le basi mediante $(x, y) \xrightarrow{\tau} (x, xM+y)$, $\left[\tau = \left[\begin{array}{cc} I & -M \\ 0 & I \end{array} \right] \right]$.
 τ fissa $(x = 0)$ e cambia $\{y = x(M+C) \mid C \in \lambda\}$ in $\{(y = x(M+C-M)) = (y = xC) \mid C \in \lambda\}$.

Se N è derivabile, possiamo assumere che $\lambda \cong GF(q)$ e $K \cong GF(q^2)$ dove $q^2 = p^r$. Per la dimostrazione sopra, possiamo scegliere le coordinate in modo che ogni ξ -orbita $U(x = 0)$ abbia la stessa forma - allora ogni ξ -orbita $U(x = 0)$ è derivabile.

Dimostrazione (2) (traccia). Rappresenta \mathcal{K} mediante $\{(x, y) \rightarrow (x, yC) \mid C \in \lambda\}$,

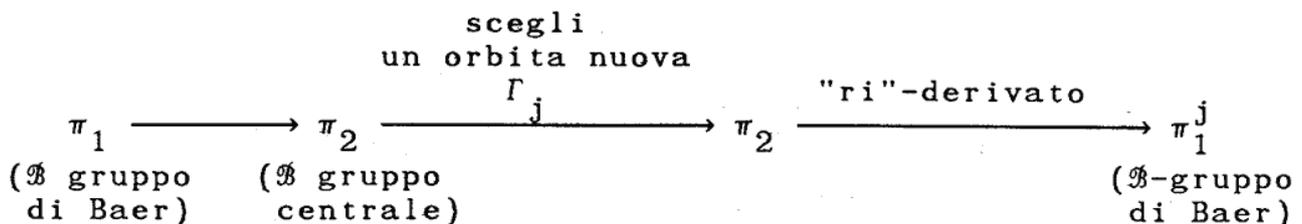
$$(x, xM) \xrightarrow{\mathcal{K}} \{y = x(MC) \mid C \in \lambda\}.$$

Cambia le basi mediante $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}$. Allora, questa orbita Γ ha la forma $\{y = x(MCM^{-1}) \mid C \in \lambda\}$. $MKM^{-1} \cong K$ e $\Gamma \subseteq \bar{\Sigma}$ dove $\bar{\Sigma}$ è il piano che può essere coordinatizzato da MKM^{-1} .

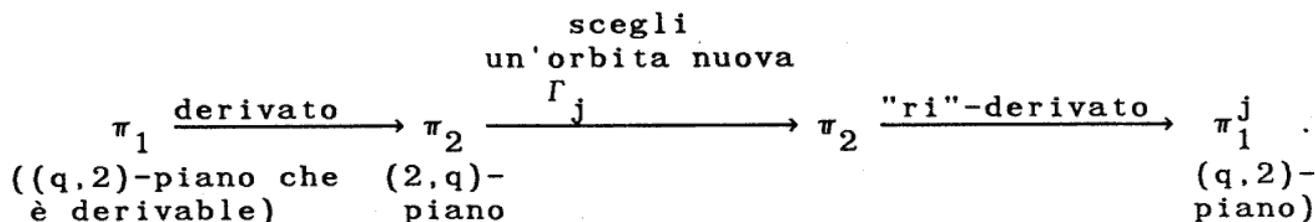
La Costruzione delle orbite.

(5.2) Sia π_1 un piano di traslazione di ordine q^2 che ammetta un gruppo \mathfrak{B} di Baer dove $|\mathfrak{B}| = q$ (o $(q-1)$). Supponiamo \mathfrak{B} fissi ogni punto di π_0 e che le componenti N di π_0 diano una rete derivabile. Sia π_2 il piano derivato. In π_2 , \mathfrak{B} è un gruppo centrale e possiamo applicare (5.20). Siano queste $q-1$ (q) \mathfrak{B} -orbite Γ_i , $i = 1, \dots, q-1$ (q) $\neq \bar{N}$ (la rete sostituibile di π_2). Si scelga una orbita $\Gamma_j \cup \{\text{l'asse di } \mathfrak{B} \text{ in } \pi_2\}$ (o l'asse e il co-asse di \mathfrak{B} in π_2). Questa è anche una rete derivabile—si ottiene un piano nuovo π_1^j ; $j = 1, \dots, q-1$ (q) che ancora ammette un gruppo di Baer di ordine q (o $(q-1)$) ma generalmente non è isomorfo a π_1 . $\{\pi_1^j \mid j = 1, \dots, q-1$ (q) $\}$ si chiamano le forme ri-derivate di π_1 .

Abbiamo:



Per un'illustrazione, applichiamo ciò ai piani di Baer-elazione usando la sezione III.



(5.22) Teorema.

Sia π_1 un piano di traslazione di ordine q^2 , nucleo $K \cong \text{GF}(q)$ e di tipo $(q,2)$ che sia derivabile. Supponiamo che le componenti di π_1 abbiano la forma: $x = 0, y = x \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$,

$$y = x \begin{bmatrix} ba^{-1} & , & b^2 a^{-1} + b + g(a^{-1}) \\ a^{-1} & , & ba^{-1} + 1 \end{bmatrix} \quad \text{per } u, b, a \neq 0 \text{ in } K \text{ e}$$

$(x, y) = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ per $x_i, y_i \in K, i = 1, 2$ e $g : K \rightarrow K$.

(1) Le componenti possono essere rappresentate nella

$$\text{forma: } x = 0, y = x \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}, y = x \begin{bmatrix} ba & g(a^{-1}) \\ a & b+a \end{bmatrix} \quad \text{per tutti gli}$$

$a, b, a \neq 0$ in K .

(2) Siano le orbite Γ_j del gruppo \mathcal{E} di elazioni

$$= \left\{ y = x \begin{bmatrix} b & g(a_j^{-1}) \\ a_j & b+a_j \end{bmatrix} \mid b \in K \right\} \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, q-1; a_j \neq 0.$$

Sia $g_j(c^{-1}) = g(c+a_j)^{-1} + g(a_j^{-1})$. Cambia le basi di

$$\begin{bmatrix} I & M_j \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{dove } M_j = \begin{bmatrix} 0 & g(a_j^{-1}) \\ a_j & a_j \end{bmatrix}. \quad \text{Dopo questo cambiamento,}$$

le componenti di π_2 hanno la forma $x = 0, y = x \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$,

$$y = x \begin{bmatrix} b & g_j(a^{-1}) \\ a & b+a \end{bmatrix} \quad \text{per } u, b, a \neq 0 \text{ in } K.$$

(3) I piani ri-derivati π_1^j possono avere la forma:

$$x = 0, \quad y = x \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}, \quad y = x \begin{bmatrix} ba^{-1} & , & b^2a^{-1}+b+g_j(a^{-1}) \\ a^{-1} & , & ba^{-1}+1 \end{bmatrix}$$

dove $g_j(c^{-1}) = g((c+a_j)^{-1}) + g(a_j^{-1})$.

Dimostrazione. (1) Usa (5.10), (3.3) (con $m \equiv 0$).

$$(2) \quad \left[y = x \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \right] \xrightarrow{\begin{bmatrix} I & M_j \\ 0 & I \end{bmatrix}} \left[y = x \begin{bmatrix} u & g(a_j^{-1}) \\ a_j & u+a_j \end{bmatrix} \right] \quad e$$

$$\left[y = x \begin{bmatrix} b & g(a^{-1}) \\ a & b+a \end{bmatrix} \right] \xrightarrow{\begin{bmatrix} I & M_j \\ 0 & I \end{bmatrix}} \left[y = x \begin{bmatrix} b & , & g(a^{-1})+g(a_j^{-1}) \\ a+a_j & , & b+(a+a_j) \end{bmatrix} \right].$$

Se $\bar{a} = a + a_j$ allora $g(a^{-1}) + g(a_j^{-1}) = g((\bar{a}+a_j)^{-1}) + g(a_j^{-1}) = g_j(\bar{a})^{-1}$.

(3) Usa (3.3) di nuovo.

Inoltre, Barriga [2] e anche Cohen-Ganley [8] hanno trovato lo stesso piano π_1 di ordine q^2 , nucleo $GF(q)$, usando polinomi di Chebyshev di grado 5.

Usando (5.20) e (3.3) possiamo ottenere le seguenti fibrazioni per π_1^j .

(5.23) Teorema (Jha-Johnson [30]).

Sia $V = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \mid x_1, x_2, y_1, y_2 \in GF(q) \text{ dove } q = p^r, \quad r \text{ dispari e } p \equiv \pm 2 \pmod{5}\}$. Per ogni $a_j \neq 0, j = 1, \dots, q-1$, la seguente è una fibrazione per un piano π_1^j

di ordine q^2 che ammetta un gruppo di Baer di ordine q e sia un piano ri-derivato di π_1 —il piano di (Barriga-Cohen-Ganley): $x = 0$, $y = x \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$,

$$y = x \begin{bmatrix} v & \{-\gamma((b^{-1}+a_j)^{5-a_j^5}) + \beta(v(b^{-1}+a_j)^{3-a_j^3}-v^2b^{-1})\} \\ b & \beta b(b^{-1}+a_j)^{3-a_j^3-v} \end{bmatrix}$$

per $u, v, b \neq 0$ in $GF(q)$.

VI. Piani di traslazione di ordine q^2 che hanno un gruppo di collineazione di ordine q^2 che non agisce regolarmente.

Sia Σ il piano di Desargues di ordine q^2 . Sia $F \cong GF(q^2)$ e $K (\subseteq F) \cong GF(q)$. Si rappresenti Σ su K come $\{(x_1, x_2, y_1, y_2) \mid x_i, y_i \in K, i = 1, 2\}$.

Sia $\varepsilon = \{(x, y) \longrightarrow (x, x\alpha + y) \text{ in } \Sigma \text{ dove } \alpha \in F\}$.

Sia $\sigma : (x, y) \longrightarrow (x^q, y^q)$. Se $\{t, 1\}$ è una base per F su K e $(t\alpha + \beta)^q = (t + \beta_0)\alpha + \beta = t\alpha + \beta_0\alpha + \beta$ allora abbiamo $x^q = (\alpha, \beta)^q = (\alpha, \beta_0\alpha + \beta) = (\alpha, \beta) \begin{bmatrix} 1 & \beta_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Sia $\mathcal{G} = \langle \varepsilon, \sigma \rangle$ cosicché $|\mathcal{G}| = 2 \cdot q^2$. Nota: \mathcal{G} è in $GL(4, q)$ e se q è pari c'è un sottogruppo $\hat{\mathcal{G}}$ di ordine q^2 tale che $\sigma \in \hat{\mathcal{G}}$.

Per esempio per ogni sottogruppo additivo \hat{K} di ordine $q/2$, $\{t\hat{K} + K\}$ è un sottogruppo additivo di ordine $q^2/2$ che è normalizzato da σ .

$\hat{\mathcal{G}}$ è un gruppo di ordine q^2 in $GL(4, q)$ che ha due orbite sulla retta $\Omega_\omega - \{(\infty)\}$ di Σ di ordine $q^2/2$.

Proviamo che questo è anche il caso generale.

(6.1) Teorema.

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $GF(q)$ che ha un gruppo \mathcal{G} di collineazioni di ordine q^2 nel complemento lineare di traslazione. Allora, \mathcal{G} fissa un punto all'infinito (∞) e vale l'uno o l'altro:

(1) \mathcal{G} ha un'orbita regolare su $\Omega_\infty - \{(\infty)\}$ (di ordine q^2)

o

(2) q è pari e \mathcal{G} ha due orbite su $\Omega_\infty - \{(\infty)\}$ di ordine $q^2/2$.

Dimostrazione.

Deriviamo la dimostrazione dai seguenti lemmi:

Assumiamo \mathcal{G} non sia transitivo su $\Omega_\infty - \{(\infty)\}$. Per la sezione II (2.1), q deve essere pari.

(6.2) Lemma.

Sia $Z(\mathcal{G})$ il centro di \mathcal{G} . Allora, (1) $|Z(\mathcal{G})| \leq q$ o

(2) \mathcal{G} è abeliano.

Dimostrazione.

In sezione XII, proveremo che se \mathcal{G} è abeliano allora \mathcal{G} è transitivo su $\Omega_\infty - \{(\infty)\}$. Quindi possiamo assumere che \mathcal{G} non sia abeliano.

Sia $\sigma \in Z(\mathcal{G})$ di ordine 2. Se $\text{Fix } \sigma$ è un sottopiano di Baer allora \mathcal{G} deve fissare q punti della componente di $\text{Fix } \sigma$ (perché \mathcal{G} è nel complemento lineare). Allora, $|\mathcal{G} \upharpoonright \text{Fix } \sigma| \leq q$. Quindi, $|\mathcal{G}_{[\text{Fix } \sigma]}|$ (il gruppo che fissa ogni punto di $\text{Fix } \sigma$) = q .

D'altra parte il sottogruppo delle elazioni ha ordine $\geq q$ (sezione II (2.3)). Quindi, per la sezione IV (4.2)(2), $q \leq 2$ perché $\mathcal{G}_{[\text{Fix } \sigma]}$ è un 2-gruppo di Baer. Quindi, le involuzioni di $Z(\mathcal{G})$ sono elazioni.

Possiamo rappresentare \mathcal{G} nella forma $\left\{ \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A \end{array} \right] \right\}$ se

si sceglie che un'involuzione di $Z(\mathcal{G})$ sia $\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$ (si veda sezione II) dove $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ per $a \in \lambda \subseteq K$ dove $|\lambda| = 2^{r-t}$ se $q = 2^r$.

Sia E il sottogruppo delle elazioni di \mathcal{G} . $|E| = 2^{r+t}$, $0 \leq t \leq r$.

Se $t = r$ allora \mathcal{G} è abeliano. Quindi, c'è un elemento

$a \neq 0$ in K tale che $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}$. Sia anche

$\tau = \begin{bmatrix} 1 & c & c_1 & c_2 \\ 0 & 1 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}$. Se $c_3 = 0$ e $c \neq 0$ allora τ fissa

i q^2 -punti $\{(0, x_2, x_2 c^{-1}, y_2) \mid x_2, y_2 \in K\}$. Se $c_3 = 0$ e $c = 0$ allora $c_1 = c_4$ e (si veda Dim. (2.8) e (2.9) della sezione II) c_2 è $m(c_1)$ per una qualche funzione $m : K \rightarrow K$.

Dunque, se $c_3 = 0$ allora $\tau = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}$ per un qualche u in K .

(6.3) Lemma.

Se $|E| = q$ allora \mathcal{G} è transitivo su $\mathcal{L}_\infty - \{(\infty)\}$.

Dimostrazione. Jha-Johnson [24].

Allora, $|E| = 2^{r+t}$, $t \geq 1$ e possiamo assumere $c_3 \neq 0$ e

$c = 0$ per un qualche elemento $\tau \in \mathcal{G}$. Infine, se

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & d & d_1 & d_2 \\ 0 & 1 & d_3 & d_4 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in Z(\mathcal{G}) \quad \text{allora} \quad \rho\tau = \tau\rho \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow c_3 = 0 \quad \text{se anche} \quad d \neq 0. \quad \text{Allora ogni}$$

elemento del centro è un'elazione. Se $|Z(\mathcal{G})| > q$. Allora,

c'è un tale elemento $\tau \in Z(\mathcal{G})$. In questo caso, $\tau\sigma \neq \sigma\tau$.

Quindi, $|Z(\mathcal{G})| \leq q$ e anche

(6.4) Lemma.

$$Z(\mathcal{G}) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \mid u \in \lambda \text{ e } m \text{ è una funzione di } \lambda \subseteq K \right\}.$$

(6.5) Lemma.

Ci sono esattamente q sottopiani di Baer che sono fissati da involuzioni di Baer.

Dimostrazione.

\mathcal{G} fissa q punti di $(x = 0)$. Allora, per $P \in \mathcal{L}_\infty - \{(\infty)\}$, $\mathcal{G}_P \neq \langle 1 \rangle$ e \mathcal{G}_P è un sottogruppo di Baer che fissa ogni punto di un sottopiano π_P di Baer. Sia $Q \in \pi_P \cap \{\mathcal{L}_\infty - \{(\infty)\}\}$ cosicché \mathcal{G}_P fissa Q . Quindi, $\mathcal{G}_P \subseteq \mathcal{G}_Q$ ma \mathcal{G}_Q è anche di Baer cosicché $\mathcal{G}_P = \mathcal{G}_Q$.

(6.6) Lemma.

$$\text{Sia } \sigma = \begin{bmatrix} 1 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ un' involuzione di Baer.}$$

Allora, $a \neq 0$ e $b_3 = 0$. σ fissa ogni punto di $\pi_k = \{(0, x_2, x_2 k, y_2) \mid k = b_4 a^{-1}, x_2, y_2 \in K\}$.

Dimostrazione. Se $a = 0$ allora $\sigma \in E$. Supponiamo $a \neq 0$.

Se σ fissa (x_1, x_2, y_1, y_2) allora, $(x_1, x_1 a + x_2, x_1 b_1 + x_2 b_3 + y_1, x_1 b_2 + x_2 b_4 + y_1 a + y_2) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Quindi, $x_1 = 0$, $x_2 b_3 = 0$.

Se $x_2 = 0$ sempre allora σ è una collineazione centrale.

Quindi, $b_3 = 0$. In questo caso, $x_2 b_4 + y_1 a = 0$ cosicché σ fissa ogni punto di $\{(0, x_2, x_2 b_4 a^{-1}, y_2) \mid x_2, y_2 \in K\}$.

Quindi, i q sottopiani di Baer sono π_k per $k \in K$.

(6.7) Lemma.

(1) $\mathcal{G}_{\pi_k} = \mathcal{G}_{\pi_a}$ per tutti i $k, a \in K$.

(2) Gli elementi di \mathcal{G}_{π_k} sono esattamente gli elementi di

Baer di \mathcal{G} e/o le elazioni nel centro.

Dimostrazione.

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & d & d_1 & d_2 \\ 0 & 1 & d_3 & d_4 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ fissa } \pi_k \Leftrightarrow (0, x_2, x_2 k, y_2) \longrightarrow$$

$(0, x_2, x_2 d_3 + x_2 k, x_2 d_4 + x_2 k d + y_2)$ cosicché $d_3 = 0 \Leftrightarrow (0, x_2, x_2 a, y_2)$

$\longrightarrow (0, x_2, x_2 a, x_2 d_4 + x_2 a d + y_2) \Leftrightarrow \rho$ fissa π_a . ρ è di

Baer $\Leftrightarrow d \neq 0$ e $d_3 = 0$ e è un'elazione $\Leftrightarrow d = 0$ cosicché con $d_3 = 0$, $p \in Z(\mathcal{G})$.

(6.8) Lemma.

Ci sono esattamente q sottogruppi \mathcal{G}_{x_k} per $x_k \in \pi_k \cap \{\Omega_\infty - \{(\infty)\}\}$.

Dimostrazione. $\mathcal{G}_P = \mathcal{G}_Q \Leftrightarrow P, Q \in \pi_k \cap \Omega_\infty - \{(\infty)\}$ per un qualche $k \in K$.

(6.9) Lemma

Sia \mathcal{G} il gruppo \mathcal{G} quando \mathcal{G} agisce su $\{\mathcal{G}_{x_k} \mid k \in F\}$ per coniugio. Sia $\bar{\mathcal{G}}$ il gruppo \mathcal{G} quando \mathcal{G} agisce su $\{\pi_k \mid k \in F\}$. Allora $\hat{\mathcal{G}}$ è isomorfo a $\bar{\mathcal{G}}$ come gruppo di permutazioni.

Sia $h \in \mathcal{G}$ allora $\pi_{x_i} h = \pi_{x_j} \Leftrightarrow x_i h \in \pi_{x_j} \cap (\Omega_\infty - \{(\infty)\})$
 $\Leftrightarrow \mathcal{G}_{x_j} = \mathcal{G}_{x_i h}$. Ma, $\mathcal{G}_{x_i} h = \mathcal{G}_{x_i}^h$. Quindi, $\mathcal{G}_{x_j} = \mathcal{G}_{x_i h} \Leftrightarrow$
 $\mathcal{G}_{x_j} = \mathcal{G}_{x_i}^h$.

(6.10) Lemma.

Sia $|\mathcal{G}_{\pi_k}| = 2^d$ per $1 \leq d \leq 2r$ se $q = 2^r$. La lunghezza dell'orbita di π_k in \mathcal{G} allora è 2^{2r-d} e ogni orbita di π_a ha lunghezza 2^{2r-d} . Quindi, ci sono $2^r / 2^{2r-d} = 2^{d-r}$

orbite di sottopiani di Baer

Dimostrazione. (6.7).

(6.11) Lemma.

Siano $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{2^{d-r}}$ le orbite di $\{\pi_k \mid k \in K\}$. Sia $y_i \in \Sigma_i \cap (\mathcal{L}_\infty - \{(\infty)\})$ per ogni $i = 1, 2, \dots, 2^{d-r}$. Allora, ci sono 2^{2r-d} gruppi \mathcal{G}_{x_k} in ogni orbita di \mathcal{G}_{y_i} di lunghezza 2^{2r-d}

Dimostrazione. (6.10) e (6.9).

(6.12) Lemma.

$$(1) \quad \mathcal{G}_{\pi_k} = \bigcup_{\substack{a=0 \\ (a \in K)}}^{q-1} \mathcal{G}_{x_a} \cup Z(\mathcal{G}) \quad \text{per } k \in K.$$

$$(2) \quad |\mathcal{G}_{\pi_k}| = \sum_{a=0}^{q-1} (|\mathcal{G}_{x_a}| - 1) + |Z(\mathcal{G})|. \quad \text{Sia } |\mathcal{G}_{y_i}| \text{ (da (6.11))} \\ = 2^{b_i} \text{ dove assumiamo } b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{2^{d-r}}. \text{ Allora,}$$

$$(3) \quad |\mathcal{G}_{\pi_k}| = \left(\sum_{j=1}^{2^{d-r}} |\mathcal{G}_{y_j}| \cdot 2^{2r-d} \right) - q + |Z(\mathcal{G})| \\ = 2^{2r-d} \cdot \sum_{j=1}^{2^{d-r}} 2^{b_j} - q + |Z(\mathcal{G})|.$$

Dimostrazione (1), (2): (6.7), (6.8).

Dimostrazione (3). Se \mathcal{G}_{x_b} è nella stessa orbita Γ_j di \mathcal{G}_{y_j} allora $|\mathcal{G}_{x_b}| = |\mathcal{G}_{y_j}|$. Per (6.11), ci sono 2^{2r-d} gruppi \mathcal{G}_{x_b} in Γ_j cosicché $\sum_{(\mathcal{G}_{x_b} \in \Gamma_j)} |\mathcal{G}_{x_b}| = 2^{2r-d} |\mathcal{G}_{y_j}|$. Per (2),

$$|\mathcal{G}_{\pi_k}| = \left[\sum_{a=0}^{q-1} |\mathcal{G}_{x_a}| \right] - q + |Z(\mathcal{G})|. \quad \text{Quindi,}$$

$$|\mathcal{G}_{\pi_k}| = 2^{2r-d} \cdot \sum_{j=1}^{2^{d-r}} 2^{b_j - q} + |Z(\mathcal{G})|.$$

Sia $Z(\mathcal{G}) = 2^c \leq 2^r$ (da (6.4)) per $q = 2^r$.

Abbiamo,

(6.13) Lemma.

$$2^d + q = 2^{2r-d} \cdot \sum_{j=1}^{2^{d-r}} 2^{b_j} + 2^c \text{ dove } b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{2^{d-r}}.$$

Anche,

(6.14) Lemma.

$$2^d = |\mathcal{G}_{\pi_k}| \leq q \cdot 2^{b_1}.$$

Dimostrazione. $|\mathcal{G}_{\pi_k}| = (\text{lunghezza della } \mathcal{G}_{\pi_k}\text{-orbita di } x_k \in \pi_k \cap \mathcal{L}_\infty - \{(\infty)\}) \cdot |(\mathcal{G}_{\pi_k})_{x_k}|$.

Ma, \mathcal{G}_{x_k} è di Baer e fissa π_k perché tutti gli elementi

di Baer sono in \mathcal{G}_{π_k} (si veda Dim. (6.7)). Allora, $\mathcal{G}_{x_k} \subseteq \mathcal{G}_{\pi_k}$ cosicch  $(\mathcal{G}_{\pi_k})_{x_k} = \mathcal{G}_{x_k, \pi_k} = \mathcal{G}_{x_k}$. Quindi, $|\mathcal{G}_{\pi_k}| \leq 2^r \cdot |\mathcal{G}_{x_k}| \leq 2^r \cdot 2^{b_1} = q \cdot 2^{b_1}$. Da (6.13) e (6.14) abbiamo

$$2^{d+q} = 2^{2r-d} \sum_{j=1}^{2^{d-r}} 2^{b_j} + 2^c$$

dove $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_q$ e $2^d \leq q \cdot 2^{b_1}$ cosicch  $d \leq r + b_1$. Sia $2r-d + b_1 > c$. Allora

$$2^{d+2r} = 2^{2r-d+b_1} (1 + 2^{b_2-b_1} + \dots + 2^{b_{d-r}-b_1}) + 2^c.$$

Cosicch 

$$2^{d-c} + 2^{r-c} = 2^{2r-d+b_1-c} (1 + 2^{b_2-b_1} + \dots + 2^{b_{d-r}-b_1}) + 1.$$

Quindi (poich  $d > c$) $2^{r-c} = 1$ o $2^c = 2^r = q$. Sia $2r-d+b_1 \leq c$, $2r-(r+b_1) + b_1 \leq 2r-d+b_1$ (poich  $-(r+b_1) \leq -d$) $\leq c$. Quindi, $r \leq c$, il che implica $c = r$.

Abbiamo,

(6.15) Lemma.

$$|Z(\mathcal{G})| = 2^c = 2^r = q.$$

Per sezione IV (4.3)(2), ogni gruppo \mathcal{G}_{x_k} deve avere ordine 2 perch  $Z(\mathcal{G})$ e \mathcal{G}_{x_k} si normalizzano. (Nella equazione (6.13), $b_1 = b_2 = \dots = 1$, $2^c = 2^r$ cosicch 

$$2^{d+q} = 2^{2r-d} \cdot 2^{d-r} \cdot 2 + q \Leftrightarrow 2^d = 2^{r+1}.)$$

Quindi, la lunghezza dell'orbita è sempre $q^2/2$. Questo dà la dimostrazione di (6.1). Ora, consideriamo i piani π corrispondenti. Nota: Abbiamo adesso un piano di Baer-elazione di ordine q^2 e tipo $(2,q)$ perché dobbiamo avere

$$Z(\mathcal{G}) = \left\{ \left[\begin{array}{cc|cc} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \text{ dove } u \in K, m \text{ una funzione su } K \right\}.$$

Dunque, possiamo rappresentare le componenti di π nella forma: $x = 0, y = x \begin{bmatrix} u+v+m(v), & f(v)+m(u) \\ v & u \end{bmatrix}$ per tutti gli $u, v \in K$ (si veda (5.17)) per opportune funzioni $t, m : K \rightarrow K$ dove

- (1) f è uno-uno e
- (2) m è additiva e $m(0) = m(1) = 0$

Inoltre, abbiamo un gruppo \mathcal{G} di ordine 2^{2r} , $q = 2^r$ nel complemento lineare col centro $Z(\mathcal{G}) = \left\{ \left[\begin{array}{cc|cc} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \mid u \in K \right\}$

e un' involuzione di Baer $\tau = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. E chiaro ora

che \mathcal{G} può avere la forma $\begin{bmatrix} 1 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ per $a \in \lambda \subseteq K$.

$$(y = 0) \begin{bmatrix} 1 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow y = x \begin{bmatrix} b_1+ab_3, & b_2+ab_4 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}.$$

Quindi, $b_1 + ab_3 = u + v + m(v)$, $b_2 + ab_4 = f(v) + m(u)$, $b_3 = v$, e
 $b_4 = u$.

(6.16) Lemma.

Il gruppo \mathcal{G} può avere la forma:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 1 & a & u+v+m(v)+a(v) & au+f(v)+m(u) \\ 0 & 1 & v & u \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \left| v \in \Sigma \subseteq K \right.$$

dove $|\Sigma| = q/2$ e $u \in K$.

Dimostrazione. $Z(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}$ e $|(y=0)\mathcal{G}| = q^2/2$
 per (6.1), allora $|\{v\}| = q/2$ e $|\{u\}| = q$.

(6.17) Lemma.

Consideriamo, gli elementi

$$\begin{bmatrix} 1 & a & v+m(v)+av & f(v) \\ 0 & 1 & v & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ per } v \in \Sigma.$$

Per ogni $v \in \Sigma$, l'elemento (1,2)-della matrice può avere solo due valori a_1, a_2 e $a_2 = a_1 + 1$.

Dimostrazione.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & v+m(v)+a_1v & f(v) \\ 0 & 1 & v & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_2 & v+m(v)+a_2v & f(v) \\ 0 & 1 & v & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a_1+a_2 & a_2v & (v+m(v)+a_1v)a_2 \\ 0 & 1 & 0 & a_2v \\ 0 & 0 & 1 & a_1+a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sa, } \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & u & u+m(v) \\ 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ci sono esattamente q involuzioni di Baer in \mathcal{G} . Quindi, $a_1 + a_2 = 0$ o 1 . Anche,

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & v+m(v)+a_1v & f(v) \\ 0 & 1 & v & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & v & v+m(v) \\ 0 & 1 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a_1+1 & v+m(v)+a_1v & f(v) \\ 0 & 1 & v & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per ogni $v \in \Sigma$ ($|\Sigma| = q/2$), sia $T(v)$ uno degli elementi a_1, a_1+1 con T una funzione da $\Sigma \rightarrow K$.

(6.18) Lemma.

$$\text{Sia } \tau_b = \begin{bmatrix} 1 & T(b) & (b+m(b)+T(b)b) & f(b) \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T(b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ per } b \in \Sigma,$$

$$|\Sigma| = q/2.$$

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \sigma_u = \begin{bmatrix} I & u & m(u) \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

per $u \in K$. Allora, $\mathcal{G} = \langle \tau_b, \sigma_u, \tau \rangle$.

Dimostrazione.

$$\text{Sia } \tau_{b+1} = \begin{bmatrix} 1 & T(b)+1 & (b+m(b)+(T(b)+1)b) & f(b) \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T(b)+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

allora $\tau_b \tau \sigma_b = \tau_{b+1}$. Ora si usa (6.16).

(6.19) Lemma.

$$f(a+b) = f(a) + f(b) + m(aT(b)) + aT(b)^2 + T(b)(a+m(a))$$

per tutti gli $a \in K$ e per tutti i $b \in \Sigma$.

Dimostrazione.

$$\begin{bmatrix} 1 & T(b) & F(b) & f(b) \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T(b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & T(a) & F(a) & f(a) \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T(a) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per $F(x) = x+m(x)+xT(x)$ con $x \in \Sigma$.

$$= \begin{bmatrix} 1 & T(b)+T(a) & (F(a)+F(b)+aT(b), & (f(a)+F(b)T(a)+f(b)) \\ 0 & 1 & a+b & b(T(a) \\ 0 & 0 & 1 & T(b)+T(a) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T(b)+T(a) = T(b+a)$ o $T(b+a) + 1$ per ogni $(b,a) \in \Sigma \times \Sigma$.

Da (6.16),

$$(6.20) \quad F(a) + F(b) + aT(b) = bT(a) + (a+b) + m(a+b) \\ + (T(a)+T(b))(a+b)$$

e

$$(6.21) \quad f(a) + F(b)T(a) + f(b) = (T(b)+T(a))bT(a) \\ + f(a+b) + m(bT(a))$$

dove $F(x) = x + m(x) + xT(x)$, $x \in \Sigma$.

$$(6.21) \Rightarrow f(a) + (b+m(b)+bT(b))T(a) + f(b) \\ = (T(b)+T(a))bT(a) + f(a+b) + m(bT(a))$$

$$\Leftrightarrow f(a+b) = f(a) + f(b) + m(bT(a)) + bT(a)^2 + T(a)(b+m(b))$$

per $a, b \in \Sigma$.

Ora, consideriamo le componenti

$$\mathcal{L}_{u,v} \equiv \left[y = x \begin{bmatrix} u+v+m(v) & f(v)+m(u) \\ v & u \end{bmatrix} \right] \text{ per } v \in K-\Sigma.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0,v} &\xrightarrow{\tau_b} \left[x \begin{bmatrix} 1 & T(b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x \left[\begin{bmatrix} F(b) & f(b) \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v+m(v) & f(v) \\ v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & T(b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \right] \\ &= \left[x \begin{bmatrix} 1 & T(b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x \left[\begin{bmatrix} (F(b)+v+m(v)) & f(b)+(v+m(v)) \\ b+v & vT(b) \end{bmatrix} T(b)+f(v) \right] \right] \\ &\in \left[y = x \begin{bmatrix} (F(b)+v+T(b)(b+v) & (f(b)+(v+m(v))T(b)+f(v) \\ +m(v)) & +vT(b)^2 \\ b+v & vT(b) \end{bmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Questo elemento deve essere della forma

$$\left[y = x \begin{bmatrix} \bar{u}+\bar{v}+m(\bar{v}) & f(\bar{v})+m(\bar{u}) \\ \bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix} \right].$$

Quindi,

$$(6.22) \quad (F(b)+v+T(b)(b+v)+m(v)) = vT(b)+(b+v)+m(b+v)$$

$$(6.23) \quad f(b)+(v+m(v))T(b)+f(v)+vT(b)^2 = f((b+v)+m(vT(b)))$$

per $v \in K-\Sigma$ e $b \in \Sigma$. Da (6.23), (6.19) è provato.

(6.24) Teorema. *Fondamentale per l'orbita non-regolare.*

Sia π un piano di traslazione di ordine $q^2 = 2^{2r}$. Il

nucleo di π sia $K \cong GF(q)$ e supponiamo che π ammetta un gruppo non abeliano \mathcal{G} di collineazioni di ordine q^2 contenuto nel complemento lineare di traslazione. Infine, supponiamo che \mathcal{G} non abbia un'orbita regolare sulla retta all'infinito. Allora, esiste un sottogruppo additivo Σ di K di ordine $q/2$ ed esistono funzioni T su Σ e m, f su K tali che \mathcal{G} può essere rappresentato nella forma seguente:

$$\mathcal{G} = \langle \tau_b, \sigma_u, \tau \rangle \text{ dove } Z(\mathcal{G}) = \langle \sigma_u \rangle,$$

$$\tau_b = \begin{bmatrix} 1 & T(b) & b+m(b)+T(b)b & f(b) \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T(b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ per } b \in \Sigma,$$

$$\sigma_u = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ per } u \in K \text{ (cosicché } |Z(\mathcal{G})| = q).$$

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Inoltre,}$$

(0) Le componenti di π hanno la forma

$$x = 0,$$

$$y = x \begin{bmatrix} u+v+m(v) & f(v)+m(u) \\ v & u \end{bmatrix}$$

e π è un piano di Baer-elazione di ordine q^2 e tipo $(q,2)$.

(1) f è uno-uno.

(2) m è addittiva e $m(0) = m(1) = 0$.

VII. Piani di traslazione di ordine p^r che hanno un gruppo di collineazioni isomorfo a $SL(2, p^r)$ con r maggiore di $t/2$.

Circa nel 1964, Lüneburg [52] ha iniziato i suoi studi sui piani proiettivi di ordine p^r con gruppi di collineazioni isomorfi a $SL(2, p^r)$. Successivamente, Yaqub [64] ha eliminato alcune ipotesi aggiuntive che Lüneburg aveva fatto.

(7.1) Teorema (Lüneburg-Yaqub).

Sia π un piano proiettivo di ordine p^r che ammetta $SL(2, p^r)$ come gruppo di collineazioni. Allora π è Desarguesiano.

Prohaska [59] ha studiato i piani di traslazione π di ordine q^2 che hanno un gruppo di collineazioni isomorfo a $SL(2, q)$. Inoltre, ha assunto che π abbia nucleo $GF(q)$, q pari e che gli elementi di ordine 2 siano elazioni. Di nuovo, sotto queste ipotesi, i piani sono Desarguesiani.

Inoltre, Foulser, Johnson e Ostrom hanno esteso i risultati di Prohaska.

(7.2) Teorema (Foulser, Johnson, Ostrom [16]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 che abbia un gruppo di collineazioni isomorfo a $SL(2, q)$ nel complemento di traslazione e dove $q = p^r$. Se gli elementi di ordine p sono elazioni allora π è Desarguesiano.

(Si veda (5.19) per un'estensione di (7.2).)

(7.3) Esempi.

(1) I piani di Desargues e di Hall di ordine q^2 ammettono $SL(2,q)$ ove i p -elementi, $p = q^r$ sono elazioni o di Baer rispettivamente.

(2) I piani di Hering hanno ordine q^2 e ammettono $SL(2,q)$ ove i p -elementi, $q = p^r$, fissano un spazio vettoriale di dimensione uno mentre π è un spazio vettoriale di dimensione quattro. In questo caso, $SL(2,q)$ è irriducibile su π .

(3) I piani di Ott-Schaeffer (si veda [57], [60]) di ordine q^2 , q pari, sono simili a quelli di Hering. Anche loro ammettono $SL(2,q)$ ove il gruppo agisce irriducibilmente su π . Inoltre, questi piani sono derivabili.

Walker [63] (per q dispari) e Schaeffer [60] (per q pari) hanno studiato i piani di traslazione di ordine q^2 che ammettono il gruppo $SL(2,q)$ e che hanno nucleo $K \cong GF(q)$. Essi hanno provato il seguente teorema:

(7.4) Teorema (Walker-Schaeffer).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $GF(q)$. Se π ammette un gruppo isomorfo a $SL(2,q)$ allora π è Desarguesiano, Hall, Hering, Ott-Schaeffer o un piano di ordine 25 di Walker (ci sono due tali piani).

Si può osservare che nei piani di Ott-Schaeffer i 2-gruppi di Sylow di $SL(2,q)$ fissano esattamente q punti sulla retta. Senza l'ipotesi sul nucleo ho provato:

(7.5) Teorema (Johnson [40]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 , q pari. Sia \mathcal{G} isomorfo a $SL(2,q)$ un gruppo nel complemento di traslazione i cui elementi di ordine 2 siano di Baer e i cui 2-sottogruppi di Sylow fissino sottorette di Baer (q punti sulla retta). Allora, π è un piano di Ott-Schaeffer.

Ho anche studiato i piani di traslazione di ordine 16 che hanno $SL(2,4)$ nel complemento di traslazione. In questo caso esiste un piano eccezionale: il piano di Dempwolff.

(7.6) Teorema (Johnson [42]).

Esistono esattamente i seguenti piani di traslazione di ordine 16 che ammettono $SL(2,4)$ nel complemento di traslazione: Desargues, Hall o Dempwolff.

Foulser ed io abbiamo studiato i piani di traslazione di ordine q^2 che ammettono $SL(2,q)$ senza alcune ipotesi sul nucleo, estendendo in tal modo, il risultato di Walker e Schaeffer.

(7.7) Teorema (Foulser, Johnson [14], [15]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 che ammetta $SL(2,q)$ o $PSL(2,q)$ nel complemento di traslazione. Allora, π è un piano di Desargues, Hall, Hering, Ott-Schaeffer, Walker di ordine 25 o Dempwolff di ordine 16.

Per lo studio di cui sopra è necessario usare la teoria della rappresentazione dei gruppi.

Recentemente, ho iniziato a studiare piani di traslazione di ordine p^t che ammettono gruppi nel complemento che sono isomorfi a $SL(2,p^r)$ ove $p^r \geq p^t/2$. Quando ho iniziato questo studio, ho pensato che probabilmente si doveva usare la teoria della rappresentazione. Però, ho trovato un'argomentazione abbastanza semplice per provare che tali piani sono solo quelli elencati in (7.7)

Vorrei dare una traccia di questo risultato.

(7.8) Teorema (Johnson [39]).

Sia π un piano di traslazione di ordine p^t che ammetta un gruppo \mathcal{G} isomorfo a $SL(2,p^r > p^t/2)$ nel complemento di traslazione. Allora, $r = t$ e π è Desarguesiano.

Dimostrazione. Per i risultati di Lüneburg-Yaqub, possiamo supporre che $t > r > t/2$. Sia $F \cong GF(p)$.

Della teoria della rappresentazione si usa soltanto il seguente risultato.

(7.9) Lemma (Foulser-Johnson [14]).

Un $F\mathcal{G}$ -modulo che non sia riducibile ha dimensione $\geq 2r$.

(7.10) Lemma.

\mathcal{G} non fissa né punti né rette.

Dimostrazione. Se \mathcal{G} fissa un punto, allora \mathcal{G} fissa una componente OP dove O è il vettore zero.

Possiamo assumere che \mathcal{G} fissi la componente \mathcal{L} . π è uno spazio vettoriale di dimensione $2t$ su F , pertanto la dimensione di \mathcal{L} è t . D'altra parte $t/2$ è minore di r , perciò \mathcal{G} deve fissare ogni punto di \mathcal{L} . Ma allora gli elementi di ordine p sono elazioni le quali generano \mathcal{G} . Questo non è compatibile con il risultato di Hering e Ostrom (si veda [[19], [55]]).

(7.11) Lemma.

$p^{2r}-1$ ha un divisore p -primitivo.

Dimostrazione. Se ciò non è vero, allora per Zsigmondy [65], si ha una delle due seguenti possibilità: $r = 1$ o $p = 2$ e $r = 3$. Nel primo caso è $t/2 < 1$. Si ha una contraddizione a meno che non sia $t = 1$, ma, in questo caso, $r \nmid t$. Quindi, $t = 4$ o $t = 5$ e questi casi possono essere trattati con argomenti elementari.

(7.12) Lemma.

I p -sottogruppi si indichino con \mathcal{G}_i , $i = 1, 2, \dots, p^r + 1$.
Le componenti che non hanno intersezione identica con $\text{Fix}(\mathcal{G}_i)$
si indichino con Λ_i . Allora, $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \phi$ per $i \neq j$.

Dimostrazione. Se $\mathcal{L} \in \Lambda_i \cap \Lambda_j$ allora $\langle \mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j \rangle = \mathcal{G}$ deve
fissare \mathcal{L} , il che è contro il Lemma (7.10).

(7.13) Lemma.

(i) Se $\text{Fix}(\mathcal{G}_i)$ è contenuto in una componente \mathcal{L}_i , allora
 \mathcal{G} fissa una collezione di $p^t - p^r$ componenti.

(ii) Se $\text{Fix}(\mathcal{G}_i)$ è un sottopiano di ordine p^{s_i} , allora
 $s_i = s_j = s$ e \mathcal{G} fissa una collezione di $p^{t+1} - (1+p^r)(1+p^s)$
componenti.

Dimostrazione. Ci sono $1+p^r$ p -sottogruppi di Sylow e
 $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \phi$ per il lemma (7.12).

Se $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_j^g$, $g \in \mathcal{G}$, allora $\text{Fix}(\mathcal{G}_j)g = \text{Fix}(\mathcal{G}_i)$. Quindi,
 $|\Lambda_j| = |\Lambda_i|$. (i) e (ii) sono ora facili da provare.

(7.14) Lemma.

Ogni elemento $g \in \mathcal{G}$, dove $|g|$ è un divisore
 p -primitivo di $p^{2r} - 1$, fissa almeno due componenti di π .

Dimostrazione. Se g non fissa una componente allora per il
lemma (7.13), (i), $|g| \mid p^t - p^r$ o (ii), $|g| \mid p^t - (p^r + p^s + p^{r+s})$.

Nel caso (i), $p^t - p^r = p^r(p^{t-r} - 1)$ e se $|g| \mid p^r(p^{t-r} - 1)$ allora $|g| \mid p^{t-r} - 1$. Ma $|g| \mid p^{2r} - 1$, quindi $|g| \mid p^{(2r, t-r)} - 1$. Inoltre, $t/2 < r < t$ cosicché $t-r < r$. Sia $d = (t-r), 2r$, allora $|g| \mid p^d - 1$ il che è una contraddizione.

Il caso (ii) è simile e lo lasciamo al lettore.

Pertanto, g deve fissare almeno due componenti.

(7.15) Lemma.

Le componenti che sono fissate dagli elementi di ordine un divisore p -primitivo sono distinte.

Dimostrazione. Due qualsiasi elementi devono generare \mathcal{G} . Quindi, se una componente \mathcal{L} è fissata da due elementi, allora \mathcal{L} è fissata da \mathcal{G} , il che è una contraddizione per il lemma 2.

Ci sono $\frac{1}{2} p^r(p^r - 1)$ sottogruppi di ordine $p^r + 1$ e ogni gruppo ha un elemento che fissa almeno due componenti distinte di π . Queste componenti sono nelle collezioni di ordine $p^t - p^r$ o in quelle di ordine $p^t - (p^r + p^s + p^{r+s})$. Quindi, $p^r(p^r - 1) \leq p^t - p^r = p^r(p^{t-r} - 1)$. Pertanto, $r = t - r$, ma $t - r < r$, si ha quindi una contraddizione.

Ciò prova il teorema.

VIII. Piani di traslazione di ordine q^2 , q pari, che hanno 2-sottogruppi di Baer di ordine maggiore di $q^{1/2}$.

Sia π un piano di traslazione di ordine $p^{2r} = q^2$, $q = p^r$, p un primo. Supponiamo che π abbia collineazioni di Baer di ordine p (nel complemento di traslazione).

Foulser [12] ha studiato questa situazione quando $p > 2$.

(8.1) Teorema (Foulser).

Sia B il gruppo che è generato dai p -elementi di Baer nel complemento di traslazione di un piano finito di traslazione π . Allora, per B si hanno le seguenti possibilità:

(1) B è abeliano elementare.

(2) B è isomorfo a $SL(2, p^r)$ dove l'ordine di π è p^s e $r | s$.

3) B è isomorfo a $SL(2, 5)$ e $p = 3$.

Inoltre, se $p > 3$, tutti i sottopiani di Baer (corrispondenti) sono sulla stessa rete \mathcal{D} di ordine $p^{s/2+1}$ e non si incrociano. Se $p = 3$ e se c'è un p -gruppo di Baer di ordine ≥ 9 i sottopiani di Baer sono sulla stessa rete \mathcal{D} di ordine $p^{r/2+1}$ e non si incrociano.

Se $p = 2$, la situazione è differente. Per esempio, ci sono due piani di traslazione di ordine 16 che ammettono $PSL(2, 7)$ dove le involuzioni sono di Baer (i piani di Lorimer-

Rahilly e Johnson-Walker (si veda [43])). Inoltre, il piano di ordine 16 di Dempwolff (si veda anche [43]) ammette $SL(2,4)$ e i sottopiani di Baer che sono fissati da involuzioni non sono sulla stessa rete di ordine $4+1$.

Eppure, per dimensione 2,

(8.2) Teorema (Johnson, Ostrom [48]). ^{di ordine}

Sia π un piano di traslazione $\vee q^2 = 2^{2r}$ con nucleo $K \cong GF(q)$. Sia \mathcal{G} un gruppo di collineazioni nel complemento lineare e supponiamo che tutte le involuzioni siano di Baer. Se \mathcal{G} non è risolubile allora c'è un sottogruppo di \mathcal{G} che è isomorfo a $SL(2,2^s)$, $s|r$. Inoltre, se \mathcal{G} è riducibile allora ogni 2-sottogruppo di Sylow fissa un sottopiano di Baer (cioè, fissa ogni punto) e tutti i sottopiani di Baer sono sulla stessa rete \mathcal{D} di ordine 2^r+1 e inoltre \mathcal{D} è derivabile.

Recentemente, Dempwolff [9], 1982, ha studiato il problema di determinare i gruppi che sono generati da grandi 2-gruppi di Baer.

Cioè, sia \mathcal{G} un sottogruppo nel complemento di traslazione di un piano di traslazione π di ordine pari $q^2 = 2^n$. Diciamo che un B-gruppo in \mathcal{G} è un qualunque 2-gruppo E dove $|E| > \sqrt{q}$ e $\text{Fix}(E)$ è un sottopiano di Baer. Allora, sia Σ il sistema dei B-gruppi in \mathcal{G} con ordine massimo. Sia $\mathcal{G}^* = \langle \Sigma \rangle$.

Dempwolff [9] ha provato il seguente teorema:

(8.3) Teorema (Dempwolff).

Assumiamo che $\mathcal{G}^* \neq \langle 1 \rangle$. Sia N il sottogruppo generato dalle elazioni. Allora, abbiamo l'uno o l'altro, se $n \geq 4$.

(i) $n = 4$, $\mathcal{G}^* \cong \text{SL}(3,2)$ e π deve essere uno dei piani di Lorimer-Rahilly o Johnson-Walker di ordine 16.

(ii) $N \subseteq Z(\mathcal{G}^*)$ e quindi N deve essere un gruppo di elazioni con asse singolo \mathcal{L} . Inoltre, sia $\overline{\mathcal{G}^*} = \mathcal{G}^*/N$. Allora, per $\overline{\mathcal{G}^*}$ abbiamo una delle seguenti possibilità:

(a) $\overline{\mathcal{G}^*} \cong \text{SL}(2,2^s)$ per $2^s \geq |E|$ (E è un 2-gruppo di Baer di ordine massimo).

(b) $\overline{\mathcal{G}^*}$ è un gruppo abeliano elementare.

(c) $\overline{\mathcal{G}^*} \geq \overline{M}$ dove \overline{M} è un sottogruppo normale e abeliano elementare di ordine q e $\overline{\mathcal{G}^*}/\overline{M} \cong D_{2r}$ per r dispari. Se $N = \langle 1 \rangle$ allora \mathcal{G}^* centralizza un sottopiano di ordine \sqrt{q} e se $N \neq \langle 1 \rangle$ allora \mathcal{G}^* centralizza una sottoretta di \sqrt{q} punti.

(8.4) Definizione.

Sia π un piano di traslazione di ordine pari. Se π ammette un gruppo \mathcal{G}^* come in (8.3), diciamo che \mathcal{G}^* un gruppo di Dempwolff.

Possiamo provare:

(8.5) Teorema (Jha, Johnson [28]).

Sia π un piano di traslazione di ordine pari che ammetta un gruppo \mathcal{G}^* di Dempwolff. (a) Se \mathcal{G}^* non è risolubile allora π è un piano di Hall o un piano di ordine 16 (Lorimer-Rahilly, Johnson-Walker o Dempwolff). (b) Se \mathcal{G}^* è risolubile e contiene un B-gruppo di ordine $\neq \sqrt{2q}$ allora \mathcal{G}^* è un B-gruppo abeliano elementare.

Dimostrazione. Per questo teorema, si usa (4.3)(1). Se c'è un 2-gruppo \mathcal{B} di Baer tale che $|\mathcal{B}| \geq 2\sqrt{q}$ allora ogni gruppo di elazioni \mathcal{E} ha ordine minore o eguale a 2.

Qui, daremo solo una traccia e solo per il caso (a) e per l'ordine > 16 . Allora, per (8.3)(ii) si deve avere $N \subseteq Z(\mathcal{G}^*)$ e $\mathcal{G}^*/N \cong \text{SL}(2, 2^s)$ per $2^s \geq |E|$ dove E è un 2-gruppo di Baer di ordine massimo e $|E| > \sqrt{q}$.

(8.6) Lemma.

$$\mathcal{G}^* = N \cdot J \quad \text{ove} \quad J \cong \text{SL}(2, 2^s) \quad \text{e} \quad 2^s \geq |E| > \sqrt{q}.$$

Dimostrazione. Si usa la teoria dei moltiplicatori di Schur (si veda [28] sezione 4 (result 1)) perché $N \subseteq Z(\mathcal{G}^*)$ e N è abeliano. Sia $(\mathcal{G}^*)'$ il sottogruppo derivato di \mathcal{G}^* . Allora, $(\mathcal{G}^*) \cap N = \langle 1 \rangle$. Allora, $\mathcal{G}^* = (\mathcal{G}^*)' \cdot N$ e $(\mathcal{G}^*)' \cong \text{SL}(2, 2^s)$.

(8.7) Lemma.

Ogni 2-sottogruppo di Sylow \mathcal{S} di J è un B-gruppo.

Dimostrazione Supponiamo che ciò sia falso. Allora, ci sono due B-gruppi in \mathcal{G} . Cioè, \mathcal{G} è abeliano elementare e contiene un B-gruppo E . Se $\sigma \in \mathcal{G}-E$ allora $\text{Fix}(\sigma)$ è un sottopiano di Baer. Ogni due involuzioni in \mathcal{G} si coniugano in J . Sia $\tau \in E$ tale che ci sia $h \in J$ con $\tau^h = \sigma$ e $h \in N_J(\mathcal{G})$.

Allora E^h fissa ogni punto di $\text{Fix}(\sigma)$. Ma, $E^h \cap E = \langle 1 \rangle$ perché E fissa ogni punto di un qualche sottopiano π_0 e $\pi_0 \neq \text{Fix}(\sigma)$ se $|E|$ è massimo.

Quindi, $|\mathcal{G}| \geq |E|^2 > (\sqrt{q})^2 = q$. Questo è una contraddizione per (7.8) perché se π è Desarguesiano allora π non ha gruppi di Baer di ordine > 2 .

(8.8) Lemma.

Se i sottopiani di Baer in Σ (si veda (8.3)) non si incrociano, allora sono sulla stessa rete \mathcal{N} di ordine 2^r+1 . Allora, J fissa tutte le componenti di \mathcal{N} .

Dimostrazione. (Si veda Foulser-Johnson [15].)

(8.9) Lemma.

J deve fissare una componente.

Dimostrazione. Per (8.8), si può assumere che i sottopiani di Baer si incrocino. Ma, J è generato da due 2-gruppi di Sylow e per (8.7), ogni 2-sottogruppo di Sylow è un B-gruppo

Allora, J deve fissare una componente \mathcal{L} .

(8.10) Lemma.

Sia $U \subseteq J$ di ordine $2^s - 1$. Siano B_1, B_2 due 2-gruppi di Sylow che sono normalizzati da U . Per ogni gruppo B_i , c'è un sottopiano π_i di Baer tale che ogni punto di π_i è fissato da B_i . Inoltre, U agisce fedelmente su π_i , $i = 1, 2$.

Dimostrazione. Sia $g \in U$ un elemento che fissa ogni punto di π_1 . Allora, per un qualche elemento h , g^h fissa ogni punto di π_2 e quindi fissa π_2 . È chiaro che anche g^h è in U . Ma, $|\langle g \rangle| = |\langle g^h \rangle|$ e U è un gruppo ciclico. Quindi, $\langle g \rangle = \langle g^h \rangle$ cosicché $g = 1$ ($\pi_1 \neq \pi_2$).

(8.11) Lemma.

U fissa due componenti di π_i , $i = 1, 2$.

Dimostrazione. π_i è Desarguesiano per Foulser [13] perché $|B_i| > \sqrt{q}$ e l'ordine di B_i è l'ordine del nucleo di π_i . U fissa \mathcal{L} cosicché deve fissare anche un'altra componente \mathcal{M} di π_i perché $U \subseteq GL(2, q)$ per (8.10).

(8.12) Lemma.

$J \cong SL(2, 2^b)$.

Dimostrazione. Se ciò non è vero, c'è un elemento $g \in U$

tale che $|g| = u$ è un divisore p -primitivo di $2^s - 1$ dove $\sqrt{q} < 2^s < q$. Cioè, $2^s < q$ perché se $2^s \geq q$ si può usare (7.7) e (7.8) per mostrare che π è Desarguesiano. Ma, in questo caso $|B\text{-gruppo}| \leq 2$.

U permuta i punti su $\mathcal{L} \cap \pi_i$ per $i = 1, 2$ e $|\mathcal{L} \cap \pi_i - \{0\}| = 2^r - 1$. Se $u | 2^r - 1$ allora, $u | 2^{(s,r)} - 1$ il che implica $(s,r) = s$. Ma, $s > r/2$ perché $\sqrt{q} < 2^s$ cosicché abbiamo una contraddizione.

Quindi, un elemento g di ordine u fissa alcuni punti $\neq 0$ su \mathcal{L} e anche su \mathcal{M} di π_i . π_i è Desarguesiano cosicché $\hat{g} = g|_{\mathcal{L}} \in \text{Aut}(\text{GF}(2^r))$. Quindi, $u = |\hat{g}| |r$. Sia \mathcal{M}_g un complemento di Maschke di $\text{Fix}(\hat{g})$ in $\text{GF}(2^r)$ e $|\mathcal{M}_g| = 2^t$. \hat{g} agisce regolarmente su $\text{GF}(2^r) - \{0\}$ cosicché $u | 2^t - 1$. Ora, non è possibile che $s > t$ e $u | 2^{(s,t)} - 1$ cosicché $(s,t) \geq s$. Allora, $s | t$, ossia $sk = t$. Ma, $r > t = sk \geq s > r/2$ cosicché $2s > r > t = sk$. Quindi $h = 1$ e $s = t = \dim(\mathcal{M}_g)$ su $\text{GF}(2)$.

Ora, $s = r - 1$. Cioè, sia $\hat{h} \in \text{Aut}(\text{GF}(2^r))$ dove $|\hat{h}| = r/u = v$. Supponiamo $v \neq 1$. Allora, $\text{Fix}(\hat{h})$ è un \hat{g} -modulo e

$$\text{Fix}(\hat{h}) = (\text{Fix}(\hat{h})) \cap (\text{Fix}(\hat{g})) \oplus M_1$$

dove M_1 è un complemento di Maschke di $\text{Fix}(\hat{g})$ su $\text{Fix}(\hat{h})$.

\hat{g} deve fissare $\text{Fix}(\hat{h})$ e M_1 allora permuta i punti di $M_1 - \{0\}$ semiregolarmente. Questo implica che $u | (|M_1| - 1, 2^s - 1)$

cosicché $|M_1| \geq 2^s > 2^{r/2}$, il che non è possibile se $\text{Fix}(\hat{h}) \neq \langle 1 \rangle$ a meno che $|M_1| = 1$ e $\text{Fix}(\hat{h}) \subseteq \text{Fix}(\hat{g})$. In questo caso, $|\hat{h}| = r/u$, quindi, $\text{Fix}(\hat{h}) = \text{GF}(2^u)$ e $\text{Fix}(\hat{g}) = \text{GF}(2^{r-s})$ (perché $\text{GF}(2^r) = \text{Fix } \hat{g} \oplus M_g$, $\dim M_g = s$, e $\text{Fix } \hat{g}$ è un sottocampo di $\text{GF}(2^r)$). Eppure, $u|r-s$ e $u|r$ cosicché $u|s$.

Ma inoltre $s = r-1$ e $(r, r-1) \neq 1$. Allora, $\text{Fix}(\hat{h}) = \langle 1 \rangle$ e $u = r$, $s = r-1$, $|g| = r$.

Quindi, $g|\pi_i$ fissa un sottopiano $\pi_{0,i}$ di ordine 2 cosicché U deve fissare $\pi_{0,i}$ per $i = 1, 2$. Perciò, U fissa ogni punto di $\pi_{0,i}$.

Allora U è isomorfo a un sottogruppo di automorfismi di $\text{GF}(2^r)$ cosicché $|U| = 2^s - 1 |r = s+1$, il che implica $2 \geq s > \sqrt{q}$ — una contraddizione. Per finire la dimostrazione si deve studiare il gruppo $\text{SL}(2, 2^b)$. Per questo si veda [28].

Questo teorema (8.5(a)) è vero anche per piani di ordine dispari:

(8.13) Teorema (Jha, Johnson [29]).

Sia π un piano di traslazione di ordine p^{2r} , p dispari. Supponiamo che ci siano due p -gruppi \mathfrak{B}_i , $i = 1, 2$ di ordine uguale o maggiore di $p^{r/2}$ ($|\mathfrak{B}_1| = |\mathfrak{B}_2| > p^{r/2}$) e ogni gruppo \mathfrak{B}_i fissi un sottopiano di Baer π_i , $i = 1, 2$. Allora, π è un piano di Hall e $\langle \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \rangle \cong \text{SL}(2, p^r)$.

IX. Fibrizioni di $PG(3, 2^s)$ che hanno gruppi di proiettività di ordine 2^s .

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e con nucleo $K \cong GF(q)$. Abbiamo studiato nelle sezioni II e VI piani di questo tipo che ammettono gruppi \mathcal{G} di ordine q^2 contenuti nel complemento lineare. Qui, studiamo piani con gruppi \mathcal{F} di ordine $q^2 \cdot t$ dove t è un divisore di $q-1$ o anche t è un divisore p -primitivo di $q-1$.

Recentemente, Bartolone ha studiato piani di traslazione di ordine q^2 dove $|\mathcal{F}| = q^2(q-1)$ e \mathcal{F} agisce in modo particolare.

(9.1) Teorema (Bartolone [3]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 col nucleo $K \cong GF(q)$. Sia \mathcal{F} un gruppo di collineazioni nel complemento di traslazione di ordine $q^2(q-1)$ dove

(1) c'è un sottogruppo \mathcal{G} di ordine q^2 che ha un'orbita di componenti di ordine q^2 ,

(2) $\mathcal{G} \triangleleft K$, $K = \mathcal{G}N$ dove $|N| = q-1$,

(3) c'è un sottogruppo $\bar{\mathcal{G}} < \mathcal{G}N$ dove $\bar{\mathcal{G}}$ è un gruppo di Frobenius con complemento N .

Allora, π è un piano di Lüneburg o di Betten-Walker.

Recentemente, ispirati dal teorema di Bartolone e dal lavoro di Kantor [51], molti risultati sono stati ottenuti

quando $q^2 \mid |\mathcal{F}|$ (sopra).

Per esempio, Johnson, Wilke [50] hanno esteso il lavoro di Kantor e Biliotti, Menichetti hanno fatto una classificazione quando q è pari.

Jha ed io abbiamo eliminato una delle ipotesi di Biliotti e Menichetti.

Combinando questi risultati:

(9.2) Teorema.

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong \text{GF}(q)$. Sia q pari e \mathcal{G} sia un gruppo di ordine q^2 nel complemento lineare di traslazione. Supponiamo che il sottogruppo E di \mathcal{G} delle elazioni abbia ordine q . Allora π è un piano di Lüneburg-Tits, Betten o il piano unico di ordine 64 di Biliotti-Menichetti.

Inoltre, Jha, Johnson e Wilke [38] hanno esteso il teorema di Bartolone. Ma, in questo caso è necessario avere un gruppo nel complemento lineare, mentre Bartolone non ha usato questa ipotesi.

(9.3) Teorema (Jha, Johnson, Wilke [38]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong \text{GF}(q)$, che ammetta un gruppo \mathcal{F} nel complemento lineare di traslazione dove $|\mathcal{F}K/K| = q^2(q-1)$. Allora, π è un piano di Lüneburg-Tits, Betten o Walker o π è un piano su un semi-campo.

Questo risultato è quello di Biliotti-Menichetti usano naturalmente molti argomenti sui campi finiti e sulle funzioni sui campi finiti.

Usando (9.2), si può estendere (9.3) supponendo soltanto che q sia pari e $|\mathcal{F}K/K| = q^2 \cdot t$ dove t è un divisore 2-primitivo di $q-1$.

Vorrei dare una traccia di questo teorema.

(9.4) Teorema (Jha, Johnson [22]).

Sia \mathcal{Y} una fibrazione in $PG(3,q)$, q pari e sia \mathcal{F} il gruppo di proiettività che fissa \mathcal{Y} . Supponiamo che u sia un divisore 2-primitivo di $q-1$. Se $uq^2 \mid |\mathcal{F}|$ allora, \mathcal{Y} è una fibrazione per un piano su un semicorpo, di Lüneburg-Tits o di Betten.

Dimostrazione.

Innanzitutto si vede che nel piano di ordine 64 di Biliotti-Menichetti non c'è un gruppo \mathcal{F} di proiettività di ordine > 64 .

(9.5) Lemma.

Ogni 2-sottogruppo \mathcal{G} di Sylow fissa esattamente una componente \mathcal{L} e $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} = \text{Fix } \mathcal{G}$ ha dimensione uno dove $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{L}$.

Dimostrazione. C'è un sottogruppo $E \triangleleft \mathcal{G}$ di elazioni di asse \mathcal{L} e $|E| \geq q$.

Se $|E| = q$ possiamo usare (9.2), allora supponiamo che $|E| > q$.

(9.6) Lemma.

Se π non è un piano di Desargues o Lüneburg-Tits allora \mathcal{F} fissa \mathcal{L} per (9.5).

Dimostrazione. Se \mathcal{G} non fissa \mathcal{L} allora ci sono molti assi di elazione. Allora per Hering [19], Ostrom [55], e Johnson [44], abbiamo un gruppo generato dalle elazioni che è isomorfo a $SL(2, > q)$ o $S_Z(> q)$. I teoremi di Johnson (si veda (7.8)), di Walker-Schaeffer (7.4), e di Hering [20] (su $S_Z(2^s)$) ^{che} mostrano il piano è di Desargues o di Lüneburg-Tits.

(9.7) Lemma. C'è un elemento $g \in \mathcal{F}$ tale che $u = |g|$ è un divisore 2-primitivo, $g|_{\mathcal{L}_\infty} \neq 1$ e $g(\mathcal{L}_g) = \mathcal{L}_g$.

Dimostrazione. Se $g(\mathcal{L}_g) \neq \mathcal{L}_g$ allora $\langle g, \mathcal{G} \rangle |_{\mathcal{L}} \cong SL(2, 2^t)$ per $t|r$, $q = 2^r$. Ma, $|g| = u|(2^t+1)$ cosicché $u|2^{2t}-1$. Quindi, $u|2^{(2t,r)}-1$ e $(2t,r) = r$ perché u è 2-primitivo.

Perciò, $\langle g, \mathcal{G} \rangle |_{\mathcal{L}} \cong SL(2, q)$ o $SL(2, \sqrt{q})$ sull'asse \mathcal{L} . Allora, $\langle g, \mathcal{G} \rangle / \hat{E} \cong SL(2, q)$ o $SL(2, \sqrt{q})$.

Se c'è un'omologia $h \in \langle g, \mathcal{G} \rangle = H$ allora per André [1], c'è un'orbita Γ su \mathcal{L}_∞ di E (il sottogruppo delle elazioni) che è fissata da H . Se $P \in \Gamma$ allora $H = EH_P$.

Se non c'è un'omologia, allora H agisce sulle $q^2/|E|$ orbite di E sulla retta all'infinito Ω_∞ . Per quanto sopra, un 2-sottogruppo di Sylow \mathcal{S} è contenuto in H cosicché $|\mathcal{S}|_2 = q^2 = q^\alpha |E|$ ove $\alpha = 1$ o $\frac{1}{2}$. Allora, ci sono q^α orbite di E su $\Omega_\infty - \mathcal{L}$ che sono permutate da $H/E \cong \text{SL}(2, q^\alpha)$. Ma, in questo caso, $\text{SL}(2, q^\alpha)$ deve fissare ogni orbita. Di nuovo, $H = EH_P$ per $P \in \Omega_\infty - \mathcal{L}$.

H_P non è risolubile cosicché per un risultato di Johnson-Wilke [38](1.2), H_P non contiene omologie. Quindi, $H_P \cong \text{SL}(2, q^\alpha)$ per $\alpha = 1$ o $\frac{1}{2}$. Ma inoltre [38](1.2) implica che π sia derivabile e E debba fissare un rete derivabile che è fissata da H_P . Allora, $|E| < q$ perché ci sono 2-gruppi di Baer \mathcal{B} cosicché $|\mathcal{B}| = q^\alpha > 2$ per $q > 4$. Ma, $|E| = q^{2-\alpha} \geq q$ e abbiamo una contraddizione.

(9.8) Lemma.

C'è un sottogruppo $M \supseteq \mathcal{S}$ con $|M| = u^\alpha |\mathcal{S}|$, $\alpha \geq 1$ e $M|_{\mathcal{L}_g} = \langle 1 \rangle$.

Dimostrazione. Sia U il gruppo delle omologie del nucleo. Sia g un elemento di (9.7). Allora, $\langle g, U \rangle$ fissa \mathcal{L}_g e non agisce fedelmente.

(9.9) Lemma.

g centralizza un qualche elemento di E .

Dimostrazione. E è un spazio vettoriale su $GF(2)$ e g normalizza $E \rightarrow g \in GL(E)$.

Sia $W \subseteq E$ un modulo irriducibile di $\langle g \rangle$. Se $g|W \neq 1$, allora $u = |g| |W - \langle 1 \rangle$, il che implica $|W| = g^m$ per un intero $m \geq 1$. Ma, $q^2 \geq |E| > q$ cosicché $m = 1$ perché se $q^2 = |E|$ allora il piano è un piano su un semi-corpo. Per il teorema di Maschke, $E = W \oplus C$ dove C è un complemento di W . Per quanto sopra, c'è un solo modulo irriducibile. Quindi, $g|W = 1$.

(9.10) Lemma.

Con la notazione di (9.8), M non ha un'omologia.

Dimostrazione. Se ciò non è vero e P è centro di un'omologia (o, anche, OP asse di un'omologia), allora $M = EM_P$ per André [1].

Sia $g \in M_P$ elemento di (9.9) un'omologia. Allora, g centralizza un'elazione f ma questo non è possibile perché f dovrebbe fissare P in questo caso.

(9.11) Lemma.

Un 2-gruppo di Sylow \mathcal{G} è normale in M .

Dimostrazione. Siano σ_i , $i = 1, 2$, elementi di M di ordine 2^i , $i = 1, 2$. σ_1, σ_2 fissa ogni punto di $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ e $\sigma_i | \mathcal{L}$ può

essere rappresentato nella forma $\begin{bmatrix} I & A_i \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Allora, $\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} A_1+A_2 \\ I \end{bmatrix} = (\sigma_1\sigma_2|\mathcal{L})$ è anch'essa un'involuzione. Quindi,
 $(\sigma_1\sigma_2)^2$ deve fissare ogni elemento di \mathcal{L} . Ma, per (9.10),
 $(\sigma_1\sigma_2)^2 \in E$ e $|\sigma_1\sigma_2| \mid 4$.

(9.12) Lemma.

Ogni u -elemento di M permuta \mathcal{G} -E. semiregolarmente.

Dimostrazione. Se $g \in M$ centralizza $h \in \mathcal{G}$ -E, allora, h
 deve fissare \mathcal{L}_g e permutare i g -complementi di Maschke di \mathcal{L}_g
 in \mathcal{L} . Se h fissa un complemento allora h dovrebbe
 fissare $> q$ punti di \mathcal{L} . Ma, $h \in GL(4, q)$ cosicché h
 dovrebbe essere un'elazione.

Quindi, ci sono almeno due complementi e g deve fissare
 almeno tre sottospazi di dimensione uno di \mathcal{L} .

Cioè, g è un'applicazione scalare su \mathcal{L} e $g|_{\mathcal{L}_g} = 1$
 cosicché g è un'omologia il che è una contraddizione per
 (9.10).

Ora possiamo finire la dimostrazione di (9.4). $u \mid |\mathcal{G}| - |E|$
 per (9.12) cosicché $u \mid q^2 - 2^e q$ per $e \geq 1$. Quindi, $u \mid (2^{r-e} - 1)$,
 il che implica $r - e \geq r$ — una contraddizione.

Allora, $|E| = q$ e possiamo applicare (9.2).

X. Piani di traslazione di ordine n con gruppi abeliani di collineazioni di ordine n .

Abbiamo visto alcuni argomenti interessanti per studiare piani di traslazione di ordine q^2 con nucleo $GF(q)$ che ammettono gruppi \mathcal{G} nel complemento lineare di traslazione di ordine q^2 .

In questa sezione, non facciamo ipotesi sul nucleo mentre supponiamo che \mathcal{G} sia abeliano.

(10.1) Teorema (Jha, Johnson [27]).

Sia π un piano di traslazione di ordine $n = p^r$. Sia ℓ_∞ la retta all'infinito. Sia \mathcal{G} un p -gruppo di collineazioni nel complemento di traslazione di ordine $\geq n$ che fissa (∞) su ℓ_∞ . Se \mathcal{G} è abeliano, allora $|\mathcal{G}| = n$ e \mathcal{G} è transitivo su $\ell_\infty - (\infty)$.

Per la dimostrazione, abbiamo bisogno del seguente teorema di Jha.

(10.2) Teorema (Jha [21]).

Sia π un piano di traslazione di ordine $n = p^r$ che ammetta un gruppo planare M ove $\text{Fix } M$ ha ordine $q = p^k$. Si scriva $n = q^t$. Allora

- (i) t è un intero e
- (ii) Se $q^{t-1} \mid |M|$ allora $n = q^t = 16$ o $n = q^2$, $t = 2$.

Dimostrazione. Supponiamo $n > 16$. Consideriamo i sottogruppi \mathcal{G}_P per $P \in \mathcal{L}_\infty - \{(\infty)\}$ e supponiamo che ognuno non sia banale.

Allora, \mathcal{G}_P è un gruppo planare perché \mathcal{G}_P fissa punti su $O(\infty)$ e su OP .

Sia $\pi_P = \text{Fix } \mathcal{G}_P$ e sia l'ordine di π_P $q = p^m$. \mathcal{G} è abeliano. Pertanto \mathcal{G} fissa π_P e permuta $\pi_P \cap \{\mathcal{L}_\infty - \{(\infty)\}\}$. Allora \mathcal{G} agisce su q punti cosicché $|\mathcal{G}|/|\mathcal{G}_P| \leq q$. Allora, $q^t/q \leq |\mathcal{G}_P|$. Per (10.2), $t = 2$ e \mathcal{G}_P è un p -gruppo di Baer. Per Foulser [12], $|\mathcal{G}_P| = q$ e \mathcal{G}_P è abeliano elementare. Inoltre, per (8.1)(3), possiamo assumere che $p = 2$.

Allora, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_P \mathcal{G}_Q$, $Q \in \mathcal{L}_\infty - \pi_P \cap \mathcal{L}_\infty$ è abeliano elementare di ordine 2^r .

Sia $g \in \mathcal{G}_P$ allora $g|\pi_Q$ è un'elazione o un 2-elemento di Baer (di π_Q). Se $g|\pi_Q$ è di Baer, allora $\pi_Q \cap \pi_P$ è un sottopiano di ordine $2^{r/4}$ che è fissato da \mathcal{G} e inoltre deve fissare ogni punto di $\pi_Q \cap \pi_P$. Questo è impossibile per (10.2). Quindi, $g|\pi_Q$ è un'elazione e $\text{Fix } \mathcal{G} = \pi_P \cap \pi_Q = \pi_P \cap \mathcal{L} = \pi_Q \cap \mathcal{L}$ dove \mathcal{L} è una retta tale che $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}_\infty = (\infty)$.

$\mathcal{G}|(\mathcal{L}/\text{Fix } \mathcal{G})$ fissa ogni punto di un sottospazio di $\mathcal{L}/\text{Fix } \mathcal{G}$ di dimensione uno. Allora, c'è un sopraspazio $V_1 \supseteq \text{Fix } \mathcal{G}$ tale che \mathcal{G} fissa V_1 e $|V_1| = 2 \cdot q$. Allora, \mathcal{G} permuta $V_1 - \text{Fix } \mathcal{G}$ cosicché c'è un sottogruppo $\hat{\mathcal{G}}$ di \mathcal{G} di ordine q che fissa ogni punto di V_1 . Ma \mathcal{G} è abeliano elementare cosicché $\hat{\mathcal{G}} = E$. Ma ora abbiamo un gruppo \mathcal{G}_P di Baer di ordine q e un gruppo di elazioni di ordine q che si centralizzano, il che è una contraddizione per (4.3).

Per lo studio della dimensione 2:

(10.3) Teorema.

Sia π un piano di traslazione di ordine n che abbia un gruppo abeliano H nel complemento di traslazione. Se $n \cdot [\sqrt{n} - 1] \mid |H|$ allora, abbiamo l'uno o l'altro:

(1) n è un quadrato q^2 e il nucleo è isomorfo a $GF(q)$ o π è un piano di Desargues.

(2) Se n è un quadrato e π non è un piano su un semicorpo allora π è un piano di Betten o π è un piano "destrabile" (si veda la sezione II).

Dimostrazione. Sia $n = p^r$. Per (10.1), un p -sottogruppo di Sylow \mathcal{G} ha ordine n e \mathcal{G} è transitivo su $\Omega_\infty - (\infty)$. Inoltre, $[\sqrt{n} - 1] \mid |H_p|$ per $P \in \Omega_\infty - (\infty)$ e H permuta i punti che sono fissati da H_p . Allora, H_p fissa ogni punto di Ω_∞ cosicché il nucleo di π ha ordine almeno $[\sqrt{n} - 1] + 1$. Supponiamo $n = p^{2s+1}$ per $r = 2s+1$, $s \geq 1$.

$$[\sqrt{n} - 1] = [p^{s+\frac{1}{2}} - 1] \geq [p^s - 1] = p^s - 1.$$

Sia il nucleo $\cong GF(p^t)$ per $t \mid r = 2s+1$. Allora, $t \geq s$ e $tk = 2s+1$ per un qualche intero k .

Dunque, $2s+1 = tk \geq ks$ cosicché

$$(s, k) \in \{(s, 1), (s, 2), (1, 3)\}.$$

Per $k = 1$ o 2 , il nucleo contiene $GF(p^s)$ o $GF(p^{2s})$, il che implica che π sia Desarguesiano.

Se $k = 3$, $s = 1$, il nucleo è $GF(p)$ e l'ordine del piano è p^3 . In questo caso, $[\sqrt{p^3} - 1] = [\sqrt{p} \cdot p - 1] > [p - 1]$ quando $\sqrt{p} \cdot p \geq p + 1$. $\sqrt{p} \cdot p \geq p + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{p} - 1)p \geq 1$ e $(\sqrt{p} - 1)p < 1 \Leftrightarrow p = 2$. Tutti piani di ordine 8 sono Desarguesiani. Allora, possiamo assumere che n sia un quadrato.

Ora, $[\sqrt{n} - 1] = \sqrt{n} - 1$ cosicché π è Desarguesiano o il nucleo $\cong GF(q)$. (2) è vero adesso per Ganley [17] e la sezione II.

In modo simile, possiamo provare

(10.4) Teorema (Jha, Johnson [27]).

Sia π un piano di traslazione di ordine n con un gruppo \mathcal{K} di collineazioni nel complemento di traslazione. Se c'è un sottogruppo abeliano di ordine n e \mathcal{K} ammette un' omologia affine allora π è un piano su un semicorpo.

XI. La questione della linearità per i gruppi abeliani nei piani di traslazione.

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ con un gruppo \mathcal{G} nel complemento di traslazione. Se $|\mathcal{G}| = q^2$ e \mathcal{G} è nel complemento lineare allora possiamo fare un'analisi come in sezione II e VI. Se \mathcal{G} non è nel complemento lineare il problema diventa più complicato di quando \mathcal{G} è lineare.

La domanda sulla linearità

Se π è un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ con un gruppo \mathcal{G} di ordine q^2 nel complemento di traslazione, deve essere \mathcal{G} contenuto nel complemento lineare?

Purtroppo no—se si pensa al piano di Desargues di ordine q^2 sul campo $GF(q)$ (il nucleo è $GF(q^2)$).

Allora, probabilmente non c'è ragione di pensare che la domanda sulla linearità per gruppi abeliani abbia una risposta affermativa. Ma, possiamo provare:

(11.1) Teorema (Jha, Johnson [37]).

Sia π un piano di traslazione di ordine $q^2 = p^{2r}$, p un primo, con nucleo $K \cong GF(q)$. Supponiamo che π ammetta un gruppo abeliano \mathcal{G} di ordine q^2 nel complemento di traslazione.

(1) Allora, \mathcal{G} è nel complemento lineare.

(2) Se q è pari, allora π è un piano su un semicorpo o un piano di Betten.

(3) Se q è dispari, allora π è un piano su un semicorpo o un piano "destrabile."

Dimostrazione.

(11.2) Lemma.

(i) c'è un'elazione τ in \mathcal{G} .

(ii) Possiamo scegliere le coordinate in modo tale che

$$\tau = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

(iii) Gli elementi di \mathcal{G} possono essere rappresentati nella forma:

$$(x,y) \longrightarrow (x^\sigma, y^\sigma) \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

dove x,y sono 2-vettori, A,B matrici 2 per 2 su K , $\sigma \in \text{Aut}(K)$.

Dimostrazione. $|\mathcal{G} \cap \text{GL}(4,q)| \geq \frac{q^2}{[r]_p}$ dove $[r]_p = p^t$ se

$$r = p^t \cdot s, \quad (p,s) = 1.$$

Se $E \triangleleft \mathcal{G}$ è il sottogruppo delle elazioni di \mathcal{G} allora

$$|E| \geq \frac{q}{[r]_p}.$$

Ora si usano argomenti simili a quelli della sezione II.

(11.3) Lemma.

Se $\mathcal{G} \cap \text{GL}(4,q) \neq E$, allora $|E| \leq q$.

Dimostrazione. Se $\mathcal{G} \cap GL(4, q) \neq E$, esiste un elemento $h \in \mathcal{G}$,

$$h = \begin{bmatrix} 1 & a & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{per } a \neq 0. \quad \text{Dunque scegliamo gli elementi}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A \end{array} \right] \quad \text{in } \mathcal{G} \cap GL(4, q) \quad \text{della forma} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & a \\ & & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{per}$$

$a \in K$.

Sia $g \in E$. Allora, possiamo prendere

$$g = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad \text{Allora, } ghg^{-1}h^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} ac_3 & a(c_1 - c_4) + a^2 c_3 \\ 0 & -ac_3 \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad \text{Quindi, } ac_3 = 0$$

cosicché $a_3 = 0$ e $a(c_1 - c_4) = 0$ cosicché $c_1 = c_4$.

Allora, $E \subseteq \left\{ \left[\begin{array}{c|c} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \mid u \in K \text{ e } m \text{ è una} \right.$
funzione di K }.

(11.4) Lemma.

$$|E| \geq \frac{q}{[r]_p} = p^{p^t \cdot s - t} > \sqrt{q} \quad \text{o l'ordine } q^2 \text{ è } 4 \text{ o } 16.$$

Dimostrazione. Sia $r = p^t \cdot s$ allora $[r]_p = p^t$ e $q = p^{p^t \cdot s}$.

È facile vedere che $p^{p^t \cdot s - t} > \sqrt{q}$ se $q^2 \neq 4$ o 16 .

(11.5) Lemma.

Se $\mathcal{G} \cap GL(4, q) \neq E$ allora $\mathcal{G} \subseteq GL(4, q)$.

Dimostrazione. Da (11.3), (11.4), $\sqrt{q} < |E| < q$ e

$$E = \left\{ \left[\begin{array}{cc|cc} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \mid u \in \Sigma \subseteq K \right\} \text{ dove } |\Sigma| = |E|. \text{ Sia } g \in \mathcal{G}$$

della forma $(x, y) \xrightarrow{g} (x^\sigma, y^\sigma) \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix}$. $gf_u = f_u g$ per

$$f_u = \left[\begin{array}{cc|cc} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \text{ cosicch\`e } \begin{bmatrix} u^\sigma & (m(u))^\sigma \\ 0 & u^\sigma \end{bmatrix} A = A \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix}.$$

Sia $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ cosicch\`e

$$(1) \quad u^\sigma a_1 + (m(u))^\sigma a_3 = a_1 u,$$

$$(2) \quad u^\sigma a_3 = a_3 u.$$

Se $a_3 \neq 0$ allora $u^\sigma a_3 = a_3 u$ per tutti gli $u \in \Sigma$ e $|\Sigma| > \sqrt{q}$. Allora, $\sigma = 1$. Se $a_3 = 0$ di nuovo $u^\sigma a_1 = a_1 u$. Per (10.1), \mathcal{G} \u00e9 transitivo su $\Omega_\infty^{-(\infty)}$ cosicch\`e A \u00e9 non-singolare, allora $a_1 \neq 0$ se $a_3 = 0$ e $\sigma = 1$.

Questo argomento \u00e9 vero per tutti gli elementi di \mathcal{G} cosicch\`e $\mathcal{G} \subseteq GL(4, q)$.

(11.6) Lemma.

Se $\mathcal{G} \cap GL(4, q) = E$, supponiamo che $\mathcal{G} \not\subseteq GL(4, q)$.

(1) Allora $\mathcal{G} \cap GL(4, q) = \left\{ \begin{bmatrix} I & C \\ 0 & I \end{bmatrix} \mid C \in \lambda \text{ e } \lambda \text{ \u00e9 additiva e } C \text{ \u00e9 non-singolare} \right\}$.

(2) Sia $\mathfrak{X} \langle C \mid C \in \lambda \text{ di (1)} \rangle$. Allora $|\mathfrak{X} \cap (\text{gruppo scalare di } GL(2, q))| \leq \sqrt{q}$.

Dimostrazione.

(1) Si veda sezione II.

(2) Se $|\mathfrak{X} \cap (Z(GL(2, q)))| > \sqrt{q}$

allora per $(x, y) \xrightarrow{g} (x^\sigma, y^\sigma) \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix}$, $g \in \mathfrak{G}$ si deve avere $C^\sigma A = AC$ per tutti i $C \in \lambda$. Ma, $\langle \lambda \rangle = \mathfrak{X}$ cosicché $D^\sigma A = AD$ per tutti i $D \in \mathfrak{X}$. Allora, ci sono $> \sqrt{q}$ elementi $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ dove $\begin{bmatrix} a^\sigma & 0 \\ 0 & a^\sigma \end{bmatrix} A = A \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ ma questo implica che $\sigma = 1$ perché A è non-singolare.

(11.7) Lemma.

\mathfrak{X} contiene una collezione di elementi di ordine $\geq q^2/[r]_p$ che agisce semiregolarmente su un spazio vettoriale V di dimensione due.

Dimostrazione. $\mathfrak{X} \subseteq GL(2, q)$ e $y = xC$ per $C \in \lambda$ è una componente di π . Allora $xC = x$ implica $x = 0$ e $xC = x\bar{C}$ per $C, \bar{C} \in \lambda$, $x \neq 0$ implica $C = \bar{C}$.

(11.8) Lemma.

Se $q \neq 4$ e $\mathfrak{X}/\mathfrak{X} \cap Z$ ($Z = Z(GL(2, q))$) ha un sottogruppo che è isomorfo a $PSL(2, p^k)$ di indice $\mid 4$ allora $SL(2, q) \subseteq \mathfrak{X}$.

Dimostrazione (una traccia). Si usa che la lunghezza di qualunque vettore $v \neq 0$ sotto \mathfrak{A} è maggiore o uguale a $\frac{q^2}{[r]_p} - 1$.

Ora, se $SL(2, q) \subseteq \mathfrak{A}$ e $g : (x, y) \longrightarrow (x^\sigma, y^\sigma) \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix}$,
 $\mathfrak{G} \cap GL(4, q) = \left\{ \begin{bmatrix} I & C \\ 0 & I \end{bmatrix} \mid C \in \lambda \right\}$ e $\mathfrak{A} = \langle \lambda \rangle$ abbiamo $\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^\sigma A$
 $= \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. In modo simile a sopra e con $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, possiamo
 mostrare che $a_1 d = a_4 d^\sigma$, il che implica $a_1 = a_4$, $a_3 = 0$ e
 $a_1 \neq 0$. Allora, $d = d^\sigma$ per tutti i $d \in K$ cosicchè $\sigma = 1$.

Allora, abbiamo

(11.9) Lemma. Se $\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap Z$ ha un sottogruppo $\cong PSL(2, p^k)$ allora $\mathfrak{G} \subseteq GL(4, q)$. Quindi, $\mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap Z$:

(1) è un sottogruppo di un gruppo H dove $|H| \mid \frac{2(q \pm 1)}{d}$
 dove $d = (2, q-1)$, o

(2) è un sottogruppo di un gruppo H dove $|H| \mid \frac{2q(q-1)}{d}$,

(3) è un sottogruppo con indice 1 o 2 che è isomorfo al
 A_4 , S_4 , o A_5 .

Per finire la dimostrazione si può studiare ciascuna delle situazioni (1), (2), (3). Si può usare l'argomento della lunghezza delle orbite di \mathfrak{A} in ogni caso. Si veda [37] per i particolari.

XII. Fibrazioni di caratteristica p che ammettono gruppi non risolubili i cui p -sottogruppi di Sylow sono gruppi planari.

Sia π un piano di traslazione di ordine p^{2r} che ammetta un gruppo di collineazioni $\mathcal{G} \cong \text{SL}(2, p^r)$ dove i p -gruppi di Sylow sono gruppi planari. Generalmente, nei casi che sono conosciuti, il gruppo fissa p^{r+1} componenti. Inoltre, se si sa che un gruppo arbitrario fissa alcune componenti purtroppo non si sa quasi nulla. Eppure, per i piani di ordine q^4 , possiamo dire qualcosa. Per esempio:

(12.1) Teorema (Jha, Johnson [32]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^4 che ammetta un gruppo non risolubile \mathcal{G} di collineazioni nel complemento di traslazione. Supponiamo che \mathcal{G} fissi più di $q+1$ componenti.

(1) Sia q dispari, allora $8 \mid |\mathcal{G}|$ e il 2-rango di $\mathcal{G} \leq 2$. Inoltre, l'involuzione del nucleo è sempre in \mathcal{G} .

(2) Sia q pari, allora \mathcal{G} contiene un sottogruppo normale N tale che $N \cong \text{SL}(2, 2^s)$ per un qualche s , e $|\mathcal{G}/N|$ è dispari.

In questo caso, ogni 2-sottogruppo di Sylow fissa ogni punto di un sottopiano di Baer. Inoltre, questi sottopiani hanno gli stessi punti all'infinito e quindi N fissa esattamente q^2+1 componenti.

Dimostrazione. (1) q dispari.

(Una traccia)

(12.2) Lemma.

Ogni 2-sottogruppo di Klein deve contenere l'involuzione del nucleo. Sia \hat{i} questo elemento.

Dimostrazione. Si veda Ostrom [56] per mostrare che se $H = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ è un 2-gruppo di Klein e $\hat{i} \in H$ allora $\pi_\alpha \cap \pi_\beta$ è un sottopiano di ordine q . Eppure, \mathcal{G} deve fissare più di $1+q$ componenti.

(12.3) Lemma.

Per g dispari, $8 \mid |\mathcal{G}|$.

Dimostrazione.

Se $2 \parallel |\mathcal{G}|$, si usa il teorema di Burnside per mostrare che \mathcal{G} ha un 2-complemento normale. In modo simile, se $4 \parallel |\mathcal{G}|$ allora i 2-gruppi di Sylow sono di Klein. Quindi, $\hat{i} \in \mathcal{G}$ e $\mathcal{G}/\langle \hat{i} \rangle$ è risolubile—una contraddizione.

(12.4) Lemma.

Il 2-rango di \mathcal{G} è ≤ 2 .

Dimostrazione.

Sia $S = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\beta\gamma\}$ un gruppo abeliano

elementare in \mathcal{G} . Allora, $L = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ ed anche $T = \{1, \alpha, \gamma, \alpha\gamma\}$ sono gruppi di ordine 4 e per (12.1), $L \cap T \supseteq \{\hat{i}\}$, allora $\hat{i} = \alpha$. Ma, anche $M = \{1, \beta, \gamma, \beta\gamma\} \supseteq \{\hat{i}\}$ cosicché $\hat{i} = \beta$.

(12.5) Lemma.

$\hat{i} \in \mathcal{G}$.

Dimostrazione.

Sia \mathcal{P} un 2-gruppo di Sylow di \mathcal{G} . Allora per ((2.2), (3), (4), (5)), \mathcal{P} contiene un gruppo dei quaternioni Q di ordine 8. Sia $\alpha \in Q$ l'unico elemento di ordine 2 e supponiamo che α sia di Baer e sia $\pi_\alpha = \text{Fix } \alpha$. Q fissa π_α ma Q non fissa ogni punto di π_α per Foulser [13]. $Q|_{\pi_\alpha}$ deve essere l'involuzione del nucleo di π_α . Cioè, Q fissa $> 1+q$ componenti di π_α .

Allora, il sottogruppo di Q che agisce come l'identità su π_α è un 2-gruppo di Klein, il che non è possibile.

Quindi, abbiamo la dimostrazione per (12.1)(1). La dimostrazione di (2) usa idee simili a quelle in [44].

(12.1) non rimane vero se cambiamo ipotesi e \mathcal{G} fissa esattamente $1+q$ componenti perché i piani di Lorimer-Rahilly e di Johnson-Walker di ordine 16 ammettono $\text{PSL}(2,7)$ dove tale gruppo fissa esattamente $1+2$ componenti.

Eppure, possiamo provare:

(12.6) Teorema (Jha, Johnson [36]).

Sia π un piano di traslazione di ordine $n = p^{2r}$ che ammetta un gruppo \mathcal{G} nel complemento di traslazione tale che $\sqrt{n} \mid |\mathcal{G}|$ e supponiamo che i p -gruppi di Sylow \mathcal{P} siano planari con $\pi_{\mathcal{P}} = \text{Fix } \mathcal{P}$.

Supponiamo che l'ordine di $\pi_{\mathcal{P}} \geq n^{1/4}$.

(a) Se $\mathcal{P} \not\triangleleft \mathcal{G}$, allora π è un piano di Hall o $n = 5^4$ e π contiene un sottopiano π_0 di Hall di ordine 25 tale che \mathcal{G} fissa π_0 , $\mathcal{G} \supseteq \text{SL}(2,5)$ e $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}|_{\pi_0}$.

(b) Se \mathcal{G} è non risolubile, allora vale l'uno o l'altro: $\mathcal{P} \triangleleft \mathcal{G}$ cosicché si può applicare (a) o c'è un insieme

$$\pi_{\mathcal{P}} \subseteq \pi_{\overline{\mathcal{P}}} \subseteq \pi$$

dove $\pi_{\mathcal{P}}$, $\pi_{\overline{\mathcal{P}}}$ sono fissati da \mathcal{G} e $\pi_{\mathcal{P}}$ è Desarguesiano. Inoltre, $\mathcal{G}|_{\pi_{\mathcal{P}}} \cong$ a una estensione ciclica (meta) di $\text{SL}(2,5)$ e il nucleo di questo omomorfismo è risolubile.

Con riferimento ai piani di Lorimer-Rahilly et al. abbiamo:

(12.7) Teorema (Jha, Johnson [36]).

Sia π un piano di traslazione di ordine $n = p^{2r}$ che ammetta un gruppo \mathcal{G} nel complemento di traslazione tale che $p\sqrt{n} \mid |\mathcal{G}|$ e supponiamo che i p -gruppi di Sylow \mathcal{P} siano planari con $\pi_{\mathcal{P}} = \text{Fix } \mathcal{P}$, e l'ordine di $\pi_{\mathcal{P}}$ sia $\geq n^{1/4}$.

Allora,

(a) π ha ordine pari, $|\mathcal{G}| = 2\sqrt{n}$ e $\pi_{\mathcal{G}}$ ha ordine $n^{1/4}$.
 \mathcal{G} contiene un sottogruppo abeliano elementare E tale che
 $[\mathcal{G}:E] = 2$ e π_E è un sottopiano Desarguesiano di Baer.

(b) Se \mathcal{G} è non risolubile, allora π è un piano di ordine 16 di Dempwolff, Lorimer-Rahilly o Johnson-Walker.

(c) Se \mathcal{G} non contiene un sottogruppo abeliano elementare di ordine \sqrt{n} , allora \mathcal{G} è non risolubile cosicché si può applicare il caso (b).

Dimostrazione.

(12.7)—Traccia.

(12.8) Lemma.

$p = 2$.

Dimostrazione.

Si usa Foulser [13] per mostrare che π_E (in (a)) è Desarguesiano da cui è chiaro che $p = 2$ perché $\pi_{\mathcal{G}} \subseteq \pi_E$ cosicché $\mathcal{G}|_{\pi_E} \cong \leq \text{Aut GF}(q^2)$.

(12.9) Lemma.

Se \mathcal{G} è non risolubile allora $\mathcal{G} \supseteq \text{SL}(2, q^2)$ o
 $\mathcal{G} \supseteq \text{PSL}(2, 7)$ e $n = 16$.

Dimostrazione.

Si può usare il teorema di Dempwolff (8.3).

Ora, per finire la dimostrazione, si può usare Foulser-Johnson (7.7) e lo studio di Johnson [43] sui piani di traslazione di ordine 16.

La dimostrazione di (12.6) è più difficile di (12.7) e usa la teoria della rappresentazione di $SL(2,q)$ negli spazi vettoriali di dimensione $4r$ su $GF(p)$.

Infatti, quando π non è un piano di Hall nell'ipotesi di (12.6) c'è un $GF(p)SL(2,q)$ modulo V con $|V| = q^4$. (V è una componente di π .)

XIII. Parallelismi regolari e piani di traslazione.

Recentemente, c'è stato molto interesse sui "parallelismi" delle geometrie proiettive. Molte delle costruzioni sono state trovate col computer.

Inoltre, Lunardon [53], Walker [63] e Prohaska, Walker [59] hanno studiato le relazioni fra parallelismi e piani di traslazione.

(3.1) Definizione.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione k su $K \cong \text{GF}(q)$ per $q = p^r$.

Una t -fibratura parziale è una collezione di sottospazi di dimensione t che hanno a due a due intersezione identica.

Una t -fibratura è un fibratura parziale che copre V .

Una t -fibratura Desarguesiana \mathcal{F} è una t -fibratura per cui esiste un corpo $L \supseteq K$, $L \cong \text{GF}(q^t)$, e gli elementi di \mathcal{F} sono spazi di dimensione uno su L .

Un t -parallelismo parziale è una collezione \mathcal{P} di t -fibrature tale ogni t -spazio è in al più un elemento di \mathcal{P} .

Un t -parallelismo è un t -parallelismo parziale tale che ogni t -spazio è in esattamente un elemento di \mathcal{P} .

Un t -parallelismo regolare è un t -parallelismo tale ogni t -fibratura è Desarguesiana.

Dai lavori di Lunardon [53], Walker [63] ed anche di Prohaska e Walker [59] (che non è mai stato pubblicato) si ha che

per ogni 2-parallelismo di un spazio di dimensione 4 che sia regolare, c'è un piano di traslazione di ordine q^4 che ha nucleo $K \cong GF(q)$. Le componenti consistono di $1+q+q^2$ reti derivabili che contengono lo stesso regolo \mathcal{R} di $1+q$ componenti. Anche il viceversa è vero.

Inoltre, questo risultato può essere espresso, più in generale, per 2-parallelismi in dimensione $4r$. Per questo, è necessario riottenere alcuni risultati di Foulser [13] in forma più generale.

(13.2) Teorema (Foulser's Covering Theorem, Johnson [46]).

Sia V un spazio vettoriale di dimensione $2k$ su $GF(p)$, p un primo. Sia N una k -fibratura parziale con $1+p^t$ spazi di dimensione k . Se c'è una collezione \mathcal{C} di sottopiani di ordine p^t tale che $\bigcup_{\pi \in \mathcal{C}} \pi = \bigcup_{\mathcal{L} \in N} \mathcal{L}$ (\mathcal{C} copre N), allora i sottopiani sono Desarguesiani e N è la forma vettoriale del $(\frac{k}{t}-1)$ -regolo in $PG(\frac{2k}{t}-1, L)$ per un qualche campo $L \cong GF(p^t)$.

(13.3) Definizione.

(1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $2k$ su $GF(q)$, $q = p^r$, p un primo. Sia N una k -fibratura parziale e \mathcal{F} una $2t$ -fibratura parziale. Diciamo che N è trasversale a $\mathcal{F} \iff$ per $\mathcal{L} \in N$ e $\mathcal{M} \in \mathcal{F}$, $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ è un spazio di dimensione t di \mathcal{M} .

(2) Sia N una k -fibratura parziale con $1+g^m$ componenti. Se c'è un corpo $L \cong GF(q^m)$ dove N è $x=0$,

$y = \alpha x$; $\alpha \in L$ e $V = (x, y)$ è un sottospazio di dimensione due su L .
 diciamo che N è una rete Desarguesiana razionale di ordine
 q^m .

Una rete Desarguesiana razionale di ordine q (dove $\dim V = 2k$) si chiama un regolo di V .

(13.4) (Questo è in Prohaska, Walker [59] per $t = 2$, si veda anche Jha-Johnson [34](2.5)).

Con le ipotesi di (13.3), sia $\{A, B, C\}$ un k -fibrazione parziale e sia \mathcal{F} una t -fibrazione di A . Sia $\mathcal{P} = \{f \circ f^{i_c} \mid f \in \mathcal{F} \text{ e } i_c \in GL(V)/GF(q) \text{ tale che } i_c|_C = 1 \text{ e } A \xrightarrow{i_c} B\}$. Allora, \mathcal{P} è l'unica $2t$ -fibrazione tale che $\{A, B, C\}$ è t -trasversale a \mathcal{P} . Inoltre, c'è un unico regolo $\mathcal{R} = \mathcal{R}(A, B, C)$ che contiene $\{A, B, C\}$ e è trasversale a \mathcal{P} .

(13.5) Teorema (si veda Jha, Johnson [34](2.6)).

Con le ipotesi di (13.4), c'è una k -fibrazione N con esattamente $1+q^t$ componenti (k -spazi) che è t -trasversale a \mathcal{P} se e soltanto se \mathcal{F} è Desarguesiana e N è una rete Desarguesiana razionale di ordine q^t che contiene il regolo $\mathcal{R} = \mathcal{R}(A, B, C)$. Inoltre, viceversa, se esiste una rete Desarguesiana razionale di ordine q^t che contiene $\mathcal{R}(A, B, C)$ allora i sottopiani di ordine q^t di N determinano una t -fibrazione Desarguesiana su A . Questa corrispondenza tra t -fibrizioni Desarguesiane su A e reti Desarguesiane razionali N che contengono il regolo $\mathcal{R}(A, B, C)$ è uno-uno.

Dimostrazione.

Si può usare (13.2) e argomenti simili a quelli di Prohaska, Walker [59]. Inoltre, con (13.5) abbiamo.

(13.6) Teorema (Prohaska, Walker [59], Walker [63], Lunardon [53], si veda anche Jha, Johnson [34]).

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $4k$ su $K \cong GF(q)$, $q = p^r$, p un primo. Sia \mathfrak{R} un regolo di V (di $1+q$ $2k$ -spazi). Sia Γ una collezione di reti Desarguesiane razionali di ordine q^2 che contiene \mathfrak{R} . Per ogni $\mathfrak{D} \in \Gamma$, sia $(A)_{\mathfrak{D}} = \{A \cap \mathfrak{L} \mid \mathfrak{L} \text{ una componente di } \mathfrak{D}\}$. Allora, $U(\Gamma-\mathfrak{R}) \cup \mathfrak{R}$ è una $2k$ -fibratura (parziale) $\Leftrightarrow \{(A)_{\mathfrak{D}} \mid \mathfrak{D} \in \Gamma\}$ è un 2 -parallismo Desarguesiano (parziale) di A dove A è una componente di \mathfrak{R} .

(13.7) Note.

(1) Per (13.6) per ogni 2 -parallelismo regolare (Desarguesiano) su un spazio di dimensione $4r$ su $GF(q)$, c'è un piano di traslazione π di ordine q^{2r} e nucleo $GF(q)$. π ammette il gruppo di collineazioni $\cong \Gamma L(2, q)$.

(2) Ci sono soltanto tre 2 -parallismi regolari che sono conosciuti. Ce ne sono due in $V_8/GF(2)$ e uno in $V_8/GF(8)$. Allora, ci sono due piani di ordine 16 che ammettono $S_3 \cong \Gamma L(2, 2)$ —questi piani sono i piani di Lorimer-Rahilly e Johnson-Walker che ammettono anche $S_3 \times PSL(2, 7)$. Il piano di ordine 8^4 è dovuto a Denniston e Walker (si veda [10] per un

2-parallelismo regolare in $V_8/GF(8)$).

Ora, consideriamo la possibilità di ottenere parallelismi da piani di traslazione di ordine q^{2r} che ammetta un gruppo di collineazioni isomorfo a $SL(2,q)$.

Innanzitutto,

(13.8) Teorema (Jha, Johnson [31], [34]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^{2r} , $q = p^r$, p un primo, che ammetta un gruppo $\mathcal{G} \cong SL(2,q)$ nel complemento di traslazione.

(1) Se i p -elementi sono elazioni e \mathcal{G} è $\frac{1}{2}$ -transitivo (ogni orbita ha la stessa lunghezza) su $\mathcal{L}_\infty - N \cap \mathcal{L}_\infty$ dove N indica la rete degli assi di elazione, allora il nucleo è $GF(q)$ e per ogni orbita Γ , $\Gamma \cup N$ è una rete Desarguesiana razionale di ordine q^2 . (2) Se \mathcal{L} è un'asse di elazione allora c'è su \mathcal{L} un 2-parallelismo regolare (\mathcal{L} è uno spazio di dimensione $2r$ su $GF(q)$).

Ogni piano di traslazione di ordine q^{2r} che si può costruire da un parallelismo regolare finora noto ammette il gruppo

$$SL(2,q) \times Z(q^{(2r-1)}-1/(q-1)).$$

Dimostrazione.

Si usa (13.7) e (5.19).

Viceversa:

(13.9) Teorema (Jha, Johnson [34](3.2), [31]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^{2r} che ammetta un gruppo isomorfo a $SL(2, q) \times Z(q^{2r-1}-1)/(q-1)$ nel complemento di traslazione. Allora, il nucleo è $GF(q)$, i p -elementi per $p^s = q$ sono elazioni e per ogni asse di elazione \mathcal{L} , \mathcal{L} ammette un 2-parallismo con \mathcal{L} spazio vettoriale di dimensione $2r$ su $GF(q)$.

Dimostrazione.

Vorrei dare una traccia della dimostrazione di (13.9).

(13.10) Lemma.

Supponiamo che i p -elementi di $H \cong SL(2, q)$ siano elazioni. Allora, vorrei mostrare che H agisce 1/2-transitivamente su $\mathcal{L}_\infty - N$ dove N è la rete degli assi di elazione e allora si può applicare (13.8).

Per (5.19), c'è almeno una rete Desarguesiana razionale \mathcal{R} di ordine q^2 e $(\mathcal{R} - N) \cap \mathcal{L}_\infty$ è un'orbita di H . Se $g \in Z(q^{(2r-1)}-1)/(q-1)$ è possibile che g fissi \mathcal{R} . Se non c'è un elemento che fissa \mathcal{R} , allora abbiamo il numero di reti necessario a coprire π . Se g fissa \mathcal{R} si può dimostrare che ancora si ha questo numero di reti.

È interessante notare che questa è la parte più difficile.

Per il caso in cui i p -elementi non sono elazioni abbiamo

bisogno di un teorema di Jha.

(13.11) Teorema (Jha [21], lemma 2).

Sia V un gruppo abeliano elementare di ordine $p^{sr} = q^r \geq q^2$ e sia u un divisore p -primitivo di $q^{(r-1)-1}$. Sia U un gruppo di ordine u^t per $t \geq 1$, $U \subseteq \text{Aut}(V, +)$.

Allora,

(a) $|\text{Fix } U| = q$.

(b) U è semiregolare su $V/\text{Fix } U$.

(c) U è ciclico.

(d) Se $r > 2$ allora $V = \text{Fix } U \oplus C_U$ dove C_U è l' U -sottomodulo unico di V tale che $C_U \cap \text{Fix } U = 0$.

(e) Se $r > 2$ e W è un U -sottomodulo di V allora $W \subseteq \text{Fix } U$ o $|W| \geq q^{r-1}$.

(13.12) Lemma.

Nell'ipotesi di (13.9), c'è un divisore p -primitivo di $q^{(2r-1)-1}$.

Dimostrazione.

Se questo non è vero, $2r-1 = 1$ e $q = p^2$ per un primo p .

Ma, in questo caso, abbiamo l'ordine q^2 e $SL(2, q)$. Ora, possiamo usare (7.7).

Sia $g \in Z(q^{2r-1}-1)(q-1) \ni |g| = u$ è un divisore p -primitivo e supponiamo che un p -elemento σ non sia un'elazione. Allora, possiamo supporre che $\text{Fix } \sigma = \pi_\sigma$ sia un sottopiano di π di ordine p^k per un qualche intero t .

(13.13) Lemma.

$\pi_\sigma \subseteq \text{Fix } g$, e $\text{Fix } g$ è un sottopiano di ordine q .

Dimostrazione.

Si usano le proprietà di $|g| = u$ (u è un divisore p -primitivo) ^{per} mostrare che $\pi_\sigma \subseteq \text{Fix } g$. Si usa (13.11) per provare che $|(\text{Fix } g) \cap (\text{una componente che è fissata})| = q$.

(13.14) Lemma.

I p -elementi non possono ^{essere} planari.

Dimostrazione.

Per (13.13), $\pi_\sigma \subseteq \text{Fix } g$. Sia \mathcal{L} una componente di π_σ , allora $\mathcal{L} = (\text{Fix } g|_{\mathcal{L}}) \oplus C_{g,\mathcal{L}}$ dove $C_{g,\mathcal{L}}$ è l'unico sottomodulo tale che $C_{g,\mathcal{L}} \cap (\text{Fix } g|_{\mathcal{L}}) = 0$. Quindi, σ deve fissare $C_{g,\mathcal{L}}$ perché σ, g si centralizzano. Eppure, σ deve fissare alcuni punti di $C_{g,\mathcal{L}}$, cosicché $C_{g,\mathcal{L}} \cap \pi_\sigma \neq 0$, il che è una contraddizione per (13.13).

La dimostrazione per il caso in cui un p -elemento σ è tale che $\text{Fix } \sigma$ è contenuto in una componente è simile.

Allora, abbiamo la traccia della dimostrazione di (13.9).

REFERENZE

- [1] André, J. Über perspektivitäten in endlichen projectiven Ebenen. Arch. Math. 6(1954), 29-32.
- [2] Barriga, O.E. On the planes of Narayana Rao and Satyanarayana. J. Comb. Theory (to appear).
- [3] Bartolone, C. On some translation planes admitting a Frobenius group of collineations. Combinatorics '81', Annals Discr. Math. 18(1983), 37-54.
- [4] Biliotti, M., Menichetti, G. On a generalization of Kantor's likeable planes. Geom. Dedicata 17(1985), 253-277.
- [5] Biliotti, M., Menichetti, G. Derived semifield planes with affine elations. J. Geometry 19(1982), 50-88.
- [6] Biliotti, M., Lunardon, G. Insiemi di derivazione e sottopiani di Baer in un piano di traslazione. Atti. Acc. Naz. Lincei, CL. Sci Fis. Mat. Nat. (8) 69(1980).
- [7] Cohen, S.D. Likeable functions in finite fields. Israel J. Math. 46(1983), 123-126.
- [8] Cohen, S.D., Ganley, M.J. Some classes of translation planes. Oxford Quarterly (13) 35(1984), 101-113.
- [9] Dempwolff, U. Grosse Baer-Untergruppen auf translations-ebenen gerader ordnung, J. Geometry 19(1982), 101-114.
- [10] Denniston, R.H.F. Some packings of projective spaces, Rend. Accad. Naz. Lincei. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat (8) 52(1972), 36-40.

- [11] Fink, J.B., Johnson, N.L., Wilke, F.W. Characterization of "likeable" translation planes, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 32(1983), 76-99.
- [12] Foulser, D. Baer p-elements in translation planes. *J. Algebra* 31(1974), 354-366.
- [13] Foulser, D. Subplanes of partial spreads in translation planes. *Bull. London Math. Soc.* 4(1972), 32-38.
- [14] Foulser, D., Johnson, N.L. The translation planes of order q^2 that admit $SL(2,q)$ as a collineation group. I. Even order. *J. Algebra* 86(1984), 385-406.
- [15] Foulser, D., Johnson, N.L. The translation planes of order q^2 that admit $SL(2,q)$ as a collineation group. II. Odd order. *J. Geom.* 18(1982), 122-139.
- [16] Foulser, D., Johnson, N.L., Ostrom, T.G. Characterization of the Desarguesian planes of order q^2 by $SL(2,q)$. *Intern. J. Math. and Math. Sci.* 6(1983), 605-608.
- [17] Ganley, M.J. On likeable translation planes of even order. *Arch. Math.* 41(1983), 478-480.
- [18] Ganley, M.J. Baer involutions in semifields of even order. *Geom. Ded.* 2(1973), 499-508.
- [19] Hering, Ch. On shears of translation planes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 37(1972), 258-268.
- [20] Hering, Ch. On projective planes of type VI. *Atti Convegni Lincei* 17, *Teorie Combinatorie* (1976), 30-53.
- [21] Jha, V. On translation planes which admit solvable autotopism groups having a large slope orbit. *Canad. J. Math.* 36(1984), 769-782.

- [22] Jha, V., Johnson, N.L. On spreads in $PG(3, 2^s)$ that admit projective groups of order 2^s . *Edinburgh Math. Soc.* (to appear).
- [23] Jha, V., Johnson, N.L. Some unusual translation planes of order 64. *Arch. Math.* 34(1984), 566-571.
- [24] Jha, V., Johnson, N.L. Translation planes of order q^2 that admit collineation groups of order q^2 . II—Transitivity. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* (to appear).
- [25] Jha, V., Johnson, N.L. Coexistence of elations and large Baer groups in translation planes. *J. London Math. Soc.* (to appear).
- [26] Jha, V., Johnson, N.L. Baer involutions in translation planes admitting large elation groups. *Resultat d. Math.* (submitted).
- [27] Jha, V., Johnson, N.L. A note on finite semifield planes that admit homologies. *J. Geom.* 24(1985), 566-571.
- [28] Jha, V., Johnson, N.L. Solution to Dempwolff's nonsolvable B-group problem. *European J. Comb.* (to appear).
- [29] Jha, V., Johnson, N.L. The odd order analogue of Dempwolff's B-group problem. *J. Geometry* (to appear).
- [30] Jha, V., Johnson, N.L. Derivable nets defined by central collineations. *Information and Systems Sci.* (submitted).
- [31] Jha, V., Johnson, N.L. Regular parallelisms from translation planes. *Discrete Math.* (to appear).
- [32] Jha, V., Johnson, N.L. On collineation groups of translation planes of order q^4 . *Inter. J. Math. and Math. Sci.* (to appear).

- [33] Jha, V., Johnson, N.L. Baer-elation planes. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (to appear).
- [34] Jha, V., Johnson, N.L. On regular t -packings. Note di Mat. (Lecce) (to appear).
- [35] Jha, V., Johnson, N.L. Notes on the derived Walker planes. J. Comb. Theory (to appear).
- [36] Jha, V., Johnson, N.L. On spreads of characteristic p admitting nonsolvable groups whose Sylow p -groups are planar. Osaka J. Math. 22(1985), 365-377.
- [37] Jha, V., Johnson, N.L. The linearity question for abelian groups in translation planes (submitted).
- [38] Jha, V., Johnson, N.L., Wilke, F.W. Translation planes of order q^2 that admit a group of order $q^2(q-1)$; Bartolone's Theorem. Rend.: Circ. Mat. Palermo 33 (1984), 407-424.
- [39] Johnson, N.L. The maximal special linear groups that act on translation planes. Boll. U.M.I. (to appear).
- [40] Johnson, N.L. The translation planes of Ott-Schaeffer. Arch. Math. 36(1980), 183-192.
- [41] Johnson, N.L. On Desarguesian extensions of elation nets J. Geom. 23(1984), 72-77.
- [42] Johnson, N.L. The translation planes of order 16 that admit $SL(2,4)$. Annals Discr. Math. 14(1982), 225-236.
- [43] Johnson, N.L. The translation planes of order 16 admitting nonsolvable collineation groups. Math. Z. 185(1984) 355-372.

- [44] Johnson, N.L. The geometry of $GL(2,q)$ in translation planes of even order q^2 . Intern. J. Math. and Math. Sci. 1(1978), 447-458.
- [45] Johnson, N.L. Representations of $SL(2,4)$ on translation planes of even order. J. Geom. 21(1983), 184-200.
- [46] Johnson, N.L. Foulser's Covering Theorem. Note di Mat. Lecce (to appear).
- [47] Johnson, N.L. Derivable chains of planes. Boll. U.M.I. no. 2 (1969), 167-184.
- [48] Johnson, N.L., Ostrom, T.G. Translation planes of characteristic two in which all involutions are Baer. J. Algebra 2(54) (1978), 291-315.
- [49] Johnson, N.L., Rahilly, A. On elations of derived semifield planes. Proc. London Math. Soc. (3) 35(1977), 76-88.
- [50] Johnson, N.L., Wilke, F.W. Translation planes of order q^2 that admit a collineation group of order q^2 . Geom. Ded. 15(1984), 293-312.
- [51] Kantor, W.M. On point transitive affine planes. Israel J. Math. 42(1982), 227-234.
- [52] Lüneburg, H. Charakterisierungen der endlichen Desarguesschen Projektiven Ebenen. Math. Z. 85(1964), 419-450.
- [53] Lunardon, G. On regular parallelisms in $PG(3,q)$. Discrete Math. 51(1984), 229-235.
- [54] Menichetti, G. Sulle radici dei polinomi affini, "Combinatorics '84," (to appear).

- [55] Ostrom, T.G. Linear transformations and collineations of translation planes. *J. Algebra* 3(14) (1970), 405-416.
- [56] Ostrom, T.G. Elementary abelian 2-groups in finite translation planes. *Arch. Math.* 36(1981).
- [57] Ott, U. Über eine neue klasse endlicher translations-ebene, *Math. Z.* 143(1975), 181-185.
- [58] Prohaska, O. Endliche ableitbare affine Ebenen. *Geom. Ded.* 1(1972), 6-17.
- [59] Prohaska, O., Walker, M. Unpublished notes on translation planes.
- [60] Schaeffer, H. Translationsebenen, auf denen die gruppe $SL(2, p^n)$ operiert. *Diplom. Univ. Tübingen*, 1975.
- [61] Vaughan, T.P. Polynomials and linear transformations over finite fields. *J. Reine Angew. Math.* 262(1974), 179-206.
- [62] Walker, M. On translation planes and their collineation groups. *Thesis, Westfield College, Univ. London*, 1973.
- [63] Walker, M. Spreads covered by derivable partial spreads. *J. Comb. Theory, Ser. A(2)* 38(1985), 113-130.
- [64] Yaqub, J.C.D.S. On two theorems of Lüneburg. *Arch. Math.* 17(1966), 485-488.
- [65] Zsigmondy, K. Zur theorie der Potenzreste. *Monatsch. Math. Phys.* 3(1892), 265-284.

Norman L. Johnson
Department of Mathematics
The University of Iowa
Iowa City, IA 52242

INDICE

- I. Un sillabario dei piani di traslazione.
- II. Sulla struttura dei piani di traslazione di ordine q^2 che hanno un gruppo di collineazioni di ordine q^2 ; l'orbita regolare.
- III. La forma della rete derivabile in piani di traslazione di dimensione due.
- IV. Involuzioni di Baer nei piani di traslazione che hanno ampi gruppi di elazioni.
- V. Reti derivabili che sono costruite mediante collineazioni centrali e piani di traslazione di Baer-elazione.
- VI. Piani di traslazione di ordine q^2 che hanno un gruppo di collineazioni di ordine q^2 che non agisce regolarmente.
- VII. Piani di traslazione di ordine p^t che hanno un gruppo di collineazioni isomorfo a $SL(2, p^r)$ con r maggiore di $t/2$.
- VIII. Piani di traslazione di ordine q^2 , q pari, che hanno 2-sottogruppi di Baer di ordine maggiore di $q^{1/2}$.
- IX. Fibrazioni di $PG(3, 2^s)$ che hanno gruppi di proiettività di ordine 2^s .
- X. Piani di traslazione di ordine n con gruppi abeliani di collineazioni di ordine n .

- XI La questione della linearità per i gruppi abeliani nei piani di traslazione.
- XII. Fibrazioni di caratteristica p che ammettono gruppi nonsolubili i cui p -sottogruppi di Sylow sono gruppi planari.
- XIII. Parallelismi regolari e piani di traslazione.