4. SPETTRO DI UN RIVESTIMENTO RIEMANNIANO: RIDUZIONE AL CASO NON RAMIFICATO.

4.1. Sia $\pi: (\bar{M},\bar{g}) \longrightarrow (M,g)$ un rivestimento riemanniano ramificato ad h fogli di una varietà riemanniana connessa compatta senza bordo (M,g), di cui indichiamo con $\bar{A}\subset\bar{M}$ l'insieme dei punti di ramificazione; poniamo $A=\pi(\bar{A})\subset M$ sicché $\pi^{-1}(A)\supset\bar{A}$.

(4.1.1) LEMMA. *Con le notazioni precedenti, supponiamo che Vol A = 0. Se $f\in H^1(M)$, allora $f\circ\pi\in H^1(\bar{M})$ e risulta*

$$||f\circ\pi||^2_{H^1(\bar{M})} = h\, ||f||^2_{H^1(M)}.$$

Dim. Per ogni $x\in M\setminus A$ consideriamo una carta di dominio U contenente x e contenuto in un dominio fondamentale del rivestimento, per cui sia $\pi^{-1}(U)=U^1\cup...\cup U^h$, unione disgiunta di aperti di $\bar{M}$, e poniamo $y_p=\pi^{-1}(x)\cap U^p$, $p=1,...,h$. La funzione $s_p: U \longrightarrow U^p$ definita da $s_p(x)=y_p$ è un'isometria tra U ed U^p $\forall p$ e risulta:

(4.1.2) $$||f\circ\pi||^2_{L^2(\bar{M})} = h\, ||f||^2_{L^2(M)}.$$

Infatti, osservato che Vol A = 0 implica Vol $\pi^{-1}(A) = 0$, si ha per il teorema di Fubini:

$$||f\circ\pi||^2_{L^2(\bar{M})} = \int_{\bar{M}}[(f\circ\pi)(y)]^2 dv_{\bar{g}}(y) = \int_M \sum_{y\in\pi^{-1}(x)}[f(x)]^2 dv_g(x) = h\, ||f||^2_{L^2(M)}.$$

Risulta anche:

(4.1.3) $$||d(f\circ\pi)||^2_{L^2(\bar{M})} = h\, ||df||^2_{L^2(M)}.$$

Infatti considerata una base mobile ortonormale $(X_1,...,X_n)$, $n = \dim M$, su U, i vettori $X_1{}^p = s_{p*}X_1, \dots, X_n{}^p = s_{p*}X_n$ costituiscono una base mobile ortonormale su U^p. Risulta allora, con riferimento alle basi mobili duali, anch'esse ortonormali:

$$(d(f\circ\pi)(y_p))^i = (d(f\circ\pi)(y_p))(X_i{}^p) = (X_i{}^p)_{y_p}(f\circ\pi) = ((s_{p*})X_i)(f\circ\pi) =$$

$$= (X_i f)(x) = (df(x))^i$$

$\forall$ i=1,...,n, quindi

$$|d(f\circ\pi)(y_p)|^2 = |df(x)|^2 \qquad \forall\ p=1,\dots,h$$

e di conseguenza, sempre per il teorema di Fubini, la (4.1.3). Le (4.1.2) e (4.1.3) danno, per la definizione (2.3.2) della norma in H^1, la conclusione._|

(4.1.4) OSSERVAZIONE. Il lemma (4.1.1) così come le (4.1.2) e (4.1.3) continuano ad essere valide se si considera un rivestimento riemanniano ad h fogli di una varietà *con bordo*, pur di sostituire gli spazi H^1 con gli spazi $H^1{}_D$ corrispondenti: la dimostrazione del lemma procede infatti inalterata considerando $f\in H^1{}_D(M)$ e punti $x\in M\backslash(\partial M\cup A)$. L'utilità della considerazione di tali rivestimenti apparirà chiara nei successivi nn. 4.3 e 6.3.

4.2. Con le notazioni introdotte in 4.1 abbiamo allora:

(4.2.1) TEOREMA. *Se E è una parte qualsiasi di M, risulta:*

$$\text{cap}\ \pi^{-1}(E) \le h\ \text{cap}\ E.$$

Dim. Sia infatti u^E l'unica funzione che realizza la capacità di E: risulta allora (v. proposizione (3.2.3))

$$\text{cap}\ E = ||du^E||^2_{L^2(M)}$$

ove u^E è caratterizzata da:

a) $u^E\in H^1(M)$;

b) $\int_M u^E dv_g = 0$;

c) $u^E-1_M\in H^1{}_0(M\backslash E)$, cioè $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ f_\varepsilon\in C^\infty{}_0(M\backslash E)$ per cui:

i) $f_\varepsilon\in H^1(M)$;

ii) $f_\varepsilon|_U = 0$, essendo U un aperto di M contenente E;

iii) $||f_\varepsilon-(u^E-1_M)||^2_{H^1(M)} < \varepsilon$.

Ma allora la funzione $u^E\circ\pi$ è tale che:

a') $u^E \circ \pi \in H^1(\bar{M})$ per il lemma (4.1.1);

b') $\int_{\bar{M}} (u^E \circ \pi)(y) dv_{\bar{g}}(y) = h \int_M u^E(x) dv_g(x) = 0$ per il teorema di Fubini;

c') la funzione $f_\varepsilon \circ \pi$ è tale che:

i') $f_\varepsilon \circ \pi \in H^1(\bar{M})$ per il lemma (4.1.1);

ii') $f_\varepsilon \circ \pi|_{\pi^{-1}(U)} = 0$ per ii), e $\pi^{-1}(U)$ è un aperto di $\bar{M}$ contenente $\pi^{-1}(E)$;

iii') risulta, sempre per il lemma (4.1.1) e per iii):

$$||f_\varepsilon \circ \pi - (u^E \circ \pi - 1_M \circ \pi)||^2_{H^1(\bar{M})} = h\, ||f_\varepsilon - (u^E - 1_M)||^2_{H^1(M)} < h\varepsilon$$

il che vuol dire che $u^E \circ \pi - 1_{\bar{M}} \in H^1{}_0(\bar{M} \setminus \pi^{-1}(E))$.

Pertanto $u^E \circ \pi \in S_{\pi^{-1}(E)}$ e per la (4.1.3) si ha allora la conclusione:

$$\mathrm{cap}\, \pi^{-1}(E) \leq ||d(u^E \circ \pi)||^2_{L^2(\bar{M})} = h\, ||du^E||^2_{L^2(M)} = h \,\mathrm{cap}\, E. \_|$$

Il teorema ora dimostrato ammette due importanti corollari.

(4.2.2) COROLLARIO. *Se B è un sottoinsieme di M per cui cap $B = 0$, allora cap $\pi^{-1}(B) = 0$.*

(4.2.3) COROLLARIO. *Se $\{E_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ è una successione di parti di M tale che per $k \longrightarrow \infty$ sia lim cap $E_k = 0$, allora $\{\pi^{-1}(E_k)\}_{k \in \mathbf{N}}$ è una successione di parti di $\bar{M}$ per cui lim cap $\pi^{-1}(E_k) = 0$.*

Dim. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ k_\varepsilon$ tale che cap $E_k < \varepsilon$ per $k > k_\varepsilon$; allora per $k > k_\varepsilon$ è cap $\pi^{-1}(E_k) < h\varepsilon$ per il teorema (4.2.1). _|

4.3. Il teorema (4.2.1) ed i suoi corollari, insieme ai risultati di 3.3, permettono in pratica, per quel che riguarda i problemi spettrali, di ridursi a rivestimenti non ramificati.

In effetti se $\pi: (\bar{M}, \bar{g}) \longrightarrow (M, g)$ è un rivestimento riemanniano ramificato ad h fogli della varietà riemanniana connessa compatta senza bordo (M,g), con insieme di ramificazione $\bar{A} \subset \bar{M}$, e se $A = \pi(\bar{A})$ è chiuso ed ha capacità nulla, anche $\pi^{-1}(A)$ ha capacità nulla per (4.1.5); allora, per il teorema (3.3.1), si ha coincidenza fra $\mathrm{Spec}^D(M \setminus A)$ e Spec M ed anche tra $\mathrm{Spec}^D(\bar{M} \setminus \pi^{-1}(A))$ e Spec $\bar{M}$.

Per essere più precisi, $\forall\ \varepsilon > 0$ consideriamo un aperto E_ε di M, con bordo C^∞ a tratti, contenente A con cap $E_\varepsilon < \varepsilon$; allora $\pi^{-1}(E_\varepsilon)$ è un aperto di $\bar{M}$ contenente $\pi^{-1}(A)$ con cap $\pi^{-1}(E_\varepsilon) < h\varepsilon$ per (4.2.1).

$\pi: (\bar{M} \setminus \pi^{-1}(E_\varepsilon), \bar{g}) \longrightarrow (M \setminus E_\varepsilon, g)$ è un rivestimento riemanniano non ramificato ad h fogli di varietà *con bordo* del tipo considerato in (4.1.4). Considerando percio' gli spettri di Dirichlet, si ha per (4.2.3) e (3.3.2) che per $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$\lim \mathrm{Spec}^D(\bar{M} \setminus \pi^{-1}(E_\varepsilon)) = \mathrm{Spec}\ \bar{M},$$

$$\lim \mathrm{Spec}^D(M \setminus E_\varepsilon) = \mathrm{Spec}\ M.$$

Siamo quindi ricondotti, nello studio dei legami fra Spec $\bar{M}$ e Spec M, allo studio dei legami fra gli spettri corrispondenti di rivestimenti riemanniani non ramificati di varietà con bordo.

5. RISULTATI HILBERTIANI PER RIVESTIMENTI RIEMANNIANI.

5.1. Per tutti i nn. 5 e 6 intendiamo che $\pi: (\bar{M}, \bar{g}) \longrightarrow (M, g)$ sia un rivestimento riemanniano non ramificato ad h fogli di varietà riemanniane connesse compatte; nel caso di varietà a bordo supponiamo che la restrizione di π a $\partial\bar{M}$ sia ancora un rivestimento riemanniano non ramificato ad h fogli di ∂M (cf. 4.3).

Per qualsiasi $\bar{f}: \bar{M} \longrightarrow \mathbf{R}$ (tale che $\bar{f}|_{\partial\bar{M}} = 0$ se $\partial\bar{M} \neq \emptyset$) definiamo la funzione $\varpi\bar{f}: M \longrightarrow \mathbf{R}$ ponendo: