1. SPETTRO DI FIBRATI VETTORIALI, RIVESTIMENTI E SUBMERSIONI RIEMANNIANI.

1.1. Data una varietà riemanniana connessa compatta senza bordo (M,g) di dimensione n, indichiamone con $\Delta = \Delta_M$ l'operatore di Laplace-Beltrami e con Spec $M = \{\lambda_i\}_{i\in \mathbf{N}^*}$, $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}\cup\{0\}$, l'insieme degli autovalori di Δ. Consideriamo le seguenti fibrazioni su M:

a) un fibrato vettoriale riemanniano $\pi: E \longrightarrow M$ di rango h, dotato di connessione D;

b) un rivestimento riemanniano ad h fogli $\pi: (\overline{M},\overline{g}) \longrightarrow (M,g)$;

c) una submersione riemanniana $\pi: (\overline{M},\overline{g}) \longrightarrow (M,g)$.

Nello spirito del "problema inverso" della geometria spettrale, che consiste nel cercare di ricavare informazioni geometriche dalla conoscenza dello spettro di una varietà, è naturale chiedersi quali legami possano stabilirsi fra lo spettro di uno spazio fibrato e lo spettro della sua base M. In questo contesto si possono cercare risultati di due tipi:

I. Risultati asintotici, concernenti cioè la traccia $Z_M(t) = \sum_{0}^{\infty}{}_i e^{-\lambda_i t}$ dell'operatore $e^{-\Delta t}$ e quella corrispondente per lo spazio totale;

II. Risultati sui singoli autovalori.

Il problema I è stato risolto da vari autori con lo stabilire <u>*diseguaglianze alla Kato*</u> ; precisamente, con riferimento ai tre casi presi in considerazione:

a) Se si indica con $\overline{\Delta} = D^*D$ il cosiddetto "laplaciano bruto" agente sulle sezioni del fibrato $\pi : E \longrightarrow M$, e con $\{\overline{\lambda}_i\}_{i\in \mathbf{N}^*}$ i suoi autovalori, posto $\overline{Z}(t) = \sum_{0}^{\infty}{}_i e^{-\overline{\lambda}_i t}$ si ha (HESS, SCHRADER e UHLENBROCK, [15], 1980):

(1.1.1) $\bar{Z}_E(t) \le \bar{Z}_{M\times\mathbf{R}^h}(t) = hZ_M(t) \quad \forall\, t > 0,$

ove $M\times\mathbf{R}^h$ indica il fibrato banale di rango h su M. Osserviamo esplicitamente che $\bar{\Delta}$ ha spettro discreto, contrariamente all'operatore di Laplace-Beltrami Δ_E (E non è compatto!); numerose proprietà geometriche di E possono però essere ricavate già dalla considerazione di $\bar{\Delta}$ (cf. [3] e [14]).

b) Indicato con $\bar{A}\subset\bar{M}$ l'insieme dei punti di ramificazione del rivestimento ad h fogli $\bar{M}$ di M, se codim $\bar{A} \ge 2$ si ha (TYSK, [19], 1986):

(1.1.2) $Z_{\bar{M}}(t) \le hZ_M(t) \quad \forall\, t > 0.$

c) Se π: $(\bar{M},\bar{g}) \longrightarrow (M,g)$ è una submersione riemanniana *a fibre totalmente geodetiche* e si indica con F la fibra tipo, allora (BERARD e GALLOT, [3], 1983 e, per via diversa, BESSON, [5], 1986):

(1.1.3) $Z_{\bar{M}}(t) \le Z_{M\times F}(t) = Z_M(t)\cdot Z_F(t) \qquad \forall\, t > O$

ove l'eguaglianza si ha se e solo se la submersione è quella banale MxF.

Osserviamo che i risultati richiamati permettono la stima di un numero finito di autovalori di una delle due varietà prese in considerazione di volta in volta, solo a partire dalla conoscenza dell'intero spettro dell'altra.

1.2. La situazione si presenta ben diversa quando si vuole confrontare i singoli autovalori degli spettri in esame.
Nel caso a) GALLOT e MEYER hanno dimostrato ([14], 1987) che $\forall$ $i\in\mathbf{N}$ si ha:

(1.2.1) $\bar{\lambda}_{i(h+1)} \ge [8(h+1)^2]^{-1}\lambda_{i+1}$

essendo h il rango del fibrato.

Nel caso di una submersione riemanniana a fibre totalmente geodetiche sono noti solo risultati parziali (BERARD-BERGERY e BOURGUIGNON, [1], 1982), in base ai quali un autovalore dello spazio totale è sempre somma di un autovalore della fibra e di un autovalore del cosiddetto "laplaciano orizzontale" (il cui spettro in generale contiene lo spettro della base ma non coincide con esso); non si sa però quali fra tali somme siano effettivamente ammissibili, dipendendo tale scelta dalla geometria delle varietà. Ancor meno è noto nel caso che le fibre siano varietà minimali dello spazio totale.

Per quanto riguarda il caso b) del quale ci occuperemo in particolare, dimostreremo nel n. 6 una diseguaglianza generale fra gli autovalori del rivestimento $\bar{M}$ e quelli della base M. Rimandando al successivo 1.3 per un'esposizione del piano di lavoro, limitiamoci per ora alla seguente osservazione riguardo al tipo di risultato che si può sperare di ottenere. Poiché la diseguaglianza (1.1.2) diviene un'eguaglianza se il rivestimento è quello banale $\bar{M}_0$ = unione disgiunta di h copie di M, ci si può domandare se ad essa corrispondono diseguaglianze come $\bar{\lambda}_{hi}(\bar{M}) \geq \bar{\lambda}_{hi}(\bar{M}_0) = h\lambda_i(M)$ fra i singoli autovalori. In generale ciò è da escludere, come mostra il seguente esempio.

(1.2.2) ESEMPIO. La sfera unitaria di $\mathbf{R}^{n+1}$ dotata della metrica canonica indotta (S^n,can) è un rivestimento riemanniano a 2 fogli dello spazio proiettivo $(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}),\mathrm{can})$. Se $i \leq (n+1)/2$ abbiamo da [4], p. l59 e seg.:

$$\bar{\lambda}_{2i}(S^n) = n < \lambda_i(\mathbf{P}^n(\mathbf{R})) = 2(n+1).$$

1.3. Nel seguito (n. 2) daremo alcuni richiami sullo spettro di una varietà riemanniana compatta, con o senza bordo (nel caso a bordo le condizioni al contorno saranno le condizioni di Dirichlet oppure di Neumann) e sulla caratterizzazione variazionale degli autovalori: per questa parte un riferimento molto valido e ormai classico è il libro [4] di BERGER, GAUDUCHON e MAZET; una esposizione chiara ed aggiornata si trova nel libro [2] di BERARD.

Daremo poi nel n. 3 la definizione dello spettro di Dirichlet di M\A, essendo A un sottoinsieme qualunque di una varietà riemanniana connessa compatta senza bordo M: definita la capacità di A vedremo che tale spettro coincide con quello di M se e solo se A ha capacità nulla (riferimenti: CHAVEL e FELDMAN, [8], e COURTOIS, [10]).

Considerato quindi un rivestimento riemanniano ramificato ad h fogli $\pi: (\overline{M},\overline{g}) \longrightarrow (M,g)$ vedremo nel n. 4 che se l'insieme $\overline{A}\subset\overline{M}$ dei punti di ramificazione ha capacità nulla, allora anche $A = \pi(\overline{A})$ e $\pi^{-1}(A)$ hanno capacità nulla: unitamente alle considerazioni del n. 3 cio' permetterà di ricondursi al caso di un rivestimento riemanniano non ramificato di varietà a bordo.

Nei nn. 5 e 6 dimostreremo il risultato principale sullo spettro dei rivestimenti riemanniani per i quali cap A = 0, A chiuso:

$$\overline{\lambda}^*_{i(h+1)} > [8(h+1)^2]^{-1}\lambda^*_{i+1} \tag{1.3.1}$$

ove * sta ad indicare che ci si riferisce allo spettro di Dirichlet nel caso di varietà a bordo; inoltre si vedrà facilmente che la diseguaglianza di Kato-Tysk (1.1.2) vale ancora sotto l'ipotesi cap A = 0, A chiuso, meno restrittiva dell'ipotesi codim $\overline{A} \geq 2$.

Concluderemo nel n. 7 con un'applicazione geometrica: la stima dell'indice di una superficie minimale di $\mathbf{R}^3$ tramite la curvatura totale. Per quel che riguarda le superficie minimali, un'esauriente trattazione si può trovare nel libro [16] di LAWSON.

2. SPETTRO DI UNA VARIETA'. CARATTERIZZAZIONE VARIAZIONALE DEGLI AUTOVALORI.

2.1. Sia (M,g) una varietà riemanniana connessa, compatta, con o senza bordo. L'<u>*operatore di Laplace-Beltrami*</u> Δ_M o ɿrevemente Δ se non vi è possibilità di confusione, è un operatore differenz ɿeare del 2°