Capitolo VII. *Il Continuo.*

Uno dei maggiori successi della teoria alternativa è quello di aver offerto una proposta di chiarimento del problema sulla natura e le caratteristiche del *continuo*. Se si cerca d'analizzare tale concetto con la Matematica classica, ci si ritrova di fronte al problema posto dall'ipotesi del continuo, che, in sostanza, è una domanda lasciata aperta, su quale sia la "struttura" insiemistica dell'insieme dei numeri reali. Ma il problema è più profondo. Se è vero che l'identificazione del continuo della retta con l'insieme dei numeri reali, permette i risultati positivi della Geometria analitica e della Fisica, d'altra parte c'è l'affermata ipotesi di discretezza della Natura, sperimentalmente provata in più modi. E questa situazione è ben presente nella nostra coscienza di uomini d'oggi, in cui gli aspetti discreti e continui devono convivere. Per esempio, il foglio su cui scriviamo ci sembra un continuo, ad un'osservazione macroscopica, ma sappiamo che un'analisi più approfondita ci toglierebbe l'illusione del continuo. Le analisi fisiche affermano poi che gli oggetti "continui" sono discreti ed anzi sono costituiti da un "numero" finito di "elementi".

Per potere presentare la versione alternativa del continuo, c'è bisogno di alcune definizioni preliminari.

Sia $(X_n)_{n\in \mathrm{FN}}$ una famiglia di classi, ciascuna definibile insiemisticamente. Posso considerare la classe $\{X_n \mid n\in \mathrm{FN}\}$; è una classe, ma non dell'universo esteso, dunque, stando a Vopěnka, non posso dire quali siano i suoi elementi, anche se intuitivamente essi sono proprio le classi che costituiscono la famiglia. Si può "costruire" ora la classe $X = \bigcap(\{ X_n \mid n\in \mathrm{FN}\})$, definita come

$$X = \bigcap(\{ X_n \mid n\in \mathrm{FN}\}) = \{y \mid (\forall n)(y\in X_n)\}.$$

DEFINIZIONE. Classi di questo tipo, intersezioni di famiglie di classi definibili, indiciate da FN, sono dette *Π-classi*.

Sia ora A una classe insiemisticamente definibile, si pone:

DEFINIZIONE. Una classe $\doteq$ è una *Π-equivalenza su A* se e solo se $\doteq$ è una Π-classe ed è una relazione di equivalenza su A.

Questa nozione è collegata a nozioni di Topologia classica, nel senso che dato un insieme a ed una relazione $\doteq$ che sia una Π-equivalenza su a; la coppia $\langle a, \doteq \rangle$ è un esempio di un particolare spazio uniforme. [5]

Per illustrare come la nozione di base di Π-equivalenza renda conto dell'idea alternativa di continuo, è necessaria ancora di una nozione tecnica:

DEFINIZIONE. Una successione $(R_n)_{n \in F\mathbb{N}}$ è una *sequenza generatrice* di una relazione di equivalenza = su una classe definibile A se e solo se:

(a) $R_0 = A \times A$;

(b) per ogni $n \in F\mathbb{N}$, R_n è una classe insiemisticamente definibile ed è una relazione riflessiva e simmetrica su A;

(c) per ogni $n \in F\mathbb{N}$ ed ogni $x, y, z \in A$, se $x\, R_{n+1} y$ e $y\, R_{n+1}\, z$, allora $x\, R_n\, z$;

(d) $\doteq\, = \bigcap(\{ R_n \mid n \in F\mathbb{N}\})$.

Il concetto di Π-equivalenza è legato a quella di sequenza generatrice in quanto se $(R_n)_{n \in F\mathbb{N}}$ è una sequenza generatrice di $\doteq$, allora $\doteq$ è una Π-equivalenza.

Certo che, a prima vista, questi concetti sembrano avere poca evidenza intuitiva ed essere ben poco legati al problema del continuo. Un esempio può però fornire la giustificazione della scelta di tali definizioni.

Consideriamo un mucchio di sabbia. Il fatto che esso ci appaia discreto o continuo dipende dalla distanza da cui lo osserviamo e dalla tecnica che usiamo per osservarlo. Sappiamo che il mucchio è composto di

---

[5] Per completezza ricordo la definizione classica di spazio uniforme (cfr. [W]): $\langle X, \eta \rangle$ è uno *spazio uniforme* se e solo se è generato da una base $\mathcal{E}$ di filtro su $\mathcal{P}(X \times X)$, costituita da relazioni $N \subseteq X \times X$, riflessive, con le condizioni

$$(\forall N \in \mathcal{E})(\exists N' \in \mathcal{E})(N^{-1} \subseteq N');$$

$$(\forall N \in \mathcal{E})(\exists N' \in \mathcal{E})(N' \cdot N' \subseteq N');$$

essendo $\mathcal{E}$ base di filtro se $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$, $\mathcal{E} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{E}$ e

$$(\forall N, N' \in \mathcal{E})(\exists N'' \in \mathcal{E})(N'' \subseteq N \cap N').$$

granelli, ciascuno con una sua precisa individualità, ben distinto e separato dagli altri, ma se osserviamo il mucchio da lontano, non possiamo distinguere i vari granelli. Man mano che ci avviciniamo o miglioriamo gli strumenti visivi, possiamo cogliere le distinzioni.

Ecco il significato di queste relazioni: se tre oggetti x,y,z sono visti come *indistinguibili* con lo strumento R_{n+1}, cioè x R_{n+1}y e y R_{n+1}z, non è detto che x R_{n+1}z, perché col criterio R_{n+1} siamo in grado di distinguere x da z, ma non x da y, né y da z.

Le relazioni di una sequenza generatrice vanno viste allora come criteri di indiscernibilità, con strumenti o metodi diversi. Si passa dal criterio più "grossolano" di tutti, $R_0 = A \times A$, secondo il quale due qualunque elementi di A sono indiscernibili, ad uno più "raffinato" R_1, ad uno ancora più raffinato R_2, e così via. La condizione che ogni relazione sia riflessiva, permette di affermare che, per ogni $y \in A$, $\langle y,y \rangle \in R_{n+1}$, per cui, per ogni coppia $\langle x,y \rangle \in R_{n+1}$, grazie alla condizione "pseudo-transitiva" (c) della definizione, vale $\langle x,y \rangle \in R_n$, dunque $R_{n+1} \subseteq R_n$. In questo senso le relazioni di una sequenza generatrice sono una il raffinamento della precedente. La proprietà "pseudo-transitiva" dice poi che se col criterio R_{n+1}, x e y sono tra loro indiscernibili e così pure y e z sono tra loro indiscernibili , non è detto che x e z siano tra loro indiscernibili con lo stesso crirerio, ma lo sono, senza dubbio, col criterio R_n. Si può leggere allora R_{n+1} come un miglioramento del metodo (o strumento) di osservazione R_n, in quanto fa apparire distinti elementi prima indistinguibili.

Non so se Vopěnka fosse al corrente del *paradosso dello zucchero di Armstrong*, cfr. [K] perché sorto in un contesto di Economia matematica. Esso è basato sul fatto che l'aggiunta di un granello di zucchero ad una tazzina di caffé non ne altera (apprezzabilmente) il sapore. Ma come osserva Armstrong, l'essere indiscernibile è una relazione banalmente riflessiva, simmetrica, ma non transitiva. Vopěnka ne tiene conto: la transitività è vista da lui come "limite" (inverso), cioè come intersezione di relazioni riflessive e simmetriche. La relazione $\doteq$ che si ottiene come intersezione sta ad indicare l'indiscernibilità *assoluta* con tutti i metodi a disposizione.

Si può obiettare che la definizione reca in sé diverse limitazioni che possono sembrare superflue: la classe A deve essere insiemisticamente definibile, così come tutte le relazioni ed esse sono indiciate "solo" dai naturali finiti. Questa lettura è però l'unica proponibile, per vari motivi tecnici. Vopěnka in realtà chiama *indiscernibilità* una Π-relazione *compatta*, ove compatta significa che esistono due elementi x, y tali che $x \neq y$ ma $x \doteq y$. Un esempio di tale tipo di indiscernibilità è offerto dalla relazione mostrata per elementi di $B\mathbb{Q}$, l'essere infinitamente vicini.

Bibliografia

[B] E. Beth, **The Foundations of Mathematics**, North Holland, Amsterdam (1959).

[Be] P. Bernays, **Axiomatic Set Theory**, North Holland, Amsterdam (1958).

[C] P. Cohen, **Set Theory and the Continuum Hypothesis**, W.A. Benjamin Inc., New York (1966); traduzione italiana **La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo**, Feltrinelli, Milano (1973).

[D] T. Dantzig, **Il numero - Linguaggio della scienza**, La Nuova Italia, Firenze (1965).

[F1] G. Frege, **Begriffschrift**, Halle (1879), ripubblicato in [He], pp. 1-82 e in [F].

[F2] G. Frege, **Die Grundlagen der Arithmetik**, Breslau (1884), Traduzione inglese Blackwell, Oxford (1950), traduzione italiana in [F].

[F] G. Frege, **Logica ed Aritmetica**, (a cura di C. Mangione) P. Boringhieri, Torino (1965).

[G1] K. Gödel, *Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.* Monatsh. Math. Phys. **38** (1931), pp. 173-198, ripubblicato in [He] pp. 596-616.

[G2] K. Gödel, **The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypotesis with the Axiom of Set Theory**, Princeton Univ. Press, Princeton (1940).