assicura che, ad esempio in **NBG**, ogni classe contenuta in un insieme è un insieme. Ciò è ovvio se classe vuol dire "grande" e insieme vuol dire "piccolo", per cui una parte di un ente piccolo è necessariamente piccolo. Ma nella teoria alternativa, classe vuol dire mal definita o inafferrabile, per cui può esserci una classe che è piccola ma mal definita, contenuta in un insieme. Però se la classe è insiemisticamente definibile è un insieme. Ne sono esempi la collezione dei capelli che se sono tolti dalla testa di un uomo dotato di folta capigliatura, non lo rendono calvo; la collezione degli antenati umani di Charles Darwin, discendenti diretti di una stessa scimmia; la collezione dei pullover verdi di un fornito negozio di maglieria; la collezione dei numeri naturali che non si possono definire con 100 parole.

In un certo senso la definizione di classe di Vopěnka si presenta come un nuovo tentativo matematico di formulare la vaghezza, diverso dall'approccio fuzzy, ma con esso collegato, se pure in modo non immediato.

L' assioma di infinito (il primo vero assioma alternativo) viene formulato dicendo

$$\boxed{\textbf{V8}\ (\exists X)(\exists x)(X \subseteq x \wedge \neg Set(X)).}$$

Nel seguito indicherò con il nome di *seminsieme* Sms(X) una classe X contenuta in un insieme e dirò che un seminsieme è proprio se non è un insieme. Dunque l'assioma di infinito dice che esiste un seminsieme proprio.

Capitolo V. *L'assioma di prolungamento e gli altri assiomi alternativi*

1) Assioma di prolungamento.

L'assioma di infinito sarà un caso particolare di uno più generale e molto applicato: l'Assioma di prolungamento. Per presentarlo ho bisogno di premettere una nozione alternativa che mi qualifichi un ente che si comporti come l'insieme dei numeri naturali, dal punto di vista dell'ordine. Per questo si definisce il concetto di *classe numerabile* come segue:

DEFINIZIONE. Una coppia $\langle A,R\rangle$ [4] è detta *un ordinamento di tipo ω* se

(i) R è una relazione riflessiva, transitiva, antisimmetrica (*ordine*) su A e inoltre è *lineare*, cioè $(\forall x,y\in A)(xRy \vee yRx \vee x=y)$.

(ii) A è una classe infinita (cioè contiene seminsiemi propri)

(iii) per ogni $x \in A$, $R^*(x)A = \{y \mid y\in A \wedge yRx\}$ è un insieme finito.

Si prova che se $\langle A,R\rangle$ è un ordinamento di tipo ω, R bene ordina A, nel senso che ogni *sottoclasse* di A non vuota ha minimo nella relazione R.

DEFINIZIONE. Una classe A è detta *numerabile* se esiste R tale che $\langle A,R\rangle$ è un ordinamento di tipo ω.

Si mostra, grazie anche al successivo assioma, che nessuna classe numerabile può essere un insieme o una classe definibile.

E arriviamo ora all'assioma di prolungamento, introducendo prima, un esempio di Vopěnka. Siamo in un paesaggio pianeggiante, in un giorno di buona visibilità (dico io). Guardiamo una strada che partendo dal punto dove siamo, si dirige verso l'orizzonte e scorgiamo, disposti a fianco della strada, dei paracarri (o pietre miliari). Dal nostro punto di vista, possiamo distinguere solo alcuni paracarri, perché come la strada si approssima all'orizzonte, i paracarri ci appaiono addensarsi. Da altre considerazioni sappiamo che i paracarri sono posti a distanza regolare uno dall'altro, ma noi possiamo vederne solo alcuni, in modo distinto. La collezione dei paracarri che vediamo è una classe, anzi una classe numerabile, perché da qualunque punto mi metta lungo la strada, ho lasciato dietro me un numero finito di paracarri. L'andamento lineare della strada mi garantisce che c'è un ordine lineare e che la classe è infinita (in senso alternativo) perché è classe propria, non riuscendo a distinguere tutti i paracarri. Quale conclusione traggo da questo paesaggio? Che la strada porta in un qualche posto (città), al di là della linea dell'orizzonte. Quindi la collezione dei paracarri tra il punto in cui mi trovo e la fine della strada è un insieme finito (in senso classico). Così una classe numerabile può essere e-

---

[4] ove $\langle A,R\rangle$ è data da $\{\{A\},\{A,R\}\}$, coppia ordinata di Kuratowski, però con classi, non insiemi.

stesa ad un insieme. In realtà l'assioma di Vopěnka viene esplicitato relativamente alle funzioni:

Assioma di prolungamento:

V9 Se F è una classe numerabile ed una funzione, allora esiste un insieme f, che è una funzione, tale che F ⊆ f.

In forma equivalente, ma più facilmente applicabile, se A è una classe numerabile e $\varphi(x)$ è una formula insiemistica tale che per ogni x ⊆ A, valga $\varphi(x)$, allora esiste un insieme a tale che A⊆a e $\varphi(a)$.

Detto così, sembra un'affermazione di "approssimazione": se la classe numerabile è approssimabile mediante insiemi x tali che $\varphi(x)$, allora non è $\varphi(A)$, ma c'è un sovrainsieme a di A tale che $\varphi(a)$.

Questo assioma è centrale nello sviluppo della teoria; ad esempio serve per provare che se X è una classe numerabile e $\mathcal{P}(X)$ è la classe dei sottinsiemi di X, allora $\mathcal{P}(X)$ è una classe numerabile, ad apparente dispetto del teorema di Cantor.

2) Altri assiomi.

Con l'assioma di prolungamento non si esauriscono gli assiomi veramente alternativi. Un successivo assioma è quello di codifica estensionale che ha come effetto quello di un'assioma di scelta per la teoria alternativa.

Per introdurre l'ultimo assioma è necessario fornire un nuovo ente che abbia, per la matematica alternativa, il ruolo dell'insieme dei numeri reali.

DEFINIZIONE. La coppia ordinata ⟨A,R⟩ si dice un ordine di tipo Ω se:

(i) R bene ordina A (anche rispetto alle classi: una classe non vuota B⊆ A ha minimo in R);

(ii) A non è numerabile (ma è classe infinita);

(iii) per ogni x∈A, $R^*(x) \cap A = \{y \mid y \in A \wedge yRx\}$ è una classe numerabile.

Conseguenza degli assiomi è l'esistenza di una classe A e di una relazione R tali che ⟨A,R⟩ sia un ordine di tipo Ω. A questo si giunge considerando una classe numerabile B e prendendo come A tutti i possibili ordini su B che rendono B di tipo ω. Ovviamente con costruzioni di questo tipo si esce dall'universo degli insiemi ed anche dall'universo esteso. Grazie all'assioma della codifica estensionale, che può essere interpretato come una forma della scelta, è possibile riportarsi all'universo degli insiemi ed all'universo esteso, anche con queste costruzioni.

Da ultimo si assume l'Assioma dei due cardinali che "sistema" definitivamente anche l'ipotesi del continuo e la generazione dei cardinali trasfiniti:

V10 Per ogni classe A, A è finita o numerabile, oppure esiste una relazione R tale $\langle A,R\rangle$ è di tipo Ω.

Dunque i tipi ω e Ω sono visti come i due (unici) cardinali trasfiniti ammessi. Ogni classe insiemisticamente definibile è di tipo Ω, ad esempio la classe V, universo degli insiemi.

Capitolo VI. *La Matematica nella Teoria alternativa degli insiemi*

1) I numeri naturali.

Nella teoria classica degli insiemi si può ricostruire la Matematica in quanto sono dati i procedimenti insiemistici e si costruiscono i numeri naturali e le relazioni ed operazioni su essi, prendendo spunto dalla costruzione dei numeri naturali. Si può dare in **ZF** la definizione di numero naturale, prima però alcune definizioni preliminari

(1) Tr(a), cioè $(\forall x)(x\in a \to x\subseteq a)$ (da leggersi "a *è transitivo*");

(2) Conn(a) cioè $(\forall x)(\forall y)(x\in a \wedge y\in a \to (x\in y \vee x = y \vee y\in x))$ (da leggersi "a *è connesso*");

(3) Sc(a) per $(\exists y)(a = y\cup\{y\})$ ((da leggersi "a *è un successivo*").

Con ciò, N(a), da leggersi *a è un naturale* può essere scritta come

$$Tr(a)\wedge Conn(a)\wedge (a = \emptyset \vee (Sc(a)\wedge (\forall x)(x\in a \to (x = \emptyset \vee Sc(x))).$$