un'iniezione da a a b, oppure un'iniezione da b ad a, oppure esiste una biezione tra a e b. Questo classicamente (ed esteso a tutti gli insiemi) è il principio di *tricotomia*, una delle formulazioni dell'assioma di scelta.

Si prova poi che ogni insieme non vuoto ha un elemento minimale rispetto all'inclusione, dunque l'affermazione che ogni insieme dell'universo degli insiemi è finito nel senso di Tarski.

Viene poi aggiunto uno schema di fondazione:

$$\boxed{\mathbf{V5}\ \ (\exists x)\varphi(x) \Rightarrow (\exists x)(\varphi(x) \wedge (\forall y \in x)(\neg\varphi(y)))}.$$

Capitolo IV. *Le classi e l'infinito alternativo.*

1) Finito alternativo.

Come si è visto nella postulazione fin qui presentata, ci si è limitati agli insiemi finiti, ritenendoli sufficienti per la presentazione della Matematica. Tuttavia la Matematica ha bisogno dell'infinito in varie costruzioni, dunque il problema ora è quello di ricatturare l'infinito all'interno del finito. Premetto che il concetto di infinito che si ottiene nella Matematica alternativa non è né quello *in atto* né quello *in potenza*. Per illustrarlo passo ad analizzare alcune esperienze psicologiche. Se si mostra un oggetto si intuisce facilmente che è *uno*. Se si mostrano assieme due oggetti e si chiede ad un interlocutore quanti sono, è probabile che venga data una risposta immediata, ottenuta senza che venga effettuato un conteggio. Se si registra alla lavagna l'esito della votazione per l'elezione di una commissione, si organizzano i risultati indicando i voti con segmenti non tutti disposti nello stesso modo, ad esempio:

questo perché alla domanda di quanti sono diciassette segni difficilmente si può rispondere con un colpo d'occhio, mentre se i segni sono raggruppati, cinque a cinque, ad esempio in uno dei due modi indicati, è più facile ottenere una risposta corretta. Forse i proprietari di greggi sono in grado di fornire con un colpo d'occhio una conta esatta di quanti capi di bestiame hanno. Tale abilità, il *senso del numero* di Dantzig, cfr. [D], pur se adeguatamente sviluppata, ha dei limiti. Non credo che un ricco possidente di ovini australiano possa comprendere con un'occhiata quante pecore sono presenti e quante sono mancanti.

Anche la possibilità concettuale di rappresentarci un insieme con tutti i suoi elementi, con un colpo d'occhio mentale, è necessariamente limitata. Quelli che riusciamo a "capire" o "afferrare" sono insiemi finiti, gli altri, a tutti gli effetti non lo sono, anche se hanno un "numero" finito di elementi. E' questo il punto di vista alternativo, che utilizza in positivo, la presupposta esistenza di limitazioni umane insuperabili, per fornire l'esistenza positiva di oggetti "infiniti" in quanto "non capibili" o "inafferrabili".

Ci si può chiedere se questa nozione alternativa di finito sia una "vera" nozione di finito. Nella Matematica classica sono state avanzate varie proposte assai diverse e non tutte tra loro equivalenti in **ZF**, dunque una "vera" nozione di finito non c'è. Ci sono però proprietà che vorremmo valide per insiemi finiti e che riteniamo indispensabili, quali le seguenti:

(i) se a è finito e $b \subseteq a$, allora b è finito;
(ii) se a è finito , allora $a \cup \{b\}$ è finito;
(iii) $a \cup b$ è finito se e solo se a e b sono finiti;
(iv) $\emptyset$ è finito e $\{a\}$ è finito;
(v) se $a,b \neq \emptyset$, $a \times b$ è finito se e solo se a e b sono entrambi finiti;
(vi) se a è finito, $\mathcal{P}(a)$ è finito.

Ebbene, se la nozione alternativa di finito soddisfa a queste (ed altre) proprietà, la si può ritenere una nozione di finito.

Resta il problema di vedere come caratterizzare matematicamente il concetto di *afferrabilità*. Anche Vopěnka però preferisce una definizione "negativa", soffermandosi sul concetto di infinito in senso alternativo.

2) Classi alternative.

Nella Matematica classica, in particolare con il sistema **NBG**, si è introdotto il concetto di classe, distinto da quello di insieme, facendo considerazioni di "taglia": le classi sono gli oggetti "troppo grandi" per essere ritenuti insiemi. Ma l'essere "troppo grande" è un attributo che può essere generalizzato considerando questo caso come caso particolare dell'essere "mal definito". Le classi di **NBG** sono mal definite, dal punto di vista degli insiemi, perché sono troppo grandi. Le classi alternative sono mal definite in ogni senso possibile, sempre dal punto di vista degli insiemi.

In realtà, Vopěnka le definisce male. Infatti afferma che *ogni proprietà di oggetti può essere considerata un oggetto. Una proprietà di oggetti intuita come oggetto è detta essere una classe.* Il fatto che un oggetto Φ sia una classe si indica con $Cls(\Phi)$.

Osservo che con questa formulazione, dati due insiemi a e b, la proprietà di "essere uguali ad a oppure uguali a b" è distinta dalla proprietà di "essere uguali a b oppure uguali ad a". Dunque se le proprietà sono classi, queste considerazioni fanno pensare che le classi si debbano trattare da un punto di vista intensionale. Così, usando le notazioni di Vopěnka, $\{\Phi \mid \varphi(\Phi)\}$ denota la proprietà come una classe, $\varphi(\Phi)$ potrebbe essere logicamente equivalente a $\psi(\Phi)$, ma $\{\Phi \mid \varphi(\Phi)\} \neq \{\Phi \mid \psi(\Phi)\}$, sono cioè oggetti *diversi.*

Nel sviluppare la Matematica bastano particolari classi, quelle dell'*universo esteso*, formato dalle classi $\{x \mid \varphi(x)\}$, ove $\varphi(x)$ è una proprietà degli insiemi dell'universo degli insiemi, anche se non espressa necessariamente con una formula insiemistica, ma con qualunque altra "cosa".

Formulato dunque un principio del tutto generale senza fare riferimento ad alcun linguaggio formale, c'è il rischio di ricatturare il paradosso di Russell, perché $R = \{\Phi \mid \Phi \notin \Phi\}$, è un oggetto e ci si può chiedere se appartiene a se stesso oppure no. Però attenzione: se $R \in R$, non ho alcun criterio per concludere $R \notin R$, in quanto il principio di Vopěnka non è formulato come **F2**, ma solo è un'enunciazione di esistenza di un oggetto di cui non so che fare, rispetto all'appartenenza. Vopěnka mette un assioma che qui riscrivo:

Assioma di esistenza delle classi.

V6 Per ogni proprietà $\varphi(x)$ di insiemi dell'universo degli insiemi, l'universo esteso contiene (?) la classe $\{x \mid \varphi(x)\}$.

Le parole sono queste, senza il punto interrogativo, però poi si capisce che, anche se con vari distinguo, *contiene* è sinonimo di *appartiene*. In seguito Vopěnka afferma:

Se X è un oggetto ed Y è una classe dell'universo esteso, allora $X \in Y$ se e solo se X è un elemento dell'universo degli insiemi e X ha la proprietà Y.

Il paradosso di Russell è evitato perché detto $R = \{x \mid x \notin x\}$, si ha che R è una classe dell'universo degli insiemi, ma non è un insieme, dunque non ha senso chiedere se $R \in R$.

Gli insiemi (dell'universo degli insiemi) vengono visti come particolari classi, grazie alla richiesta che $(\forall x)\mathrm{Cls}(x)$. Da notare però che questa affermazione non dice che gli insiemi siano classi dell'universo esteso, per cui c'è da distinguere tra l'insieme x e la classe $\{y \mid y \in x\}$. La cosa rimane in sospeso perché un successivo assioma di estensionalità viene formulato solo per classi dell'universo esteso, per le quali si riservano ora le lettere latine maiuscole.

$$\boxed{\mathbf{V7} \quad (\forall X,Y)(X = Y \Leftrightarrow (\forall u)(u \in X \Leftrightarrow u \in Y))}.$$

Credo però, anche confortato da quello che segue, che Vopěnka volesse dire che ogni insieme è una classe dell'universo esteso.

Una classe si dice *propria* se non è un insieme. Se X è una classe, $\{X\}$ è un insieme, che non è elemento dell'universo degli insiemi. Una classe X' è detta *insiemisticamente definibile* se esiste una formula insiemistica $\varphi(x)$ tale che $X = \{x \mid \varphi(x)\}$. In particolare $V = \{x \mid x = x\}$ e l'universo di tutti gli insiemi.

3) Infinito alternativo.

Se dunque le classi sono la formulazione matematica del concetto di "mal definito", un insieme lo dico *infinito* (in senso alternativo) se contiene una classe propria. Si ha così che a è *finito* (in senso alternativo) se

$$(\forall X)(X \subseteq a \Rightarrow \mathrm{Set}(X)).$$

Ovviamente le considerazioni classiche contraddicono l'esistenza di insiemi infiniti in questo modo, dato che classicamente ogni insieme è finito, ma uno dei motivi è che il principio di isolamento o comprensione assicura che, ad esempio in **NBG**, ogni classe contenuta in un insieme è un insieme. Ciò è ovvio se classe vuol dire "grande" e insieme vuol dire "piccolo", per cui una parte di un ente piccolo è necessariamente piccolo. Ma nella teoria alternativa, classe vuol dire mal definita o inafferrabile, per cui può esserci una classe che è piccola ma mal definita, contenuta in un insieme. Però se la classe è insiemisticamente definibile è un insieme. Ne sono esempi la collezione dei capelli che se sono tolti dalla testa di un uomo dotato di folta capigliatura, non lo rendono calvo; la collezione degli antenati umani di Charles Darwin, discendenti diretti di una stessa scimmia; la collezione dei pullover verdi di un fornito negozio di maglieria; la collezione dei numeri naturali che non si possono definire con 100 parole.

In un certo senso la definizione di classe di Vopěnka si presenta come un nuovo tentativo matematico di formulare la vaghezza, diverso dall'approccio fuzzy, ma con esso collegato, se pure in modo non immediato.

L' <u>assioma di infinito</u> (il primo vero assioma alternativo) viene formulato dicendo

$$\boxed{\mathbf{V8}\ \ (\exists X)(\exists x)(X \subseteq x \wedge \neg \mathrm{Set}(X)).}$$

Nel seguito indicherò con il nome di *seminsieme* Sms(X) una classe X contenuta in un insieme e dirò che un seminsieme è proprio se non è un insieme. Dunque l'assioma di infinito dice che esiste un seminsieme proprio.

Capitolo V. *L'assioma di prolungamento e gli altri assiomi alternativi*

<u>1) Assioma di prolungamento.</u>

L'assioma di infinito sarà un caso particolare di uno più generale e molto applicato: l'<u>Assioma di prolungamento</u>. Per presentarlo ho bisogno di premettere una nozione alternativa che mi qualifichi un ente che si comporti come l'insieme dei numeri naturali, dal punto di vista dell'ordine. Per questo si definisce il concetto di *classe numerabile* come segue: