

La Teoria Alternativa degli Insiemi, sue ragioni e confronto con teorie classiche. (**)

Capitolo I. *La formalizzazione della Teoria degli Insiemi.*

1) Introduzione.

Parlare di matematica alternativa ha oggi un connotato tecnico che cercherò di illustrare brevemente in seguito. Il punto centrale della ricostruzione alternativa è però la Teoria degli Insiemi usata come teoria fondazionale. La scuola cecoslovacca ha inteso rifondare la matematica partendo, come aveva fatto o proposto Cantor, dalla Teoria degli Insiemi, ma utilizzando una interpretazione degli insiemi sostanzialmente diversa da quella classica e questo potrebbe essere visto come una nuova proposta, nel senso della richiesta di [ML].

Per meglio capire la portata innovativa dell'approccio alternativo è opportuno confrontarlo con quello ormai ritenuto classico. Perciò mi soffermo brevemente su alcuni aspetti di tre sistemi formali che si sono presentati, in ordine di tempo e di sviluppo concettuale: i sistemi di Frege, Zermelo, (Von Neumann) Bernays e Gödel. Per brevità li indico con sigle: **F**, **Z** (e poi **ZF**), **NBG**.

a) **F** (1879-84 cfr. [F1] e [F2]) è il sistema "più bello" che si possa pensare; cerca di tradurre formalmente le idee di Cantor e nasce dall'analisi del concetto di "proprietà" identificato con "formula". Gli assiomi sono :

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica di Lecce - Via Arnesano 73100 LECCE.

(**) Seminario tenuto presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce negli A.A. 1987/88 e 1988/89.

$$\boxed{\text{F1 } (\forall x)(\forall y)(x=y \Leftrightarrow (\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y))}$$

Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi.

$$\boxed{\text{F2 (schema: per ogni formula } \varphi(x) \text{) } (\exists y)(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow \varphi(x))}$$

Esistenza dell'insieme costituito da tutti gli oggetti che godono di una stessa proprietà. Con scrittura equivalente, per ogni formula $\varphi(z)$,

$$\boxed{\text{F2' } (\forall x)(x \in \{z \mid \varphi(z)\} \Leftrightarrow \varphi(x))}.$$

Dunque data una proprietà, esiste un unico insieme costituito dagli elementi che soddisfano la proprietà. Tale insieme è denotato da

$$\{x \mid \varphi(x)\}.$$

Applicando questi due soli assiomi ed il linguaggio che si era forgiato, Frege riuscì a ricostruire l'analisi, definendo dapprima le operazioni insiemistiche, poi i numeri naturali e, mediante questi, i reali.

Prima di procedere osservo che nel linguaggio di Frege "tutto" è insieme dunque le variabili sono solo minuscole e non minuscole e maiuscole e tonde ecc.

Ad esempio:

$$x \cup y = \{z \mid z \in x \vee z \in y\};$$

$$x \cap y = \{z \mid z \in x \wedge z \in y\};$$

$$\{x, y\} = \{z \mid z=x \vee z=y\}.$$

Definito $x \subseteq y$ come abbreviazione di $(\forall z)(z \in x \Rightarrow z \in y)$, si ha

$$\mathcal{P}(x) = \{z \mid z \subseteq x\}.$$

Esiste poi un "massimo" insieme, $\{x \mid x = x\}$. Più complessa è la definizione di numero naturale.

Con tutto ciò il sistema è contraddittorio. Ciò fu provato da Russell in una lettera privata diretta a Frege e da quest'ultimo pubblicata, con grande spirito di umiltà scientifica. In seguito a ciò Frege si allontanò dagli studi e dalle ricerche ritenendo che il paradosso di Russell svuotasse di significato l'intero pensiero razionale. Il paradosso di Russell è dato dalla costruzione di un insieme $r = \{z \mid z \notin z\}$. L'antinomia nasce dalla considerazione dei due casi dati da

$$r \in r \vee r \notin r \text{ (terzo escluso)}.$$

Ma $x \in x$ comporta $x \notin x$ e d'altra parte $x \notin x$ comporta $x \in x$. Dunque entrambi i casi portano a contraddizione.

L'analisi di questo paradosso (e di altre antinomie presentate tra la fine del secolo scorso e l'inizio di questo secolo, cfr. [B]) hanno portato a tentativi di soluzione che vengono "classificati" con etichette di vario genere: si parla di *logicismo*, di *neo-cantorismo* e di *intuizionismo*; un posto a parte merita, in questo panorama, poi il tentativo *formalista* di Hilbert. Da notare anche l'impulso dato dal paradosso di Russell allo sviluppo delle logiche non-classiche.

2) Neo-cantorismo

Come detto si tratta di una scuola di pensiero sorta in risposta ai paradossi, che ha uno dei suoi maggiori "campioni" in E. Zermelo. Per meglio capire la posizione di questo matematico tedesco è bene confrontarla, sul piano filosofico, con quella di Frege. Per Frege, la Matematica come scienza a sé stante non esiste. La sua ricostruzione è puramente logica: le proprietà degli insiemi sono formule, il loro trattamento può essere effettuato con mezzi assolutamente analitici (in senso kantiano), sfruttando le proprietà della Logica, quali, ad esempio, le tautologie, le formule logicamente valide, ecc. Ad esempio si dimostra che

$$X \cup Y = Y \cup X$$

provando l'equivalenza tautologica tra le formule

$$Z \in X \vee Z \in Y \quad \text{e} \quad Z \in Y \vee Z \in X.$$

Gli insiemi, sempre secondo Frege, sono solo l'aspetto "estensionale" delle proprietà e i risultati sugli insiemi sono conseguenze delle verità logiche e dei due principi sopra enunciati col nome di **F1** e **F2**, la cui evidenza per Frege ed altri matematici, ad esempio Cantor, era banale. Se dunque si pone il problema dell'esistenza degli oggetti, esso è risolto dicendo che gli enti matematici hanno un valore *oggettivo* e "vivono" in un contesto astratto che è la sede del ragionamento stesso.

Ecco perché non può esserci una contraddizione in quanto questa demolirebbe del tutto la ragione umana.

Ma l'antinomia c'è e bisogna prenderne atto.

Zermelo si colloca in una posizione più *matematica* e pragmatica. La Matematica "funziona", come mostrano i suoi sviluppi e le sue applicazioni alle Scienze della Natura, massime la Fisica. Gli insiemi sono utili per semplificare ed unificare problemi abbastanza complessi e distanti; dunque si possono usare, anche come una fondazione per la Matematica, ma non si può accettare un principio come **F2**, responsabile del crollo del sistema di Frege, crollo da qualcuno paragonato alla cacciata dal Paradiso Terrestre. Il motivo è che un principio di costruzione siffatto dà luogo ad enti "troppo grandi". E' bene allora riflettere che quello che serve in Matematica (e non porta a contraddizione) è l'esistenza di alcune operazioni che, applicate ad insiemi, forniscono insiemi: ad esempio, se a è un insieme e b è pure un insieme, anche $a \cup b$ è un insieme; così pure per $x \cap y$, (x, y) e $\mathcal{P}(x)$, ecc. Allora, anzi che preoccuparsi di fornire principi troppo generali, accontentiamoci di partire da certi enti, che sono insiemi, ed operare su di essi con operazioni matematicamente interessanti, per ottenere ancora insiemi. L'idea di Frege di identificare le proprietà con le formule è buona (e semplifica molti problemi), ma a partire da essa si può formulare un principio (schema) abbastanza generale che dica che le collezioni degli elementi *di un insieme* che soddisfano una data proprietà è un insieme. Si è poi mostrato che per la Matematica basta ridurre gli enti di partenza al solo insieme vuoto.

b) Si ottengono così gli assiomi di Zermelo (1907/08 cfr. [Z]):

Z1 $(\forall x)(\forall y)(x=y \Leftrightarrow (\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y))$	(eguaglianza);
Z2 $(\exists x)(\forall y)(y \in x)$	(vuoto);
Z3 $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(w \in z \Leftrightarrow (w=x \vee w=y))$	(coppia non ordinata);
Z4 $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (\exists w)(w \in x \wedge z \in w))$	(unione unaria);
Z5 $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z=x)$	(parti);
Z6 $(\forall x)((\exists y)(y \in x) \Rightarrow (\exists z)(z \in x \wedge (\forall w)(w \in z \Rightarrow w \in x)))$	(fondazione);
ed uno schema: per ogni formula $\varphi(x)$,	
Z7 $\varphi(x)$ $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))$	(isolamento).

Accanto a questi assiomi si deve poi aggiungere un assioma d'infinito, che può essere formulato come segue:

$$\boxed{\mathbf{Z8} (\exists x)(\emptyset \in x \wedge (\forall y)(y \in x \Rightarrow (y) \in x))} \quad (\text{infinito}).$$

Tralasciando l'assioma **Z6**, la cui funzione pare (ancora oggi) sia quella di permettere una certa semplificazione tecnica nelle dimostrazioni, gli unici due assiomi esistenziali non condizionati sono **Z2**, esistenza del vuoto e **Z8**, esistenza di un infinito. Si possono riformulare gli assiomi con simboli più consueti, introdotti proprio grazie agli assiomi ¹ corrispondenti:

$$\boxed{\mathbf{Z2}' (\forall y)(y \notin \emptyset)} \quad (\text{vuoto});$$

$$\boxed{\mathbf{Z3}' (\forall x)(\forall y)(\forall z)(w \in \{x, y\} \Leftrightarrow (z=x \vee z=y))} \quad (\text{coppia non ordinata});$$

$$\boxed{\mathbf{Z4}' (\forall x)(\forall y)(y \in \cup\{y\} \Leftrightarrow (\exists w)(w \in x \wedge y \in w))} \quad (\text{unione unaria});$$

$$\boxed{\mathbf{Z5}' (\forall x)(\forall y)(y \in \mathcal{P}(x) \Leftrightarrow y \subseteq x)} \quad (\text{parti});$$

$$\boxed{\mathbf{Z6}' (\forall x)((\exists y)(y \in x) \Rightarrow (\exists z)(z \in x \wedge (\forall w)(w \in z \Rightarrow w \in x)))} \quad (\text{fondazione});$$

ed uno schema: per ogni formula $\varphi(x)$,

$$\boxed{\mathbf{Z7}'_{\varphi(x)} (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (z \in \{y \in x \mid \varphi(y)\}))} \quad (\text{isolamento}).$$

A guardare meglio **Z7** o **Z7'** sembra che la proposta di Zermelo sia ottenuta con un trucco puramente formale: invece di considerare **F2** per tutte le formule $\varphi(y)$, si considera **F2** solo per le formule del tipo $y \in x \wedge \varphi(y)$. In realtà questa presentazione formale è conseguenza di un pensiero profondo che in qualche modo chiama all'esistenza solo quegli insiemi che si possono costruire con le operazioni indicate, ed è ricollegabile alla **VIII** nozione comune euclidea. E poi **F2** basta, assieme a **F1**, tradotto in **Z1**; **Z7** no, bisogna aggiungere gli altri assiomi.

La teoria di Zermelo fu poi migliorata da Fraenkel (1922) che modificò l'assioma qui indicato con **Z7**, generalizzando l'assioma di isolamento ad una versione più applicabile: l'assioma di rimpiazzamento

per ogni formula $\varphi(x)$,

¹ Faccio notare che qui introduco i simboli dopo aver esibito tutti gli assiomi. In realtà i simboli vengono introdotti ciascuno dopo l'assioma corrispondente. Così, ad esempio, dopo **Z3** si può presentare la riformulazione **Z3'**, prima di **Z4**, ecc.

$\text{ZF7}_{\varphi(x,y)} \quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \Rightarrow y=z) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (\exists w)(w \in x \wedge \varphi(w,z)))$

Si può notare che **Z7** è conseguenza di **ZF7**. Il significato intuitivo di **ZF7** è che presa una funzione, l'immagine di un insieme attraverso essa è ancora un insieme. Anche con questa estensione non si ripresenta il paradosso di Russell, perché $(x \mid x \notin x)$ non è un insieme, manca la "formuletta magica" $x \in y \wedge \dots$. Ma se considero $(x \in y \mid x \notin x)$, di qui non riottengo il paradosso perché se $r = (x \in y \mid x \notin x)$, allora $r \in r \vee r \notin r$. Ma nel primo caso si ha $r \in y \wedge r \notin r$, dunque questo caso non è possibile. Nel secondo da $r \notin r$. Si ha $r \notin y \vee r \notin r$, da cui la conclusione che $r \notin y$. Perciò $r \notin r$ in quanto $r \notin y$. In tal modo si evita l'antinomia. Così non può esistere un insieme universale $(x \mid x = x)$, perché altrimenti si ripresenterebbe il paradosso di Russell.

La teoria formale, nota come **ZF**, ha avuto molto successo in Matematica anche se provare in essa risultati sugli insiemi può risultare lungo e faticoso.

3) Le teorie con le classi (1925/28 - 1937 - 1955).

Per ovviare a questo inconveniente sono state presentate varie proposte: una da Von Neumann, [N], un'altra da Bernays [Be] e Gödel, che poi si sono dimostrate equivalenti. L'idea di fondo è che le totalità chiamate in causa da **F2** se pur così formulato, danno origine a contraddizioni, ma si prestano egualmente a snellire la trattazione. Per evitare il paradosso di Russell, basta richiedere che gli oggetti definiti mediante **F2** siano enti di natura diversa dagli insiemi. Così $(x \mid x \notin x)$, non sarà un insieme per cui non si porrà più il problema di vedere se l'ente risultante appartiene o no a se stesso. Tali enti vengono indicati col termine linguistico di **classe**. La teoria prevede allora delle classi, come collezioni di oggetti, che però a loro volta sono classi, ma classi più "semplici" o "piccole", visto che le scrivo a sinistra dell'appartenenza. Queste sono gli insiemi di prima. Gli assiomi di **NBG** (teoria di Von Neumann, Bernays e Gödel) tengono conto del desiderio che questa teoria sia un'estensione della teoria **ZF**, in quanto compaiono assiomi che richiamano quelli di **ZF**. Si facilita la distinzione tra insiemi e classi, denotando gli insiemi con lettere minuscole e le classi

con lettere maiuscole. Si introduce però una definizione di insieme che riflette la discussione precedente, che identifica gli insiemi nelle classi che vengono poste alla sinistra dell'appartenenza: $\text{Set}(X)$ per $(\exists Y)(X \in Y)$.

c) Con questa posizione gli assiomi di **NBG** sono dati da:

- | | | |
|--------------|--|------------------------|
| NBG1 | $(\forall X)(\forall Y)(X=Y \Leftrightarrow (\forall Z)(Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y))$ | (eguaglianza); |
| NBG2 | $(\exists X)(\forall Y)(Y \notin X)$ | (vuoto); |
| NBG3 | $(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(\forall W)(W \in Z \Leftrightarrow (W=X \vee W=Y))$ | (coppia non ordinata); |
| NBG4 | $(\forall X)(\exists Y)(\forall Z)(Z \in Y \Leftrightarrow (\exists W)(W \in X \wedge Z \in W))$ | (unione unaria); |
| NBG5 | $(\forall X)(\exists Y)(\forall Z)(Z \in Y \Leftrightarrow Z \in X)$ | (parti); |
| NBG6 | $(\forall X)((\exists Y)(Y \in X) \Rightarrow (\exists Z)(Z \in X \wedge (\forall W)(W \in Z \Rightarrow W \in X)))$ | (fondazione); |
| NBG7 | $(\forall X)(\text{Fnc}(X) \Rightarrow (\forall X)(\exists Y)(\forall Z)(Z \in Y \Leftrightarrow (\exists W)(W \in X \wedge \langle W, Z \rangle \in X)))$ | (rimpiazzamento); |
| | per ogni formula predicativa $\varphi(X)$, | |
| NBG7' | $\varphi(X) \quad (\exists X)(\forall x)(x \in X \Leftrightarrow \varphi(x))$ | (astrazione). |
| NBG8 | $(\exists X)(\emptyset \in X \wedge (\forall y)(y \in X \Rightarrow \{y\} \in X))$ | (infinito). |

La limitazione alle formule predicative nasce dall'esigenza di evitare i circoli viziosi nel senso di Russell, cioè quel tipo di definizioni usate per definire una totalità per mezzo dei suoi elementi, tra cui la totalità stessa.

Morse-Kelley-Mostowski (cfr. [Ke]) hanno tolto questa limitazione, partendo da concezioni che hanno sapore neo-platonico, cioè che gli enti esistono (nell'*iperuranio*) indipendentemente dalle loro definizioni, dunque non c'è alcun errore nell'usare definizioni impredicative. La teoria da essi proposta, indicata con la sigla **MKM** si differenzia, apparentemente, solo per la scelta delle formule a cui è applicabile. Ma si può provare che la teoria **NBG** è finitamente assiomatizzabile (Teorema di Bernays, cfr. [Me]), mentre non è appurato che anche **MKM** lo sia.



Capitolo II. Paradossi, incompletezza, infinito, ipotesi del continuo.

1) I paradossi e il fenomeno dell'incompletezza.

I sistemi **ZF** e **NBG** (ed anche **MKM**) si offrono come una ricostruzione della Matematica che evita alcuni paradossi. Il fatto è che all'interno di questi sistemi si può ricostruire, come prima cosa, l'Aritmetica, provando i postulati di Peano. Per un noto teorema di Gödel (1931, cfr. [G1]) da esso discende che la coerenza è esprimibile ma *non* è dimostrabile, se si vuole che la teoria stessa sia coerente. Dunque l'esistenza di paradossi è sempre possibile; il fatto di averne evitato alcuni, non garantisce in alcun modo che nella teoria degli insiemi non ve ne possano essere degli altri.

Questi risultati forniscono una visione molto dubitativa della Matematica, ben diversa dalle visioni dogmatiche che spesso vengono proposte agli studenti.

Il sistema intuizionista è garantito dai paradossi, ma in esso non si ammettono insiemi infiniti, né in generale insiemi, ma solo i numeri naturali e ciò che si può ottenere con procedimenti molto limitati e costruttivi, a partire da essi.

Per quanto riguarda i paradossi la situazione è più complessa di quanto finora illustrato. L'analisi delle antinomie, dovuta a Ramsey, ha come primo atto quello di "scartare" alcuni paradossi, ritenendoli non pertinenti alla Matematica, ma piuttosto collegati a problemi linguistici. Vediamo ora alcuni paradossi che restano esclusi da **ZF** e **NBG**.

(i) *Il paradosso dell'uomo calvo* Se ad un uomo con molti capelli non si toglie nessun capello, con questa operazione, l'uomo non diventa calvo. L'asportazione di un capello in un uomo che non sia calvo, non lo trasforma in calvo. Dunque per il principio d'induzione posso togliere tutti i capelli ad un uomo senza che lui divenga mai calvo!

(ii) *Il paradosso di Berry*. Si considerino i numeri naturali e le frasi della lingua italiana che definiscono numeri naturali. Fissato un numero finito k , l'insieme delle frasi della lingua italiana che sono formate con h parole, con $h \leq k$, è un insieme finito, visto che posso considerare tutte le

possibili disposizioni con ripetizione a h a h delle 40.000 e più parole riportate su un dizionario. Tra queste disposizioni solo un numero finito definiscono numeri naturali. Sia $A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è definibile con frasi della lingua italiana contenenti al più 100 parole} \}$. Come detto, A è un insieme finito, dunque $\mathbb{N} - A \neq \emptyset$. Ma un insieme di numeri naturali non vuoto ammette minimo. D'altra parte "**il minimo numero naturale non definibile con frasi della lingua italiana contenenti al più cento parole**" è una frase della lingua italiana contenente 16 parole (ad essere pignoli ci sono altre 14 parole date dalla ripetizione dello spazio tra una parola e l'altra) ed essa definisce esattamente un numero naturale, quello non definibile, appunto!

Il rifiuto di questi paradossi nelle considerazioni che hanno portato alla costruzione della Teoria degli Insiemi, è dovuto sostanzialmente ad un'osservazione di Peano, riferita al paradosso di Richard, dello stesso tipo di quello di Berry, in cui si utilizzano le definizioni dei numeri naturali date con frasi della lingua italiana. Per Peano tale paradosso non è pertinente alla Matematica in quanto in esso si coglie una notazione linguistica predominante che ne fa una contraddizione linguistica, non matematica. Per inciso, il teorema d'incompletezza di Gödel si presenta come una riformulazione matematica dell'antinomia di Richard.

Queste analisi sono corrette nel senso che il paradosso dell'uomo calvo si basa sul concetto non precisato di "essere calvo", mentre quello di Berry sul concetto di definizione non altrettanto chiarito.

2) Infinito ed Ipotesi del Continuo.

Vediamo ora quali sono i concetti di *infinito* presenti nella Matematica. A partire dalla scuola atomistica, si è fatta strada l'idea dell'infinito *in atto*, cioè di una totalità data simultaneamente assieme a tutti i suoi elementi. Contro questa interpretazione dell'infinito stanno la scoperta dell'incommensurabilità della diagonale rispetto al lato del quadrato ed i famosi paradossi di Zenone.

Da Aristotele in poi è prevalsa l'idea dell'infinito *potenziale*, cioè quella di una totalità cui si può aggiungere sempre un elemento non con-

siderato precedentemente tra gli elementi dati (in numero finito). Queste concezioni dell'infinito sono presenti tuttora nella Matematica: da una parte la Matematica idealistica classica accetta l'esistenza di insiemi infiniti in atto, ad esempio l'insieme dei numeri naturali o l'insieme dei numeri reali. Dall'altra parte l'Intuizionismo si limita a concezioni di infinito potenziale che sono presenti anche nella Matematica elementare, ma che solo con l'Intuizionismo vengono portate avanti con coerenza.

L'accettazione dell'esistenza di insiemi infiniti in atto nella Teoria degli Insiemi porta poi alla costruzione di varie specie di infiniti. Cantor prova che gli insiemi a e $\mathcal{P}(a)$ non sono in corrispondenza biunivoca e, passando alla cardinalità² (previo assioma di scelta) che $|a| < |\mathcal{P}(a)|$. Se dunque si assume che a sia un insieme infinito, si può generare una gerarchia di insiemi infiniti con cardinalità crescenti applicando ripetutamente l'operazione di passaggio all'insieme delle parti:

$$a, \mathcal{P}(a), \mathcal{P}(\mathcal{P}(a)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(a))), \dots$$

Il problema del continuo si inserisce a questo punto: dato l'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} e noto che l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} è equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, Cantor affermò di avere la dimostrazione (che non presentò mai) della non esistenza di un sottinsieme infinito di \mathbb{R} , la cui cardinalità sia intermedia tra quella di \mathbb{N} e quella di \mathbb{R} . In altre parole, se A è un insieme infinito e A è contenuto in \mathbb{R} , allora esiste una biezionne tra A e \mathbb{N} , oppure una biezionne tra A e \mathbb{R} . Così formulata l'ipotesi del continuo richiede l'esistenza di un insieme (una biezionne).

L'ipotesi del continuo è stata utilizzata in Matematica fornendo risultati importanti, ma sono apparsi anche altri principi come l'*ipotesi di Souslin*: se X è un ordine lineare denso senza massimo e minimo, chiuso per la formazione di sup ed inf ed inoltre tale che ogni collezione di intervalli aperti a due a due disgiunti sia numerabile, allora X è isomorfo all'ordine di \mathbb{R} . Questa ipotesi è incompatibile con quella del continuo.

Le opere di Godel (1940 [G2]) e di Cohen (1966 [C]) hanno dimostrato che non c'è alcuna ragione, nella Teoria degli Insiemi, per accettare o rifiutare una qualsiasi delle posizioni delineate, a proposito del problema del continuo.

² Con il segno di valore assoluto intendo indicare la cardinalità dell'insieme.

Capitolo III. *Gli insiemi nella Teoria alternativa.*

1) Gli insiemi finiti.

Si è detto delle "difficoltà" presentate dalla Matematica classica. Gli atteggiamenti possono allora essere di due sorte diverse: cercare di trovare una soluzione ai problemi oppure prendere coscienza dei limiti e cercare una risposta diversa. La posizione di Vopěnka è la seconda, ispirata, a suo dire, dall'opera di Husserl (cfr. [Hu]) e, per certi versi, ricorda la posizione filosofica di Kant: rinunciare alla metafisica dogmatica perché al di là della portata umana. Dunque abbandoniamo l'aspirazione a conoscere l'inconoscibile mondo degli infiniti matematici e prendiamo atto che anche in teorie assai semplici vi sono i "germi" dei problemi che portano a renderci conto delle limitate capacità umane di discriminazione concettuale.

Però, visto che la proposta insiemistica per la fondazione della Matematica è efficace, cerchiamo di ripresentare la Matematica in questo contesto in cui assumiamo, proprio per evitare la gerarchia degli infiniti, che *ogni insieme è finito*.

Devo aprire qui una parentesi per chiarire questo concetto. Una delle più consuete definizioni di insieme finito è la seguente: un insieme è *finito* se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottinsieme di \mathbb{N} dotato di massimo, o più semplicemente, con un segmento iniziale di numeri naturali. Ma tale definizione richiede già i numeri naturali e quindi tutti i loro problemi. Vi è una diversa definizione: un insieme a è *finito* se non esiste un sottinsieme proprio b di a , con b equipotente ad a . In altro modo se ogni funzione iniettiva $f : a \rightarrow a$ è anche suriettiva. Le due versioni, quella coi numeri naturali e quella con il sottinsieme o le funzioni iniettive *non* sono equivalenti nella teoria **Z**, né in **ZF**, e neppure in **NBG**, richiedendo l'assioma di scelta per provare l'equivalenza delle definizioni. Inoltre la seconda rende difficili considerazioni abbastanza intuitive. Ci sono difficoltà, ad esempio nel mostrare che se $a, b \neq \emptyset$, allora $a \times b$ è finito se e solo se sia a che b sono finiti.

Dunque non si tratta di definizioni applicabili in un contesto fondazionale. Vopěnka ritrova nell'opera di Whitehead e Russell [WR] la definizione che gli serve: una formula $\varphi(x)$ si dice *induttiva* se $\varphi(\emptyset) \wedge (\forall x)(\forall y)(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x \cup (y)))$. Ad esempio la formula $x \neq \emptyset \Rightarrow (\exists z)(z \in x)$ è induttiva: $\emptyset \neq \emptyset \Rightarrow (\exists z)(z \in \emptyset)$ e poi $(x \neq \emptyset \Rightarrow (\exists z)(z \in x)) \Rightarrow (x \cup (y) \neq \emptyset \Rightarrow (\exists z)(z \in x \cup (y)))$.

Si pone allora

DEFINIZIONE. Un insieme a è *induttivo* se per ogni formula induttiva $\varphi(x)$, si ha $\varphi(a)$.

Si può provare, e l'ha fatto Tarski nel 1924 (cfr. [T]), che

TEOREMA. Sono equivalenti in **ZF**(e in **NBG**):

- (a) l'insieme a è equipotente ad un segmento iniziale di naturali;
- (b) a è induttivo;
- (c) Per ogni $b \subseteq \mathcal{P}(a)$, se $b \neq \emptyset$, esiste $x \in b$ tale che per ogni $y \in b$, non si ha $y \subseteq x$ e $y \neq x$.

Dunque il fatto di essere induttivo equivale classicamente al fatto di essere finito.

Tra gli assiomi della teoria alternativa vi sarà la richiesta che ogni insieme sia induttivo, cioè finito. Per formularla bisogna però chiarire prima quali formule bisogna prendere in considerazione.

2) I primi assiomi della teoria alternativa.

Vediamo nel dettaglio gli assiomi messi esplicitamente da Vopěnka, non senza avere chiarito in parte il contesto filosofico in cui si muove. L'idea di fondo è l'accettazione dell'approccio fenomenologico (nel senso di Husserl, cfr. [Hu]), ma non solo di quello, perché riconosce alla Matematica la funzione di strumento atto a sorpassare l'orizzonte dell'esperienza umana, ad esempio per esprimere giudizi che precedono la conoscenza e spesso sono impossibili da verificare. Così nella Matematica alternativa, pur tenendo ben presente l'esistenza delle limitazioni, bisogna considerare anche principi ideali che sorpassino l'orizzonte del raggiungibile

La Teoria Alternativa degli insiemi prende spunto dagli oggetti e dalle relazioni tra essi che esistono nella nostra mente. Se con Φ , Ψ , ecc. si indicano gli oggetti ³, $\Phi = \Psi$ significa che Φ e Ψ denotano lo stesso oggetto, mentre $\Phi \neq \Psi$ vuol dire che Φ e Ψ denotano oggetti distinti. Viene usata la consueta "macchinaria" logica, in particolare si accetta la Logica classica. Così $\varphi(\Phi)$ e $\varphi(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ denotano, rispettivamente, proprietà di oggetti e relazioni tra gli oggetti.

Gli insiemi sono oggetti specifici che obbediscono a certi criteri costruttivi e la relazione di appartenenza è una relazione tra oggetti ed insiemi. Si assume l'esistenza di un insieme che non ha elementi e lo si indica con \emptyset . Gli altri insiemi si costruiscono come segue: supposto di aver già costruiti degli oggetti si può "ordinarli" in una *lista* o può essere immaginata una tale lista. In queste condizioni è costruito un nuovo insieme, quello degli oggetti presi dalla lista, che è distinto da ciascuno degli oggetti nella lista. Il nuovo insieme non dipende dall'ordine con cui si sono considerati gli oggetti nella lista, ma è unicamente determinato dai suoi elementi. Perciò se Φ e Ψ sono insiemi ed hanno gli stessi elementi, allora $\Phi = \Psi$. La notazione per gli insiemi ottenuti da liste è quella "consueta": $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$ denota l'insieme costituito esattamente da tutti gli oggetti $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$.

Dopo questa definizione generale che lascia molti dubbi in quanto basata su un concetto intuitivo e non ben precisato, quello di lista, e fa intervenire, almeno in fase di scrittura, i numeri naturali, Vopěnka introduce un nuovo tipo di insiemi, più "matematico" e più matematicamente determinato. Parte "male" dicendo: l'*universo degli insiemi* è formato da insiemi costruiti iterativamente a partire dall'insieme vuoto.

Questa definizione è poco "utilizzabile". Ma Vopěnka aggiunge: non affermo che l'universo degli insiemi contenga tutti i possibili insiemi, ma solo quelli che bastano per la costruzione della Matematica e la restrizione ad essi fornisce vantaggi dimostrativi notevoli. Finalmente il nostro autore scrive esplicitamente degli assiomi il cui scopo è di fornire una de-

³ Nel testo di Vopěnka gli oggetti vengono indicati con lettere latine maiuscole, poi riservate a un certo tipo di classi. Forse la macchina da scrivere di Vopěnka non ha lettere greche, che qui invece io propongo.

scrizione implicita dell'universo degli insiemi. Dapprima una precisazione di scrittura: con le lettere minuscole indico gli insiemi dell'universo degli insiemi e $\text{Set}(\Phi)$ vuol dire che Φ è un insieme. Dunque in sostanza si introduce una nuova sorta di variabili o un altro "trucco" per distinguere tra i generici oggetti, i generici insiemi e gli insiemi "più belli" degli altri, quelli dell'universo degli insiemi.

Gli assiomi sono allora

$$\mathbf{V1} \quad (\forall x)(\forall y)(x=y \Leftrightarrow (\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y))$$

$$\mathbf{V2} \quad (\exists x)(\forall \Phi)(\Phi \notin x)$$

$$\mathbf{V3} \quad (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(w \in z \Leftrightarrow (w \in x \vee w = y))$$

Quest'ultimo assioma chiede che, dati x ed y l'esistenza di un insieme $x\%y$ i cui elementi sono y e tutti gli insiemi che sono elementi di x . Si pone poi $\{\emptyset\} = \emptyset\%y$, $\{x,y\} = \{x\}\%y$. Faccio notare che fin qui non si è escluso che un elemento dell'universo degli insiemi possa essere un oggetto che non sia un insieme dell'universo degli insiemi, dunque il primo assioma non esclude che due insiemi possano avere elementi diversi ed essere eguali. Forse l'idea è che essendo ogni insieme dell'universo degli insiemi costruito a partire dal vuoto iterando la costruzione di liste, ogni elemento di un insieme dell'universo degli insiemi sia un insieme dell'universo degli insiemi. Tuttavia questa richiesta esplicita non è presente in nessun punto del testo di Vopěnka.

DEFINIZIONE. Le *formule insiemistiche* (f.i.) sono le espressioni costruibili per mezzo delle seguenti regole:

- 1) $x = y$ e $x \in y$ sono f.i.;
- 2) se φ e ψ sono f.i., allora $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, $(\forall x)\varphi$ e $(\exists x)\varphi$ sono f.i.;
- 3) le formule che si ottengono sostituendo in 1) e 2), in luogo di x e y altre variabili minuscole sono f.i.

E' necessaria questa definizione sulle formule per fornire l'importante Assioma d'induzione: sia $\varphi(x)$ una proprietà insiemistica, cioè esprimibile con una f.i., allora

$$\boxed{V4 \quad (\varphi(\emptyset) \wedge (\forall x)(\forall y)(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x\%y))) \Rightarrow (\forall x)\varphi(x)}$$

In parole povere ogni formula insiemistica $\varphi(x)$ induttiva è tale che $\varphi(x)$ è soddisfatta da tutti gli insiemi dell'universo degli insiemi. L'uso di $x\%y$ in luogo di $x \cup \{y\}$, come nel testo di Vopěnka è dovuto al fatto che finora non è introdotto un simbolo ed un'operazione di unione.

Con questi assiomi si ottiene, parlando "in **ZF**", l'insieme di tutti gli insiemi *ereditariamente* finiti, cioè insiemi finiti che hanno per elementi insiemi finiti, che, a loro volta, hanno per elementi insiemi finiti, e così via. In **ZF** si tratta di un insieme numerabile costruito come segue: si definisce $v_0 = \emptyset$ e $v_{n+1} = \mathcal{P}(v_n)$, allora si pone $v_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} v_n$. Ogni v_n è un insieme finito dato che $|v_0| = 0$ e se v_n è finito, v_{n+1} è finito perché ha $|v_{n+1}| = 2^{|v_n|}$. Tutte queste considerazioni sono fatte in **ZF**.

Tornando alla teoria alternativa, grazie agli assiomi assunti si possono dimostrare le seguenti (ed altre) affermazioni:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (\exists w)(w \in x \wedge z \in w)) \quad (\text{unione unaria})$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \Rightarrow y=z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (\exists w)(w \in x \wedge \varphi(w,z))) \quad (\text{rimpiazzamento})$$

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z))) \quad (\text{isolamento})$$

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z \in x) \quad (\text{parti}).$$

Queste sono proprietà dimostrabili anche in **ZF** sugli insiemi ereditariamente finiti, ma non estendibili in generale a tutti gli insiemi. Qui gli insiemi dell'universo degli insiemi "esauriscono" gli insiemi considerabili, dunque queste proprietà sono riconducibili, dimostrativamente, agli assiomi considerati. Si provano poi altre affermazioni importanti quali

$$\neg(\exists x)(\forall y)(y \in x),$$

cioè non esiste un insieme di tutti gli insiemi; questa affermazione, col teorema di isolamento permette di concludere che non si ripresenta il paradosso di Russell.

Introdotte poi le solite definizioni di relazione, funzione, iniezione e biezione, si prova che se $a \approx b$ e $a \neq b$, allora a non è equipotente a b , per rafforzare l'assunzione che tutti gli insiemi dell'universo degli insiemi sono classicamente finiti. Inoltre dati a e b si ha sempre che a è sovvalente a b oppure b è sovvalente ad a , oppure sono equipotenti, cioè esiste



un'iniezione da a a b , oppure un'iniezione da b ad a , oppure esiste una biiezione tra a e b . Questo classicamente (ed esteso a tutti gli insiemi) è il principio di *tricotomia*, una delle formulazioni dell'assioma di scelta.

Si prova poi che ogni insieme non vuoto ha un elemento minimale rispetto all'inclusione, dunque l'affermazione che ogni insieme dell'universo degli insiemi è finito nel senso di Tarski.

Viene poi aggiunto uno schema di fondazione:

$$\boxed{\mathbf{V5} \ (\exists x)\varphi(x) \Rightarrow (\exists x)(\varphi(x) \wedge (\forall y \in x)(\neg\varphi(y)))}$$

Capitolo IV. *Le classi e l'infinito alternativo.*

1) Finito alternativo.

Come si è visto nella postulazione fin qui presentata, ci si è limitati agli insiemi finiti, ritenendoli sufficienti per la presentazione della Matematica. Tuttavia la Matematica ha bisogno dell'infinito in varie costruzioni, dunque il problema ora è quello di ricattare l'infinito all'interno del finito. Premetto che il concetto di infinito che si ottiene nella Matematica alternativa non è né quello *in atto* né quello *in potenza*. Per illustrarlo passo ad analizzare alcune esperienze psicologiche. Se si mostra un oggetto si intuisce facilmente che è *uno*. Se si mostrano assieme due oggetti e si chiede ad un interlocutore quanti sono, è probabile che venga data una risposta immediata, ottenuta senza che venga effettuato un conteggio. Se si registra alla lavagna l'esito della votazione per l'elezione di una commissione, si organizzano i risultati indicando i voti con segmenti non tutti disposti nello stesso modo, ad esempio:



questo perché alla domanda di quanti sono diciassette segni difficilmente si può rispondere con un colpo d'occhio, mentre se i segni sono raggruppati, cinque a cinque, ad esempio in uno dei due modi indicati, è più facile ottenere una risposta corretta. Forse i proprietari di greggi sono in grado

di fornire con un colpo d'occhio una conta esatta di quanti capi di bestiame hanno. Tale abilità, il *sensu del numero* di Dantzig, cfr. [D], pur se adeguatamente sviluppata, ha dei limiti. Non credo che un ricco possidente di ovini australiano possa comprendere con un'occhiata quante pecore sono presenti e quante sono mancanti.

Anche la possibilità concettuale di rappresentarci un insieme con tutti i suoi elementi, con un colpo d'occhio mentale, è necessariamente limitata. Quelli che riusciamo a "capire" o "afferrare" sono insiemi finiti, gli altri, a tutti gli effetti non lo sono, anche se hanno un "numero" finito di elementi. E' questo il punto di vista alternativo, che utilizza in positivo, la presupposta esistenza di limitazioni umane insuperabili, per fornire l'esistenza positiva di oggetti "infiniti" in quanto "non capibili" o "inafferrabili".

Ci si può chiedere se questa nozione alternativa di finito sia una "vera" nozione di finito. Nella Matematica classica sono state avanzate varie proposte assai diverse e non tutte tra loro equivalenti in **ZF**, dunque una "vera" nozione di finito non c'è. Ci sono però proprietà che vorremmo valide per insiemi finiti e che riteniamo indispensabili, quali le seguenti:

- (i) se a è finito e $b \equiv a$, allora b è finito;
- (ii) se a è finito, allora $a \cup \{b\}$ è finito;
- (iii) $a \cup b$ è finito se e solo se a e b sono finiti;
- (iv) \emptyset è finito e $\{a\}$ è finito;
- (v) se $a, b \neq \emptyset$, $a \times b$ è finito se e solo se a e b sono entrambi finiti;
- (vi) se a è finito, $\mathcal{P}(a)$ è finito.

Ebbene, se la nozione alternativa di finito soddisfa a queste (ed altre) proprietà, la si può ritenere una nozione di finito.

Resta il problema di vedere come caratterizzare matematicamente il concetto di *afferrabilità*. Anche Vopěnka però preferisce una definizione "negativa", soffermandosi sul concetto di infinito in senso alternativo.

2) Classi alternative

Nella Matematica classica, in particolare con il sistema **NBG**, si è introdotto il concetto di classe, distinto da quello di insieme, facendo considerazioni di "taglia": le classi sono gli oggetti "troppo grandi" per es-

sere ritenuti insiemi. Ma l'essere "troppo grande" è un attributo che può essere generalizzato considerando questo caso come caso particolare dell'essere "mal definito". Le classi di **NBG** sono mal definite, dal punto di vista degli insiemi, perché sono troppo grandi. Le classi alternative sono mal definite in ogni senso possibile, sempre dal punto di vista degli insiemi.

In realtà, Vopěnka le definisce male. Infatti afferma che *ogni proprietà di oggetti può essere considerata un oggetto. Una proprietà di oggetti intuita come oggetto è detta essere una classe*. Il fatto che un oggetto Φ sia una classe si indica con $\text{Cls}(\Phi)$.

Osservo che con questa formulazione, dati due insiemi a e b , la proprietà di "essere uguali ad a oppure uguali a b " è distinta dalla proprietà di "essere uguali a b oppure uguali ad a ". Dunque se le proprietà sono classi, queste considerazioni fanno pensare che le classi si debbano trattare da un punto di vista intensionale. Così, usando le notazioni di Vopěnka, $(\Phi \mid \varphi(\Phi))$ denota la proprietà come una classe, $\varphi(\Phi)$ potrebbe essere logicamente equivalente a $\psi(\Phi)$, ma $(\Phi \mid \varphi(\Phi)) \neq (\Phi \mid \psi(\Phi))$, sono cioè oggetti *diversi*.

Nel sviluppare la Matematica bastano particolari classi, quelle dell'*universo esteso*, formato dalle classi $(x \mid \varphi(x))$, ove $\varphi(x)$ è una proprietà degli insiemi dell'universo degli insiemi, anche se non espressa necessariamente con una formula insiemistica, ma con qualunque altra "cosa".

Formulato dunque un principio del tutto generale senza fare riferimento ad alcun linguaggio formale, c'è il rischio di ricattare il paradosso di Russell, perché $R = (\Phi \mid \Phi \notin \Phi)$, è un oggetto e ci si può chiedere se appartiene a se stesso oppure no. Però attenzione: se $R \in R$, non ho alcun criterio per concludere $R \notin R$, in quanto il principio di Vopěnka non è formulato come **F2**, ma solo è un'enunciazione di esistenza di un oggetto di cui non so che fare, rispetto all'appartenenza. Vopěnka mette un assioma che qui riscrivo:

Assioma di esistenza delle classi.

V6 Per ogni proprietà $\varphi(x)$ di insiemi dell'universo degli insiemi, l'universo esteso contiene (?) la classe $(x \mid \varphi(x))$.

Le parole sono queste, senza il punto interrogativo, però poi si capisce che, anche se con vari distinguo, *contiene* è sinonimo di *appartiene*. In seguito Vopěnka afferma:

Se X è un oggetto ed Y è una classe dell'universo esteso, allora $X \in Y$ se e solo se X è un elemento dell'universo degli insiemi e X ha la proprietà Y .

Il paradosso di Russell è evitato perché detto $R = \{x \mid x \notin x\}$, si ha che R è una classe dell'universo degli insiemi, ma non è un insieme, dunque non ha senso chiedere se $R \in R$.

Gli insiemi (dell'universo degli insiemi) vengono visti come particolari classi, grazie alla richiesta che $(\forall x)Cl(x)$. Da notare però che questa affermazione non dice che gli insiemi siano classi dell'universo esteso, per cui c'è da distinguere tra l'insieme x e la classe $\{y \mid y \in x\}$. La cosa rimane in sospeso perché un successivo assioma di estensionalità viene formulato solo per classi dell'universo esteso, per le quali si riservano ora le lettere latine maiuscole.

$$\boxed{\mathbf{V7} \quad (\forall X, Y)(X = Y \Leftrightarrow (\forall u)(u \in X \Leftrightarrow u \in Y))}$$

Credo però, anche confortato da quello che segue, che Vopěnka volesse dire che ogni insieme è una classe dell'universo esteso.

Una classe si dice *propria* se non è un insieme. Se X è una classe, $\{X\}$ è un insieme, che non è elemento dell'universo degli insiemi. Una classe X è detta *insiemisticamente definibile* se esiste una formula insiemistica $\varphi(x)$ tale che $X = \{x \mid \varphi(x)\}$. In particolare $V = \{x \mid x = x\}$ è l'universo di tutti gli insiemi.

3) Infinito alternativo.

Se dunque le classi sono la formulazione matematica del concetto di "mal definito", un insieme lo dico *infinito* (in senso alternativo) se contiene una classe propria. Si ha così che a è *finito* (in senso alternativo) se

$$(\forall X)(X \in a \Rightarrow \text{Set}(X)).$$

Ovviamente le considerazioni classiche contraddicono l'esistenza di insiemi infiniti in questo modo, dato che classicamente ogni insieme è finito, ma uno dei motivi è che il principio di isolamento o comprensione

assicura che, ad esempio in **NBG**, ogni classe contenuta in un insieme è un insieme. Ciò è ovvio se classe vuol dire "grande" e insieme vuol dire "piccolo", per cui una parte di un ente piccolo è necessariamente piccolo. Ma nella teoria alternativa, classe vuol dire mal definita o inafferrabile, per cui può esserci una classe che è piccola ma mal definita, contenuta in un insieme. Però se la classe è insiemisticamente definibile è un insieme. Ne sono esempi la collezione dei capelli che se sono tolti dalla testa di un uomo dotato di folta capigliatura, non lo rendono calvo; la collezione degli antenati umani di Charles Darwin, discendenti diretti di una stessa scimmia; la collezione dei pullover verdi di un fornito negozio di maglieria; la collezione dei numeri naturali che non si possono definire con 100 parole.

In un certo senso la definizione di classe di Vopěnka si presenta come un nuovo tentativo matematico di formulare la vaghezza, diverso dall'approccio fuzzy, ma con esso collegato, se pure in modo non immediato.

L' assioma di infinito (il primo vero assioma alternativo) viene formulato dicendo

$$\mathbf{V8} \ (\exists X)(\exists x)(X \in x \wedge \neg \text{Set}(X)).$$

Nel seguito indicherò con il nome di *seminsieme* $Sms(X)$ una classe X contenuta in un insieme e dirò che un seminsieme è proprio se non è un insieme. Dunque l'assioma di infinito dice che esiste un seminsieme proprio.

Capitolo V. *L'assioma di prolungamento e gli altri assiomi alternativi.*

1) Assioma di prolungamento.

L'assioma di infinito sarà un caso particolare di uno più generale e molto applicato: l'Assioma di prolungamento. Per presentarlo ho bisogno di premettere una nozione alternativa che mi qualifichi un ente che si comporti come l'insieme dei numeri naturali, dal punto di vista dell'ordine. Per questo si definisce il concetto di *classe numerabile* come segue:

DEFINIZIONE. Una coppia $\langle A, R \rangle$ ⁴ è detta *un ordinamento di tipo ω* se

- (i) R è una relazione riflessiva, transitiva, antisimmetrica (*ordine*) su A e inoltre è *lineare*, cioè $(\forall x, y \in A)(xRy \vee yRx \vee x=y)$.
- (ii) A è una classe infinita (cioè contiene seminsiemi propri)
- (iii) per ogni $x \in A$, $R^*(x)A = \{y \mid y \in A \wedge yRx\}$ è un insieme finito.

Si prova che se $\langle A, R \rangle$ è un ordinamento di tipo ω , R bene ordina A , nel senso che ogni *sottoclasse* di A non vuota ha minimo nella relazione R .

DEFINIZIONE. Una classe A è detta *numerabile* se esiste R tale che $\langle A, R \rangle$ è un ordinamento di tipo ω .

Si mostra, grazie anche al successivo assioma, che nessuna classe numerabile può essere un insieme o una classe definibile.

E arriviamo ora all'assioma di prolungamento, introducendo prima, un esempio di Vopěnka. Siamo in un paesaggio pianeggiante, in un giorno di buona visibilità (dico io). Guardiamo una strada che partendo dal punto dove siamo, si dirige verso l'orizzonte e scorgiamo, disposti a fianco della strada, dei paracarri (o pietre miliari). Dal nostro punto di vista, possiamo distinguere solo alcuni paracarri, perché come la strada si approssima all'orizzonte, i paracarri ci appaiono addensarsi. Da altre considerazioni sappiamo che i paracarri sono posti a distanza regolare uno dall'altro, ma noi possiamo vederne solo alcuni, in modo distinto. La collezione dei paracarri che vediamo è una classe, anzi una classe numerabile, perché da qualunque punto mi metta lungo la strada, ho lasciato dietro me un numero finito di paracarri. L'andamento lineare della strada mi garantisce che c'è un ordine lineare e che la classe è infinita (in senso alternativo) perché è classe propria, non riuscendo a distinguere tutti i paracarri. Quale conclusione traggio da questo paesaggio? Che la strada porta in un qualche posto (città), al di là della linea dell'orizzonte. Quindi la collezione dei paracarri tra il punto in cui mi trovo e la fine della strada è un insieme finito (in senso classico). Così una classe numerabile può essere e-

⁴ ove $\langle A, R \rangle$ è data da $\{(A), (A, R)\}$, coppia ordinata di Kuratowski, però con classi, non insiemi.

stesa ad un insieme. In realtà l'assioma di Vopěnka viene esplicitato relativamente alle funzioni:

Assioma di prolungamento:

V9 Se F è una classe numerabile ed una funzione, allora esiste un insieme f , che è una funzione, tale che $F \subseteq f$.

In forma equivalente, ma più facilmente applicabile, se A è una classe numerabile e $\varphi(x)$ è una formula insiemistica tale che per ogni $x \in A$, valga $\varphi(x)$, allora esiste un insieme a tale che $A \subseteq a$ e $\varphi(a)$.

Detto così, sembra un'affermazione di "approssimazione": se la classe numerabile è approssimabile mediante insiemi x tali che $\varphi(x)$, allora non è $\varphi(A)$, ma c'è un sovrainsieme a di A tale che $\varphi(a)$.

Questo assioma è centrale nello sviluppo della teoria; ad esempio serve per provare che se X è una classe numerabile e $\mathcal{P}(X)$ è la classe dei sottinsiemi di X , allora $\mathcal{P}(X)$ è una classe numerabile, ad apparente dispetto del teorema di Cantor.

2) Altri assiomi.

Con l'assioma di prolungamento non si esauriscono gli assiomi veramente alternativi. Un successivo assioma è quello di codifica estensionale che ha come effetto quello di un'assioma di scelta per la teoria alternativa.

Per introdurre l'ultimo assioma è necessario fornire un nuovo ente che abbia, per la matematica alternativa, il ruolo dell'insieme dei numeri reali.

DEFINIZIONE. La coppia ordinata $\langle A, R \rangle$ si dice un ordine di tipo Ω se:

- (i) R bene ordina A (anche rispetto alle classi: una classe non vuota $B \subseteq A$ ha minimo in R);
- (ii) A non è numerabile (ma è classe infinita);
- (iii) per ogni $x \in A$, $R^*(x) \cap A = \{y \mid y \in A \wedge y R x\}$ è una classe numerabile.

Conseguenza degli assiomi è l'esistenza di una classe A e di una relazione R tali che $\langle A, R \rangle$ sia un ordine di tipo Ω . A questo si giunge conside-

rando una classe numerabile B e prendendo come A tutti i possibili ordini su B che rendono B di tipo ω . Ovviamente con costruzioni di questo tipo si esce dall'universo degli insiemi ed anche dall'universo esteso. Grazie all'assioma della codifica estensionale, che può essere interpretato come una forma della scelta, è possibile riportarsi all'universo degli insiemi ed all'universo esteso, anche con queste costruzioni.

Da ultimo si assume l'Assioma dei due cardinali che "sistema" definitivamente anche l'ipotesi del continuo e la generazione dei cardinali trasfiniti:

V10 Per ogni classe A, A è finita o numerabile, oppure esiste una relazione R tale $\langle A, R \rangle$ è di tipo Ω .

Dunque i tipi ω e Ω sono visti come i due (unici) cardinali trasfiniti ammessi. Ogni classe insiemisticamente definibile è di tipo Ω , ad esempio la classe V, universo degli insiemi.

Capitolo VI. *La Matematica nella Teoria alternativa degli insiemi.*

1) I numeri naturali.

Nella teoria classica degli insiemi si può ricostruire la Matematica in quanto sono dati i procedimenti insiemistici e si costruiscono i numeri naturali e le relazioni ed operazioni su essi, prendendo spunto dalla costruzione dei numeri naturali. Si può dare in **ZF** la definizione di numero naturale, prima però alcune definizioni preliminari

(1) $Tr(a)$, cioè $(\forall x)(x \in a \rightarrow x \in a)$ (da leggersi "a è *transitivo*");

(2) $Conn(a)$ cioè $(\forall x)(\forall y)(x \in a \wedge y \in a \rightarrow (x \in y \vee x = y \vee y \in x))$ (da leggersi "a è *connesso*");

(3) $Sc(a)$ per $(\exists y)(a = y \cup \{y\})$ ((da leggersi "a è *un successivo*").

Con ciò, $N(a)$, da leggersi *a è un naturale* può essere scritta come

$$Tr(a) \wedge Conn(a) \wedge (a = \emptyset \vee (Sc(a) \wedge (\forall x)(x \in a \rightarrow (x = \emptyset \vee Sc(x)))).$$

Si mostra che ogni elemento di un numero naturale è ancora un naturale, che \emptyset è un naturale, che

$$N(a) \rightarrow N(a \cup \{a\}),$$

e che valgono i postulati di Peano.

La definizione di numero naturale si può porre, in tutta generalità, anche nella teoria alternativa, dato che le condizioni che stabiliscono il fatto di essere un numero naturale sono formule insiemistiche, però la terza condizione, indispensabile in **ZF** per distinguere i numeri naturali come ordinali finiti, dagli altri ordinali, cioè quelli soddisfacenti solo le condizioni di transitività e di connessione, non è necessaria in contesto alternativo, perché, lo ricordiamo, ogni insieme è finito. Dunque i naturali alternativi sono insiemi transitivi e connessi.

2) Altri sistemi numerici.

Se con \mathbb{N} si indica la *classe* dei naturali, si tratta di una classe definibile e dunque ordinabile solo con un ordine di tipo Ω . Anzi questo risultato è frutto del paradosso di Burali-Forti, sull'inesistenza di un insieme che sia la collezione totale degli ordinali (qui i naturali), dato che esso stesso avrebbe natura di ordinale (transitivo e connesso), dunque apparterebbe a se stesso. Noto però che la relazione d'ordine naturale non è un buon ordine perché tramite essa si può trovare il minimo di ogni sottinsieme non vuoto di \mathbb{N} , non di ogni sottoclasse non vuota. Questo spiega il paradosso di Berry: la classe dei numeri naturali non definibili con meno di 100 parole è una classe propria, quindi non è detto che abbia minimo. Lo stesso ragionamento giustifica i paradossi del mucchio, dell'uomo calvo, ecc.

Non valendo il buon ordinamento, vengono a cadere le conseguenze dell'induzione. O meglio l'induzione sulle formule insiemistiche vale in \mathbb{N} , ma non quella sulle generiche proprietà, come ad esempio, rendere dolce il caffè.

Tuttavia i numeri naturali sono "veramente" i numeri naturali, nel senso che valgono i postulati di Peano (relativi alle proprietà interpretate

come f.i.) e, importante, ogni insieme è in corrispondenza biunivoca con un solo numero naturale. Ma ci sono gli insiemi infiniti (in senso alternativo) e quindi anche i numeri naturali infiniti.

Una sottoclasse propria di \mathbb{N} è FN , la classe dei numeri naturali finiti. Non esiste il più grande numero naturale finito, sempre per il paradosso di Burali-Forti, e neppure il più piccolo numero naturale infinito, perché FN è una classe propria. Anche FN rende veri i postulati di Peano con l'induzione relativa a tutte le proprietà, interpretate come classi dell'universo esteso; FN è ben ordinato. Per Vopěnka l'identificazione di \mathbb{N} con FN è la causa di diversi paradossi.

Si introducono poi le operazioni sui naturali nel modo "solito" delle operazioni sugli ordinali.

La costruzione degli insiemi numerici si sdoppia, considerando i naturali nella versione \mathbb{N} o in quella FN . Si ha allora, indicando con l'asterisco gli insiemi numerici senza considerare lo zero:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{ \langle 0, \alpha \rangle \mid \alpha \in \mathbb{N}^* \};$$

$$\text{FZ} = \text{FN} \cup \{ \langle 0, n \rangle \mid n \in \text{FN}^* \};$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* / \approx;$$

$$\text{FQ} = \text{FZ} \times \text{FN}^* / \approx.$$

In queste scritte, con la relazione \approx si intende denotare la solita relazione di equivalenza: $\langle a, b \rangle \approx \langle c, d \rangle$ se $a \times c = b \times d$; i numeri del tipo $\langle 0, \alpha \rangle$ nelle prime due scritte, si indicano, più semplicemente con il segno negativo, cioè scrivendo $-\alpha$.

Ma qui si introduce una nuova classe numerica, quella dei *razionali limitati*:

$$\text{BQ} = \{ x \in \mathbb{Q} \mid (\exists n \in \text{FN})(|x| < n) \};$$

si ha $\text{FQ} \equiv \text{BQ} \equiv \mathbb{Q}$, e per ogni $x \in \text{BQ}$, $y \neq \emptyset$, con $y \in \text{FQ}$, esiste un numero naturale finito $n \in \text{FN}$, tale che

$$|x| < n|y|.$$

Inoltre ogni classe che sia un segmento iniziale non vuoto e propriamente contenuto in $F\mathbb{Q}$, ha un maggiorante in $B\mathbb{Q}$.

DEFINIZIONE. Due numeri naturali di $x, y \in B\mathbb{Q}$ si dicono *infinitamente vicini* se la loro differenza in valore assoluto è minore di qualsiasi numero razionale del tipo $\frac{1}{n}$, con $n \in F\mathbb{N}^*$. In simboli si scrive $x \approx y$.

Si prova che i razionali finiti sono densi nei razionali limitati. Inoltre per ogni $\alpha \in \mathbb{N} - F\mathbb{N}$, e per ogni $x \in \mathbb{Q}$, esiste $p \in \mathbb{Z}$ tale che $x \approx \frac{p}{\alpha}$.

I numeri razionali limitati svolgono il "ruolo" dei numeri reali in contesto alternativo, in quanto si possono "pensare" come i "limiti" delle "successioni" di numeri razionali finiti. Ma nella trattazione dell'Analisi vi sono ancora alcuni problemi non ancora ben chiariti.

Non tratto qui altri problemi di Matematica classica, che trovano una versione adeguata nel contesto alternativo. Cito solo lo studio dei filtri e la presenza di ultrafiltri non principali, fatto sorprendente questo, se si pensa alla asserita finitezza di ogni insieme.

Capitolo VII. *Il Continuo.*

Uno dei maggiori successi della teoria alternativa è quello di aver offerto una proposta di chiarimento del problema sulla natura e le caratteristiche del *continuo*. Se si cerca d'analizzare tale concetto con la Matematica classica, ci si ritrova di fronte al problema posto dall'ipotesi del continuo, che, in sostanza, è una domanda lasciata aperta, su quale sia la "struttura" insiemistica dell'insieme dei numeri reali. Ma il problema è più profondo. Se è vero che l'identificazione del continuo della retta con l'insieme dei numeri reali, permette i risultati positivi della Geometria analitica e della Fisica, d'altra parte c'è l'affermata ipotesi di discretezza della Natura, sperimentalmente provata in più modi. E questa situazione è ben presente nella nostra coscienza di uomini d'oggi, in cui gli aspetti discreti e continui devono convivere. Per esempio, il foglio su cui scriviamo ci sembra un continuo, ad un'osservazione macroscopica, ma sappiamo che un'analisi più approfondita ci toglierebbe l'illusione del continuo. Le analisi fisiche affermano poi che gli oggetti "continui" sono discreti ed anzi sono costituiti da un "numero" finito di "elementi".

Per potere presentare la versione alternativa del continuo, c'è bisogno di alcune definizioni preliminari.

Sia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia di classi, ciascuna definibile insiemisticamente. Posso considerare la classe $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; è una classe, ma non dell'universo esteso, dunque, stando a Vopěnka, non posso dire quali siano i suoi elementi, anche se intuitivamente essi sono proprio le classi che costituiscono la famiglia. Si può "costruire" ora la classe $X = \bigcap (\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\})$, definita come

$$X = \bigcap (\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \{y \mid (\forall n)(y \in X_n)\}.$$

DEFINIZIONE. Classi di questo tipo, intersezioni di famiglie di classi definibili, indicate da \mathbb{N} , sono dette *Π -classi*.

Sia ora A una classe insiemisticamente definibile, si pone:



DEFINIZIONE. Una classe \simeq è una Π -equivalenza su A se e solo se \simeq è una Π -classe ed è una relazione di equivalenza su A .

Questa nozione è collegata a nozioni di Topologia classica, nel senso che dato un insieme a ed una relazione \simeq che sia una Π -equivalenza su a ; la coppia $\langle a, \simeq \rangle$ è un esempio di un particolare spazio uniforme. ⁵

Per illustrare come la nozione di base di Π -equivalenza renda conto dell'idea alternativa di continuo, è necessaria ancora di una nozione tecnica:

DEFINIZIONE. Una successione $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una *sequenza generatrice* di una relazione di equivalenza $=$ su una classe definibile A se e solo se:

- (a) $R_0 = A \times A$;
- (b) per ogni $n \in \mathbb{N}$, R_n è una classe insiemisticamente definibile ed è una relazione riflessiva e simmetrica su A ;
- (c) per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $x, y, z \in A$, se $x R_{n+1} y$ e $y R_{n+1} z$, allora $x R_n z$;
- (d) $\simeq = \bigcap \{ (R_n \mid n \in \mathbb{N}) \}$.

Il concetto di Π -equivalenza è legato a quella di sequenza generatrice in quanto se $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una sequenza generatrice di \simeq , allora \simeq è una Π -equivalenza.

Certo che, a prima vista, questi concetti sembrano avere poca evidenza intuitiva ed essere ben poco legati al problema del continuo. Un esempio può però fornire la giustificazione della scelta di tali definizioni.

Consideriamo un mucchio di sabbia. Il fatto che esso ci appaia discreto o continuo dipende dalla distanza da cui lo osserviamo e dalla tecnica che usiamo per osservarlo. Sappiamo che il mucchio è composto di

⁵ Per completezza ricordo la definizione classica di spazio uniforme (cfr. [W]): $\langle X, \eta \rangle$ è uno *spazio uniforme* se e solo se è generato da una base \mathcal{C} di filtro su $\mathcal{P}(X \times X)$, costituita da relazioni $N \subseteq X \times X$, riflessive, con le condizioni

$$(\forall N \in \mathcal{C}) (\exists N' \in \mathcal{C}) (N^{-1} \subseteq N');$$

$$(\forall N \in \mathcal{C}) (\exists N' \in \mathcal{C}) (N' \cdot N' \subseteq N');$$

essendo \mathcal{C} base di filtro se $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$, $\mathcal{C} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{C}$ e

$$(\forall N, N' \in \mathcal{C}) (\exists N'' \in \mathcal{C}) (N'' \subseteq N \cap N').$$

granelli, ciascuno con una sua precisa individualità, ben distinto e separato dagli altri, ma se osserviamo il mucchio da lontano, non possiamo distinguere i vari granelli. Man mano che ci avviciniamo o miglioriamo gli strumenti visivi, possiamo cogliere le distinzioni.

Ecco il significato di queste relazioni: se tre oggetti x, y, z sono visti come *indistinguibili* con lo strumento R_{n+1} , cioè $x R_{n+1} y$ e $y R_{n+1} z$, non è detto che $x R_{n+1} z$, perché col criterio R_{n+1} siamo in grado di distinguere x da z , ma non x da y , né y da z .

Le relazioni di una sequenza generatrice vanno viste allora come criteri di indiscernibilità, con strumenti o metodi diversi. Si passa dal criterio più "grossolano" di tutti, $R_0 = A \times A$, secondo il quale due qualunque elementi di A sono indiscernibili, ad uno più "raffinato" R_1 , ad uno ancora più raffinato R_2 , e così via. La condizione che ogni relazione sia riflessiva, permette di affermare che, per ogni $y \in A$, $\langle y, y \rangle \in R_{n+1}$, per cui, per ogni coppia $\langle x, y \rangle \in R_{n+1}$, grazie alla condizione "pseudo-transitiva" (c) della definizione, vale $\langle x, y \rangle \in R_n$, dunque $R_{n+1} \subseteq R_n$. In questo senso le relazioni di una sequenza generatrice sono una il raffinamento della precedente. La proprietà "pseudo-transitiva" dice poi che se col criterio R_{n+1} , x e y sono tra loro indiscernibili e così pure y e z sono tra loro indiscernibili, non è detto che x e z siano tra loro indiscernibili con lo stesso criterio, ma lo sono, senza dubbio, col criterio R_n . Si può leggere allora R_{n+1} come un miglioramento del metodo (o strumento) di osservazione R_n , in quanto fa apparire distinti elementi prima indistinguibili.

Non so se Vopěnka fosse al corrente del *paradosso dello zucchero di Armstrong*, cfr. [K] perché sorto in un contesto di Economia matematica. Esso è basato sul fatto che l'aggiunta di un granello di zucchero ad una tazzina di caffè non ne altera (apprezzabilmente) il sapore. Ma come osserva Armstrong, l'essere indiscernibile è una relazione banalmente riflessiva, simmetrica, ma non transitiva. Vopěnka ne tiene conto: la transitività è vista da lui come "limite" (inverso), cioè come intersezione di relazioni riflessive e simmetriche. La relazione \cong che si ottiene come intersezione sta ad indicare l'indiscernibilità *assoluta* con tutti i metodi a disposizione.

Si può obiettare che la definizione reca in sé diverse limitazioni che possono sembrare superflue: la classe A deve essere insiemisticamente definibile, così come tutte le relazioni ed esse sono indiciate "solo" dai naturali finiti. Questa lettura è però l'unica proponibile, per vari motivi tecnici. Vopěnka in realtà chiama *indiscernibilità* una Π -relazione *compatta*, ove compatta significa che esistono due elementi x, y tali che $x \neq y$ ma $x \approx y$. Un esempio di tale tipo di indiscernibilità è offerto dalla relazione mostrata per elementi di $B\mathbb{Q}$, l'essere infinitamente vicini.

Bibliografia

- [B] E. Beth, **The Foundations of Mathematics**, North Holland, Amsterdam (1959).
- [Be] P. Bernays, **Axiomatic Set Theory**, North Holland, Amsterdam (1958).
- [C] P. Cohen, **Set Theory and the Continuum Hypothesis**, W.A. Benjamin Inc., New York (1966); traduzione italiana **La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo**, Feltrinelli, Milano (1973).
- [D] T. Dantzig, **Il numero - Linguaggio della scienza**, La Nuova Italia, Firenze (1965).
- [F1] G. Frege, **Begriffsschrift**, Halle (1879), ripubblicato in [He], pp. 1-82 e in [F].
- [F2] G. Frege, **Die Grundlagen der Arithmetik**, Breslau (1884), Traduzione inglese Blackwell, Oxford (1950), traduzione italiana in [F].
- [F] G. Frege, **Logica ed Aritmetica**, (a cura di C. Mangione) P. Boringhieri, Torino (1965).
- [G1] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*. Monatsh. Math. Phys. **38** (1931), pp. 173-198, ripubblicato in [He] pp. 596-616.
- [G2] K. Gödel, **The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypotesis with the Axiom of Set Theory**, Princeton Univ. Press, Princeton (1940).

- [He] J. van Heijenoort, **From Frege to Gödel**, Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass. (1967).
- [Hu] E. Husserl: **La crisi delle Scienze occidentali e la Fenomenologia trascendentale**, Il Saggiatore, Milano, 1961.
- [K] J.S. Kelly, **Arrow impossibility theorems**,
- [Ke] J. Kelley, **General Topology**, Van Nostrand, Princeton (1955).
- [M] C. Marchini, **Teoria alternativa degli insiemi e sviluppo della Matematica in essa**, Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa (1986), nn. 160, 161.
- [Me] E. Mendelson: **Introduzione alla Logica Matematica**, Boringhieri, Torino (1972).
- [ML] S. MacLane, *The health of Mathematics*, Mathematical Intelligencer, **5**, 4 (1983), pp. 53-55.
- [N] J. Von Neumann, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, J. für Math., **154** (1925) pp. 219 - 240, ristampato in [He] pp. 393-413.
- [S1] A. Sochor, *The alternative Set Theory*, **Set Theory and Hierarchy Theory - A memorial tribute to A. Mostowski**, Springer Lecture Notes in Mathematics n. 537 (1976) 259-273.
- [S1] A. Sochor, *Metamathematics of the Alternative Set Theory I*, Comm. Math. Univ. Carolinae, **20**, n. 4 (1979), 697 - 722.
- [S2] A. Sochor, *Metamathematics of the Alternative Set Theory II*, Comm. Math. Univ. Carolinae, **23**, n. 4 (1982), 697 - 721.
- [S3] A. Sochor, *Metamathematics of the Alternative Set Theory III*, Comm. Math. Univ. Carolinae, **24**, n. 1 (1983), 137 - 154.
- [S4] A. Sochor, *The Alternative Set Theory and its Approach to Cantor's Set Theory*, Proc. Second World Conference on Mathematics at the Service of Man, Las Palmas (1982), 63-84.
- [T] A. Tarski, *Sur les ensembles finis*, Fund. Math. **6** (1924), 45 - 95.
- [V] P. Vopěnka, **Mathematics in the Alternative Set Theory**, Teubner, Leipzig, 1979.
- [W] S. Willard, **General Topology**, Addison-Wesley Publ. Co., Amsterdam, 1970.

[WR] A.N. Whitehead - B. Russell, **Principia Mathematica**, Cambridge University Press, Cambridge, 1910.

[Z] E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, Math. Ann. **65** (1968) pp. 261-281, ristampato in [He], pp. 199-215.



UNIVERSITA' STUDI DI LECCE

FAC. DI SCIENZE DPT. MATEMATICO

N. di inventario 017201
Red. Nuovi Inventari D.P.R. 371/82 buono
di carico n. 305 del 20-12-1990
foglio n. 305.