4. Sui fondamenti della Matematica

Fondamenti della matematica e "teoria base".

L'esempio della teoria 7×2

Nello studio dei "fondamenti della matematica" forse può rientrare anche la proposta di ragionevoli "teorie base", ove col termine "teorie base" designerò una selezione di concetti primitivi, definizioni, assiomi, abbastanza semplici per essere compresa anche da ascoltatori non specializzati ed abbastanza ampia perché sia possibile assumerla come base fondamentale su cui edificare le piú complesse teorie matematiche (e forse anche altre teorie scientifiche e filosofiche).

Tra i requisiti desiderabili di una "teoria base", metterei al primo posto la semplicità, l'uso di un linguaggio vicino alle abitudini della maggior parte dei matematici contemporanei, l'eventuale recupero di qualche antica tradizione matematica e filosofica.

Altro requisito essenziale di una buona "teoria base" dovrebbe essere la facilità "d'innestare" in modo naturale, sul tronco della teoria stessa, i diversi rami della matematica. Inoltre la teoria base dovrebbe presentare il piú alto grado di "autoreferenza"; mi è difficile trovare una definizione generale del termine "autoreferenza", ma posso citare l'esempio della teoria 7×2, in cui le relazioni $Rrelb$, $Rrelt, \ldots, Rrelq$, sono, per cosí dire, le pietre di un arco di cui l'operazione $Seprq$ è la chiave di volta.

Infine accanto a requisiti informali, la "teoria base" dovrebbe avere due requisiti facilmente formalizzabili da parte dei logici matematici: dovrebbe essere facilmente descrivibile nel linguaggio del calcolo dei predicati del primo ordine e dovrebbe possedere molti modelli finiti non banali.

Concluderò osservando che non vi è ragione per pensare che la teoria 7×2 sia ottimale rispetto a tutti questi requisiti; essa è solo un esempio che, spero, potrà incoraggiare altri matematici alla ricerca di altre "teorie base" o alla individuazione, all'interno di teorie già note, di qualche nucleo fondamentale finito che possa essere ragionevolmente assunto come "teoria base".

Lo spirito conduttore di questa teoria risiede nel rinviare il concetto di "coppia", "terna", ecc., per evitare di essere immediatamente immessi in una teoria non finita. Pertanto si useranno i concetti di relazioni binarie, ternarie e quaternarie, come verrà specificato, al fine di costruire, finché è possibile, una teoria base *finita* con modelli *finiti*.

Volendo precisare ancora un po' la mia "filosofia dell'innesto" direi che una buona esposizione di una "operazione d'innesto" potrebbe articolarsi in tre parti. Nella prima parte si potrebbero richiamare in modo assai sintetico concetti delle teorie classiche a cui ci si ispira e che alla fine si vorrebbero recuperare. Nella seconda parte l'autore finge per un momento di dimenticare le teorie classiche e di ricordare solo la teoria 7×2 (o qualche altra teoria base) e qualche nome suggestivo usato nelle teorie classiche che può ispirare molto liberamente i nomi e le sigle con cui designare le nuove costanti che arricchiranno la teoria base. Dopo l'introduzione delle nuove costanti si possono introdurre i nuovi assiomi a cui tali costanti soddisfano e che possono essere "liberamente ispirati" ad assiomi e teoremi delle teorie classiche ma non dedotti da tali teorie. Infine se la seconda parte è ben riuscita i principali oggetti delle teorie classiche potranno essere ragionevolmente identificati nella terza parte con alcuni oggetti della teoria base arricchita nel corso della seconda parte. Si realizza cosí il recupero della teoria classica cercando di ispirarsi ad altri recuperi ormai ben noti, per ésempio il recupero degli interi mediante gli ordinali di von Neumann finiti.

Teoria 7×2

Diamo le seguenti definizioni:

1) $Qqual\, q \quad \Leftrightarrow \quad q$ è una qualità.
Scriveremo qx per denotare che x gode della qualità q.

2) $Qrelb\, r \quad \Leftrightarrow \quad r$ è una relazione binaria.

3) $Qrelt\, \rho \quad \Leftrightarrow \quad \rho$ è una relazione ternaria.
Scrivere ρxyz equivale a dire che "x è nella relazione ρ con y e z".

4) $Qrelq\, \tau \quad \Leftrightarrow \quad \tau$ è una relazione quaternaria.
Ovviamente $\tau xyzt$ significa che x è nella relazione τ con yzt.

Definiamo poi le operazioni nel modo seguente:

5) $Qops\, f \quad \Leftrightarrow \quad f$ è una operazione semplice; $fx = y$ indicherà che y è il risultato dell'operazione semplice f eseguita su x.

6) $Qopb\, \phi \quad \Leftrightarrow \quad \phi$ è una operazione binaria.
Scriveremo $\phi xy = z$ per indicare che z è il risultato dell'operazione ϕ eseguita su x ed y.

Osservazione 1. Richiamandoci alle notazioni usuali adottate per la somma ed il prodotto, molto spesso useremo la notazione $x + y$ o $x \cdot y$ in luogo di ϕxy.

Unitamente alle sei definizioni date si introduce l'operazione

7) $Invrb$, inversione della relazione binaria; posto $Invrb\, r = r^{-1}$, vale la condizione:

$$rxy \quad \Leftrightarrow \quad r^{-1}yx$$

Osservazione 2. Una delle possibili varianti di questa teoria è quella di considerare le operazioni semplici come caso particolare delle relazioni binarie e le operazioni binarie come caso particolare delle relazioni ternarie.

Introduciamo ora un secondo gruppo di oggetti fondamentali. Il primo è $Rqual$, caratterizzato dalla condizione:

1)$Rqual\, qx \quad \Leftrightarrow \quad qx$ (relazione binaria che descrive il comportamento della qualità.)

2) $Rrelb$ è una relazione ternaria che può essere applicata a relazioni binarie o ad operazioni semplici nel modo seguente:

$$(Relb)rxy \quad \Leftrightarrow \quad rxy$$

$$(Relb)fxy \quad \Leftrightarrow \quad fx = y.$$

Analogamente poniamo:

3) $Rrelt$ è una relazione quaternaria tale che:

$$(Rrelt)\rho xyz \quad \Leftrightarrow \quad \rho xyz$$

$$(Rrelt)\phi xyz \quad \Leftrightarrow \quad \phi xy = z.$$

Introduciamo ora l'operazione binaria $Seprq$ (separazione di variabili nelle relazioni quaternarie) caratterizzata dalle proprietà seguenti:

4) se τ è una relazione quaternaria, allora, per ogni oggetto x, è definita $Seprq\,\tau x$, che è una relazione ternaria tale che

$$(Seprq\,\tau x)yzt \quad \Leftrightarrow \quad \tau xyzt.$$

Conviene esplicitamente osservare che una relazione quaternaria può essere descritta da una operazione binaria e da una relazione ternaria.

Introduciamo ora le nozioni di dominio, codominio ed ambiente.

5) Sia $Qrelb\,r$ (cioè sia r una relazione binaria); $Rdom$ è una relazione binaria tale che

$$Rdom\,xr \quad \Leftrightarrow \quad \text{esiste } y : rxy,$$

e traduce il fatto che "x appartiene al dominio di r".

Analogamente se $Qops\,f$ allora :

$$Rdom\,xf \quad \Leftrightarrow \quad \text{esiste } y : fx = y.$$

6) Se $Qrelb\,r$ definiamo:

$$Rcod\,yr \quad \Leftrightarrow \quad \text{esiste } x : rxy.$$

Se $Qops\,f$ allora :

$$Rcod\,yf \quad \Leftrightarrow \quad \text{esiste } x : fx = y$$

L'ambiente di una qualità, relazione, operazione, è l'area in cui vanno presi gli oggetti che hanno quelle qualità o sono comunque coinvolti da quella relazione o operazione.

7) Denoteremo con $Ramb$ la relazione binaria cosí definita: a) Se q è una qualità ed x un oggetto

$$Ramb\,xq \quad \Leftrightarrow \quad qx.$$

b) Se r è una relazione ed x un oggetto allora:

$$Ramb\, zr \quad \Leftrightarrow \quad Rdom\, xr \;\; \text{Vel} \;\; Rcod\, xr.$$

c) Se f è un'operazione ed x un oggetto allora

$$Ramb\, xf \quad \Leftrightarrow \quad Rdom\, xf \;\; \text{Vel} \;\; Rcod\, xf.$$

d) Se ρ è una relazione ternaria ed x un oggetto allora

$$Ramb\, x\rho \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ y, z \text{ tali che } \;\; \rho xyz \text{ Vel } \rho yxz \text{ Vel } \rho yzx.$$

e,f,g) Definizioni anologhe si dànno per le operazioni binarie, le relazioni quaternarie e le operazioni ternarie.

Abbiamo cosí selezionato il "tronco" 7×2 sul quale possono essere innestati i vari "rami" della matematica.

Bibliografia

[1] **E.De Giorgi–M.Forti:** *Premessa a nuove teorie assiomatiche dei fondamenti della matematica,* Pisa, Quad. 45(1984), 2–31.

[2] **E.De Giorgi–M.Forti:** *Una teoria-quadro per i fondamenti della matematica,* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **79** (1985), 55–67.

[3] **E.De Giorgi–M.Forti–V.M.Tortorelli:** *Sul problema dell'autoriferimento,* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **80** (1986), 363–372.