3. Spazi metrici quasi-riemanniani

Una proposta di definizione

Qui si propone una definizione di spazio metrico quasi-riemanniano (M, σ, g), uno spazio che abbia contemporaneamente una struttura metrica data da σ e una "riemanniana" data da g, e tale che le due strutture verifichino quasi ovunque alcune condizioni di compatibilità.

1.Preliminari.

(1.1) Sia (M, σ) uno spazio metrico, con M connesso, completo e σ una distanza *geodetica* (detta anche distanza *interna* o *intrinseca*) cioè tale che per ogni $\xi, \eta \in M$ si abbia

$$\sigma(\xi, \eta) = \inf\{\ L(\gamma)\ ;\ \gamma : [0,1] \to M,\ \gamma(0) = \xi, \gamma(1) = \eta\ \}$$

dove L è la variazione totale della funzione γ rispetto alla metrica σ.

(1.2) Indichiamo con $Bilip(\mathbf{R}^n, M)$ l'insieme delle coppie (V, φ) dove V è un aperto di $\mathbf{R}^n$, $\varphi : V \to U$ un omeomorfismo bilipschitziano tra V ed un aperto $U = \varphi(V)$ di (M, σ) La coppia (V, φ) è detta anche *parametrizzazione* di U.

Posto $\mathcal{M} = Bilip(\mathbf{R}^n, M)$, se $M = \cup\{\varphi(V); (V, \varphi) \in \mathcal{M}\}$ allora (M, σ) è una varietà di Lipschitz n-dimensionale (n-LIP varietà, cfr. §3).

Se $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ e $M = \cup\{\varphi(V); (V, \varphi) \in \mathcal{F}\}$ allora $\mathcal{F}$ è un atlante per (M, σ). Cosí $\mathcal{M}$ risulta l'atlante massimale della n-LIP varietà (M, σ).

(1.3) Se $W = (V, \varphi)$ è una parametrizzazione, è possibile definire su V una distanza σ_W, indotta da W, mediante

$$\sigma_W(x, y) = \sigma(\varphi(x), \varphi(y)) \qquad \forall x, y \in V$$

Congettura 1. Sia $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ un fissato atlante di (M, σ), sia $\mathcal{T}$ la famiglia di tutte le distanze τ su M (LIP) equivalenti a σ e per ogni $W = (V, \varphi)$ sia assegnata una forma bilineare simmetrica $g(W)$ a coefficienti $(g(W)_{ij})$ $\mathcal{H}^n$ -misurabili verificante per quasi ogni $(x, y) \in V^2$ la seguente condizione

$$\lambda_0 \le \sum_{i,j=1}^{n} g(W)^{ij}(x) \frac{\partial \sigma_W(x,y)}{\partial x_i} \frac{\partial \sigma_W(x,y)}{\partial x_j} \le \lambda_1 \tag{1.4}$$

dove λ_0 e λ_1 sono due numeri reali positivi e $(g(W)^{ij})$ sono gli elementi della matrice inversa di $(g(W)_{ij})$. Allora esiste una distanza $\overline{\tau}$ tale che

$$\overline{\tau} = \max\Big\{ \tau \in \mathcal{T}; \lambda_0 \tau \le \sigma \le \lambda_1 \tau,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} g(W)^{ij}(x)\,\frac{\partial \tau_W(x,y)}{\partial x_i}\,\frac{\partial \tau_W(x,y)}{\partial x_j} \le 1 \; q.o.\; su\; V,\; \forall W \in \mathcal{F}\Big\}$$

Congettura 2. Se la congettura 1 è verificata, allora anche $\overline{\tau}$ è una distanza geodetica.

(1.5) Supposta vera la congettura 1, se $W = (V, \varphi)$ è una parametrizzazione, poniamo, come al solito

$$\overline{\tau}_W(x,y) = \overline{\tau}(\varphi(x), \varphi(y))$$

e consideriamo la misura di Hausdorff n-dimensionale rispetto a $\overline{\tau}_W$, $\mathcal{H}^n_{\overline{\tau}_W}$.

Allora poniamo i seguenti problemi.

Problema 1. Trovare sotto quali condizioni su $\mathcal{F}$ e su g vale per ogni $W = (V, \varphi) \in \mathcal{F}$ la seguente formula

$$\int_V f\, d\mathcal{H}^n_{\overline{\tau}_W} = \int_V f\sqrt{\det(g(W)_{ij})}\, dx \qquad \forall f \in C^0_0(V)$$

È prevedibile che saranno necessarie condizioni di compatibilità tra le parametrizzazioni e sufficienti condizioni di regolarità per g.

Problema 2. Trovare sotto quali condizioni su $\mathcal{F}$ e su g per ogni funzione LIP $f : M \to \mathbf{R}$ e per ogni parametrizzazione $W = (V, \varphi) \in \mathcal{F}$ si abbia per quasi ogni $x \in V$

$$\limsup_{\zeta \to \varphi(x)} \left| \frac{f(\zeta) - f(\varphi(x))}{\overline{\tau}(\zeta, \varphi(x))} \right|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g(W)^{ij}(x)\, \partial_i(f \circ \varphi)\, \partial_j(f \circ \varphi)$$

Osservazione. Con simbolismo equivalente potremmo scrivere anche

$$|\nabla f|_{\overline{\tau}}(\varphi(x)) = |d(f \circ \varphi)(x)|_g$$

dove abbiamo posto, in accordo col concetto di pendenza di una funzione e di modulo del differenziale,

$$|\nabla f|_{\overline{\tau}} = \limsup_{\substack{\zeta \to \varphi(x) \\ \circ}} \left| \frac{f(\zeta) - f(\varphi(x))}{\overline{\tau}(\zeta, \varphi(x))} \right|$$

e

$$|d(f \circ \varphi)(x)|_g = \left(\sum_{i,j=1}^{n} g(W)^{ij}(x)\, \partial_i(f \circ \varphi)\, \partial_j(f \circ \varphi) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1.6) Nelle ipotesi in cui hanno risposta affermativa i problemi 1 e 2 è possibile definire i corrispondenti spazi di Sobolev. Ciò certamente accade se (M, g) è una varietà riemanniana di classe C^k con $k \geq 1$ e $\overline{\tau}$ è la distanza intrinseca indotta da g: basta anzi che i coefficienti di g siano continui in ogni carta e che siano compatibili con il cambiamento delle carte.

I problemi 1 e 2 suggeriscono di definire un'ampia classe di spazi detti *spazi metrici quasi-riemanniani* che andiamo a definire.

2.Proposta di definizione di spazio metrico quasi-riemanniano.

(2.1) Uno *spazio metrico quasi-riemanniano di dimensione* n, (M, σ, g), è una n-varietà LIP (M, σ) tale che esista un atlante $\mathcal{F} = \{(V, \varphi)\}$ e una famiglia $g = \{g(W);\ W = (V, \varphi) \in \mathcal{F}\}$ di forme bilineari simmetriche a coefficienti $\{g(W)_{ij}\}$ $\mathcal{H}^n$-misurabili verificanti per ogni W le seguenti condizioni

1) per q.o. $(x, y) \in V^2$si ha

$$0 < \lambda_0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} g(W)^{ij}(x) \frac{\partial \sigma_W(x,y)}{\partial x_i} \frac{\partial \sigma_W(x,y)}{\partial x_j} \leq \lambda_1 < +\infty ;$$

2) per ogni $f \in C_0^0(V)$ si ha

$$\int_V f \, d\mathcal{H}_\sigma^n = \int_V f \sqrt{\det(g(W)_{ij})} \, dx$$

3) per ogni $f : M \to \mathbf{R}$ LIP vale per q.o.$x \in V$

$$|\nabla f|_\sigma(\varphi(x)) = \left(\sum_{i,j} g(W)^{ij}(x) \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_i} \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_j} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(2.2) Se (M, g) è una varietà riemanniana e σ è l'usuale distanza intrinseca indotta da g, allora 1), 2), 3) sono verificate dappertutto.

Congettura 3. Sia (M, g, σ) uno spazio metrico quasi riemanniano di dimensione n. Se $\mathcal{F} = \mathcal{M}$, allora la distanza massima $\overline{\tau}$, congetturata in 1, si può costruire cosí

$$\overline{\tau}(x, y) = \lim_{p \to +\infty} \left[\inf \left\{ \left(\int_M |du|^p \, dv \right)^{\frac{1}{p}} ;\ u \in Lip(M),\ u(x) = 0,\ u(y) = 1 \right\} \right]^{-1}$$

dove naturalmente $|du| = |du|_g = |\nabla u|_\sigma$.

3. Confronto con la bibliografia.

(3.1) Uno spazio metrico (M, σ) con σ distanza geodetica è detto anche *spazio di lunghezza*. In tali ipotesi, se M è completo (connesso) e localmente compatto, allora ogni coppia di punti di M può essere congiunta con una geodetica minimizzante ([2], pag.5; [4], pag. 172).

(3.2) Una *n-varietà di Lipschitz* è uno spazio metrico (M, σ) paracompatto e connesso tale che ogni punto $x \in M$ ha un intorno chiuso U bilipschitz-omeomorfo all' n-disco chiuso $\overline{\mathbf{B}}^n \subset \mathbf{R}^n$.

Si può vedere ([3], pag. 98) che la definizione precedente è equivalente a quella data tramite atlanti.

(3.3) Una n-varietà LIP è una coppia costituita da una n-varietà topologica M paracompatta e connessa e da una classe di equivalenza di LIP atlanti. Un *LIP atlante* su M è una famiglia di carte $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ dove gli $\{U_\alpha\}$ formano un ricoprimento aperto di M e

$$\Phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$$

porta omeomorficamente U_α su un insieme V_α che è aperto in $\mathbf{R}^n$ o in $\mathbf{R}^n_+$ e

$$\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} : \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

è LIP per ogni $\alpha, \beta \in \Lambda$.

Ad ogni carta (U_α, Φ_α) possiamo associare la parametrizzazione $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$, dove $V_\alpha = \Phi_\alpha(U_\alpha)$ e $\varphi_\alpha = \Phi_\alpha^{-1}$.

(3.4) Una *(struttura) metrica riemanniana* su M ([5], pag. 45) è una collezione $g = \{g^\alpha\}$, dove g^α è una forma bilineare simmetrica definita positiva su $V_\alpha \subset \mathbf{R}^n$, con componenti misurabili, che soddisfa quasi ovunque le condizioni di compatibilità

$$\Phi^*_{\alpha\beta} g^\beta = g^\alpha \qquad \text{(senza sommare)}$$

dove $\Phi^*_{\alpha\beta}$ è la trasposta dell'applicazione lineare $d\Phi_{\alpha\beta}$ definita componente per componente. Ricordiamo che $\Phi_{\alpha\beta}$, essendo LIP, è differenziabile q.o.

(3.5) Una (struttura) metrica riemanniana g sarà chiamata *(struttura) metrica riemanniana LIP* su M se ogni g^α definisce su V_α una norma L_2 che è equivalente a quella L_2 standard, cioè esistono due costanti k_α eK_α tali che, per ogni forma ω differenziabile e a supporto compatto in V_α si abbia

$$k_\alpha \|\omega\| \leq \|\omega\|_{g^\alpha} \leq K_\alpha \|\omega\| \tag{3.6}$$

dove

$$\|\omega\|^2 = \int_M \omega \wedge *\omega = \int_M |\omega|^2 \, dv \ ,$$

e

$$\|\omega\|^2_{g^\alpha} = \int_M \omega \wedge *_\alpha \omega = \int_M |\omega|^2_{g^\alpha} \, dv_\alpha$$

essendo $*$ e $*_\alpha$ gli operatori di Hodge rispettivamente della metrica euclidea e di g^α. Naturalmente se $x_1, ... x_n$ sono coordinate in $\mathbf{R}^n$, allora

$$dv_\alpha = \sqrt{|g^\alpha|}\, dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Si osservi che metrica riemanniana *LIP* non vuol dire che le componenti di g siano *LIP*, ma da (3.6) segue che è possibile trovare due costanti h_α e H_α strettamente positive tali che per ogni carta (U_α, Φ_α) si abbia per quasi ogni $z \in V_\alpha$

$$h_\alpha^2 \sum_i (v^i)^2 \leq \sum_{i,j} g_{ij}^\alpha(z)\, v^i v^j \leq H_\alpha^2 \sum_i (v^i)^2 \tag{3.7}$$

per ogni n-pla $(v^1, ..., v^n) \in \mathbf{R}^n$.

(3.8) **Nota.**

Se (M, g) è una *LIP* varietà riemanniana con metrica *LIP* nel senso di [5], in [1] viene studiata nei dettagli l'espressione che compare nella congettura 3, provando che essa è una distanza intrinseca, $\delta(x, y)$, che coincide con quella classica se (M, g) è una varietà riemanniana di classe C^k con $k \geq 1$. Cosí (M, δ) diviene anche uno spazio metrico, con δ distanza geodetica.

Rimane ancora aperta la questione di vedere se (M, g, δ) è uno spazio metrico quasi-riemanniano.

Bibliografia

[1] **G.De Cecco–G.Palmieri:** *Integral Distance on a Lipschitz Riemannian Manifold,* Dip.di Mat.Univ. di Lecce, Preprint n.36 (1988).

[2] **M.Gromov** (rédigé par **J.Lafontaine et P.Pansu**): *Structures métriques pour les variétés riemanniennes,* Cedic-Nathan, Paris (1981).

[3] **J.Luukkainen–J.Väisälä:** *Elements of Lipschitz Topology,* Ann.Ac.Sc.Fennicae **3** (1977), 85-122.

[4] **W.Rinow:** *Die innere Geometrie der metrischen Räume,* Springer (1961).

[5] **N.Teleman:** *The Index of Signature Operators on Lipschitz Manifolds,* Publ.Math. IHES **58** (1983), 261-290.