0. Richiami sulle misure di Hausdorff

Per comodità del lettore richiamiamo brevemente la definizione delle misure di Hausdorff e il concetto di insieme rettificabile, rinviando per esempio a: H.Federer, Geometric Measure Theory, Springer per una ampia trattazione di questi argomenti e per le dimostrazioni.

Definizione 1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Si definisce misura di Borel regolare una applicazione $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ tale che 1) μ è numerabilmente subadditiva, cioè per ogni successione $(E_i)_i$ di sottoinsiemi di X risulta*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \ ;$$

2) i boreliani di X sono misurabili secondo Carathéodory, cioè per ogni boreliano $B \subset X$ risulta

$$\mu(E) = \mu(E \cap B) + \mu(E \setminus B) \quad \text{per ogni } E \subset X \ ;$$

3) per ogni $E \subset X$ risulta

$$\mu(E) = \inf\{\mu(B); \quad E \subset B, B \text{ boreliano }\} \ .$$

Definizione 2. *Sia (M, σ) uno spazio metrico, e sia $h > 0$ un numero reale. Si definisce la misura di Hausdorff h-dimensionale rispetto alla distanza σ ponendo per ogni $E \subset M$*

$$\mathcal{H}_\sigma^h(E) = \frac{2^{1-h}\pi^{h/2}}{h\Gamma(h/2)} \lim_{\epsilon \to 0+} \quad \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}E_i)^h \ ; \ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \ , \ \text{diam}E_i < \epsilon \right\}$$

ove $\quad \Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} \, t^{s-1} \, \text{dt} \quad$ *per $s > 0$.*
Definiamo inoltre $\mathcal{H}_\sigma^0$ come la misura che conta i punti, cioè $\mathcal{H}_\sigma^0(E) = \text{card}(E)$.

Le misure di Hausdorff in $\mathbf{R}^n$ rispetto alla distanza euclidea saranno, com' è usuale, denotate semplicemente con $\mathcal{H}^h$.

Valgono i seguenti ben noti risultati.

1. Per $h \geq 0$ la misura $\mathcal{H}_\sigma^h$ è una misura di Borel regolare.

2. Se (M, σ) è $\mathbf{R}^n$ munito della distanza euclidea allora $\mathcal{H}^n$ coincide con la misura di Lebesgue n-dimensionale. Inoltre, per ogni h, la misura $\mathcal{H}^h$ è invariante per traslazioni e, per ogni $r > 0$ si ha $\quad \mathcal{H}^h(rE) = r^h \mathcal{H}^h(E) \quad$ per ogni $E \subset \mathbf{R}^n$.

3. Se $0 < \mathcal{H}_\sigma^h(E) < +\infty$ allora $\mathcal{H}_\sigma^k(E) = 0$ per ogni $k > h$ e $\mathcal{H}_\sigma^k(E) = +\infty$ per ogni $k < h$.

Notiamo anche che la misura $\mathcal{H}^h$ coincide con ogni ragionevole definizione di misura h-dimensionale sulle sottovarietà regolari h-dimensionali di $\mathbf{R}^n$.

Alla luce del precedente risultato 4 ha senso porre la seguente

Definizione 3. *Si dice dimensione di Hausdorff dell'insieme E contenuto nello spazio metrico (M, σ) il numero reale*

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf \left\{ h \geq 0;\ \mathcal{H}_\sigma^h(E) = 0 \right\} .$$

Richiamiamo infine la definizione di insieme rettificabile.

Definizione 4. *Sia (M, σ) uno spazio metrico, e sia $E \subset M$.*

Si dice che E è h-rettificabile se esiste una funzione lipschitziana che applica un insieme limitato di $\mathbf{R}^h$ su E.

Si dice che E è numerabilmente h-rettificabile se E è unione numerabile di insiemi h-rettificabili.

Si dice che E è numerabilmente $(\mathcal{H}_\sigma^h, h)$-rettificabile se esiste un insieme numerabilmente h-rettificabile F tale che $\mathcal{H}_\sigma^h(E \setminus F) = 0$.

Si dice che E è $(\mathcal{H}_\sigma^h, h)$-rettificabile se è numerabilmente $(\mathcal{H}_\sigma^h, h)$-rettificabile e $\mathcal{H}_\sigma^h(E) < +\infty$.

Vale la seguente caratterizzazione dei sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$ numerabilmente $(\mathcal{H}^h, h)$-rettificabili.

Teorema 1. Un sottoinsieme $E \subset \mathbf{R}^n$ è numerabilmente $(\mathcal{H}^h, h)$-rettificabile se e solo se esiste una successione $(S_i)_i$ di varietà h-dimensionali di classe C^1 tale che

$$\mathcal{H}^h \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right) = 0 \quad .$$

Ricordiamo infine che vale la seguente *formula dell'area*.

Teorema 2. Siano $h, n \in \mathbf{N}$ con $h \leq n$, sia $A \subset \mathbf{R}^h$ un aperto e $f \in (C^1(A))^n$. Detta $J(f)$ la matrice jacobiana di f e $J(f)^*$ la sua trasposta, risulta

$$\int_A \sqrt{\det(J(f)^* J(f))}\ \mathrm{dy} = \int_{\mathbf{R}^n} \mathcal{H}^0(f^{-1}(x))\ d\mathcal{H}^h(x) .$$