LA CARATTERISTICA DI EULERO IN GEOMETRIA

Giuseppe De Cecco

Nella riunione inaugurale sono stato presentato come un salvatore della Geometria. La Geometria certamente non ha bisogno di me, non deve difendersi. Essa, come dice Platone,

> *"e' conoscenza di cio' che sempre e', e' argano che tira l'animo verso la verita'."*

Si può essere piú o meno d'accordo su questo, ma da un punto di vista storico non si può negare che la Geometria è stata la via privilegiata per avvicinarsi alla matematica.

Come afferma Atiyah, uno dei massimi matematici viventi,

> *"l'intuizione geometrica rimane il canale piu' potente per la comprensione della matematica, e dovrebbe essere incoraggiata e coltivata."*

Sono contento del tema proposto poiché esso mi permette di parlare anche dell'infanzia della *"Topologia algebrica"*, una delle branche piú giovani della matematica, che - secondo Dieudonné - caratterizzerà il XX secolo.

Accenneremo dopo a che cosa sia la Topologia algebrica, ora ricordiamo soltanto che la Topologia è lo studio delle proprietà di una figura che sono invarianti per omeomorfismi. Due figure X ed Y sono *omeomorfe*, in simboli $X \cong Y$, se esiste tra loro un *omeomorfismo* $f: X \longrightarrow Y$, cioè un'applicazione biunivoca e continua insieme alla sua inversa.

Per la topologia due figure omeomorfe sono "uguali", indistinguibili. Un quadrato e un cerchio sono la stessa cosa, una corona circolare e un cilindro (non solido) sono la stessa cosa; mentre per la geometria euclidea sono tutte figure distinte poiché non sono tra loro congruenti.

Ebbene nella topologia l'importanza del *teorema di Eulero* per i poliedri è notevolissima, se si pensi che la storia della topologia fino al 1851 si confonde, a meno di rare eccezioni, con la storia del teorema stesso.

L'anno della sua scoperta è il 1750, ma il risultato è pubblicato nel 1752 in "*Elementa doctrinae solidorum*" di Leonhard Euler (1707-1783), uno dei matematici piú geniali e prolifici di tutti i tempi.

L'enunciato originale del teorema è

> "In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex angulorum solidorum et ex numero hedrorum binario excedit numerum acierum."

Chiamando con F il numero delle facce, con V quello dei vertici e con S quello degli spigoli si ha la celebre formula

$$F + V = S + 2$$

che generazioni di ragazzi hanno ricordato mnemonicamente con la frase: *F*atti *V*edere *S*abato alle *2*.

Ebbene mi sembra che questa formula venga attualmente trascurata nelle Scuole secondarie, insieme a gran parte delle questioni inerenti ai poliedri, questioni che vi posso assicurare non sono per nulla sorpassate. Dopo circa 2500 anni i poliedri esercitano ancora il loro fascino.

Come afferma ancora M.F.Atiyah (nell'articolo *Tendenze in Matematica pura* riportato in *La didattica della matematica oggi*, a cura di C.Sitia, Quaderno UMI, Pitagora ed. 1979):

> *La matematica moderna non ha chiesto il divorzio dalla matematica tradizionale come a volte si insinua. I matematici hanno unito le loro forze e si sono proiettati in direzioni diverse ma gli obiettivi di base sono ancora in gran parte gli stessi. La differenza sta piu' nella forma che nella sostanza e se Newton o Gauss potessero riapparire in mezzo a noi, per capire i problemi in discussione della presente generazione di matematici, basterebbe loro soltanto un breve corso preliminare.*

A mio avviso, seguendo Atiyah, è essenziale recuperare il senso d'unità delle diverse branche della matematica : i loro legami, spesso insospettati, le analogie non sono accidentali, ma fanno parte della essenza della matematica, che è un'attività umana non un programma per computers.

1. Concetto di poliedro.

E' chiaro che la definizione di poliedro usata da Eulero è *"solido delimitato da facce piane"*. Ebbene, se questa è la definizione di poliedro, la formula di Eulero non si applica a tutti i poliedri, come osservò già Simon Lhuilier nel 1813. Infatti per un *poliedro anulare* si vede facilmente che $V\text{-}S+F\ =0$, per un *poliedro con una cavita'* si ha $V\text{-}S+F=4$.

Si tratta quindi di vedere a quali classi di poliedri si applica la formula di Eulero, oppure dare una definizione di poliedro piú restrittiva.

Euclide non definisce i poliedri in maniera esplicita, ma nel Libro XI implicitamente si deduce che un poliedro è un *"solido delimitato da facce piane"*. Ora un solido è una porzione di spazio connessa; quindi nel concetto di solido è implicita l'idea che il bordo di un poliedro (cioè la superficie che delimita il poliedro) divida lo spazio in cui è immerso in due parti, una limitata da chiamarsi *interna* e una illimitata da chiamarsi *esterna*. Ciò suggerisce di porre a fondamento del concetto di poliedro il

TEOREMA DI JORDAN
Se Π e' una (superficie) poliedrica semplice e chiusa, allora essa divide lo spazio in due regioni (aperte e connesse), aventi entrambe come frontiera Π.

Per comprendere bene il teorema consideriamo l'analogo nel piano:

Se Π e' una (linea) poligonale semplice e chiusa, allora essa divide il piano in due regioni (aperte e connesse), aventi entrambe come frontiera Π.

E' questo il celebre teorema enunciato da C.Jordan nel 1887. La dimostrazione da lui data non era completa, ma era notevole il riconoscere che un enunciato cosí semplice ed evidente avesse bisogno di una dimostrazione, la quale non è per nulla semplice. L'enunciato generale del teorema è

Se J e' una curva piana semplice e chiusa (cioe' una curva $J \subset \mathbb{R}^2$ omeomorfa alla circonferenza), allora $\mathbb{R}^2 - J$ ha due componenti connesse, aventi J come frontiera comune.

Naturalmente se J è una circonferenza il teorema è ovvio. Nel caso generale la difficoltà sostanziale sta nel dare un "buon" criterio che permetta di distribuire i punti di $\mathbb{R}^2 - \Pi$ in esattamente *due* regioni, significative dal punto di vista geometrico.

Tenendo conto del teorema, chiamiamo *poligono (ordinario)* l'unione della regione limitata e dei punti di Π: la regione limitata è l'*interno* e quella illimitata l'*esterno* del poligono contornato dalla poligonale Π.

Naturalmente le cose si complicano nel caso dello spazio. Innanzitutto si tratta di dare il concetto di poliedrica semplice e chiusa , tale che elimini l'*intreccio* sia nei lati che nei vertici.

Nello spazio ordinario diremo che una *m*-pla di triangoli non degeneri:

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$$

a due a due distinti, costituisce una *poliedrica*, Π, con le *facce* nei triangoli τ_i $(i=1,\ldots,m)$ e i *lati* (o gli *spigoli*) e i *vertici* nei lati e nei vertici degli stessi triangoli, se due facce qualunque di Π o sono disgiunte o hanno in comune soltanto un vertice, vertice per entrambe, oppure hanno in comune soltanto un lato, lato per entrambe. Il *sostegno* di Π , $|\Pi|$, è il luogo dei punti delle sue facce; la poliedrica Π individua il suo sostegno ma non viceversa. I punti del sostegno sono anche i *punti* della poliedrica. Perciò si confonde spesso il sostegno di Π con Π stessa. La poliedrica Π si dice *concatenata* se, date comunque due facce di essa, τ_h e τ_k, esiste una *n*-pla $(n \leq m)$ di sue facce:

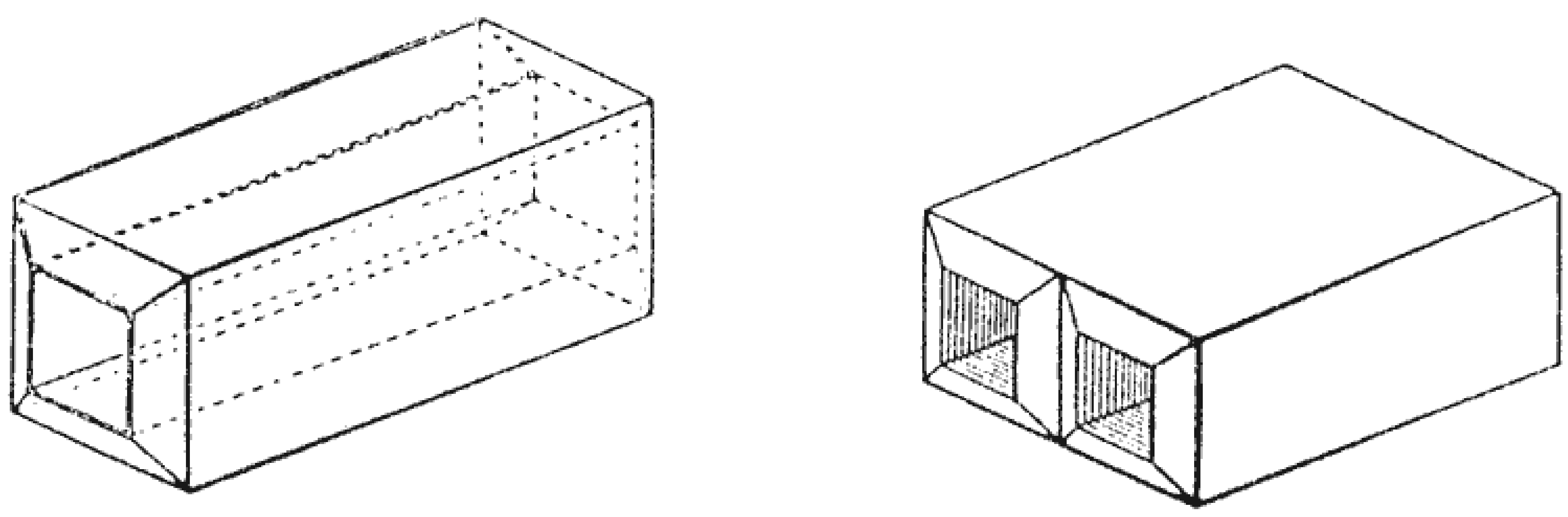
$$\tau_{\lambda_1}, \tau_{\lambda_2}, \ldots, \tau_{\lambda_n}$$

tale che $\tau_{\lambda_1} = \tau_h$, $\tau_{\lambda_n} = \tau_k$ e τ_{λ_r} $(r=1,\ldots,n-1)$ abbia in comune con $\tau_{\lambda_{r+1}}$ soltanto un lato, lato per entrambe. La poliedrica Π si dice *semplice*, se dato comunque un suo spigolo, in esso concorrono al piú due facce della poliedrica e se, comunque considerato un vertice di Π, le facce di Π concorrenti in esso, si possono concatenare mediante facce uscenti da quel vertice stesso. Gli spigoli che appartengono ad una sola faccia costuiscono il *bordo*, $\partial\Pi$, della poliedrica semplice. La poliedrica semplice Π si dice *chiusa* se, dato comunque un suo spigolo, in esso concorrono sempre due facce della poliedrica: in tal caso $|\partial\Pi| = \emptyset$.

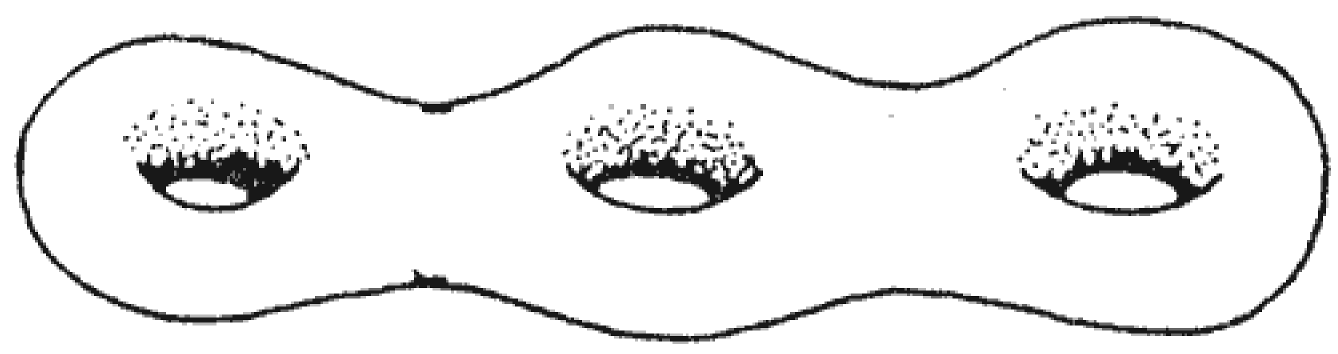
Ebbene, se Π è semplice e chiusa, per il teorema di Jordan, essa divide lo spazio in due regioni, una limitata e l'altra illimitata. L'unione della regione limitata e del sostegno della poliedrica costituisce un *solido poliedrico* o *poliedro*, $\mathscr{P}$, avente come frontiera Π. La regione limitata è l'*interno* e quella illimitata l'*esterno* del poliedro contornato da Π.

Si osservi che non è l'usuale definizione di poliedro: un poliedro nel nostro senso può essere non convesso, anzi un modello standard è un parallelepipedo con $p > 0$ *"buchi"*, detto anche *blocco prismatico p-uplo*, omeomorfo ad una *ciambella con p buchi* (vedi figura sotto).

Se però $\mathscr{P}$ è convesso, allora il suo bordo, Π, è omeomorfo ad una sfera e quindi al bordo di un parallelepipedo con $p=0$ buchi.



Blocchi prismatici con $p = 1$ e $p = 2$.



Ciambella con $p = 3$ buchi.

2. La caratteristica di Eulero.

Sia Π una poliedrica arbitraria (in generale aperta anche non semplice). Si chiama *caratteristica di Eulero* il numero intero

$$\chi(\Pi) = V - S + F,$$

dove come al solito V è il numero dei vertici, S quello degli spigoli ed F quello delle facce.

Si dimostra abbastanza facilmente che se Π e Π' sono due poliedriche aventi lo stesso sostegno, allora $\chi(\Pi) = \chi(\Pi')$, cioè la caratteristica di Eulero non dipende dalla reticolazione scelta per Π: in particolare se Π può considerarsi reticolata da poligoni e $\tilde{V}$, $\tilde{S}$, $\tilde{F}$ sono rispettivamente il numero dei vertici, degli spigoli e delle facce della *reticolazione poligonale*, allora vale

$$V - S + F = \tilde{V} - \tilde{S} + \tilde{F}$$

Inoltre, ma ciò è piú difficile, si può dimostrare che

$$|\Pi| \cong |\Pi'| \quad \Rightarrow \quad \chi(\Pi) = \chi(\Pi'),$$

cioè χ è un *invariante topologico* (anzi *omotopico*).Questa proprietà giustifica il notevole interesse della caratteristica di Eulero per poliedri (anzi per spazi topologici triangolabili).

Ora, poiché un poliedro convesso ha il bordo omeomorfo ad una sfera, S^2, dall'invarianza topologica segue che per i poliedri Π della geometria elementare si ha

$$\chi(\Pi) = \chi(S^2).$$

Ma S^2 è omeomorfa al bordo di un tetraedro, per il quale il calcolo è semplice:

$$V = 4 \qquad S = 6 \qquad F = 4\ .$$

Si conclude allora che *per un poliedro $\mathcal{P}$ tale che $|\partial\mathcal{P}| = \Pi \cong S^2$, vale $\chi(\Pi) = 2$, cioe' la formula di Eulero.*

Se Π è una *poligonale* poniamo semplicemente $\chi(\Pi) = V - S$.

Nell'Appendice daremo una dimostrazione diretta seguendo A.L. Cauchy. Altre dimostrazioni (piú o meno complete) si trovano in [4], [5], [6], [7], [8]: sono tutte dimostrazioni abbastanza elementari che potrebbero essere date in una scuola superiore o anche in una media trascurando qualche dettaglio (cfr. [8]).

3. Esempi.

Osserviamo innanzitutto che se A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ sono poliedriche o poligonali, allora vale

(*) $$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$

come si verifica facilmente.

Da qui segue che se Σ_1 è una *poliedrica anulare*, allora $\chi(\Sigma_1) = 0$. Infatti sia Σ_1 decomposta in due poliedriche, A e B, come in figura, allora

$$\chi(A) = \chi(B) = \chi(S^2) - 2 = 0$$

e tenendo conto di (*) si conclude $\chi(\Sigma_1) = \chi(A \cup B) = 0$.

Sia ora Σ_p la poliedrica bordo di un blocco prismatico p-uplo. Considerando Σ_p decomposta in due poliedriche, A e B, come in figura, si ha

$$\chi(A) = \chi(\Sigma_1) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\chi(B) = \chi(\Sigma_{p-1}) - 1 \qquad \chi(A \cap B) = \chi(S^1) = 0$$

quindi

$$\chi(\Sigma_p) = \chi(\Sigma_{p-1}) - 2,$$

da cui

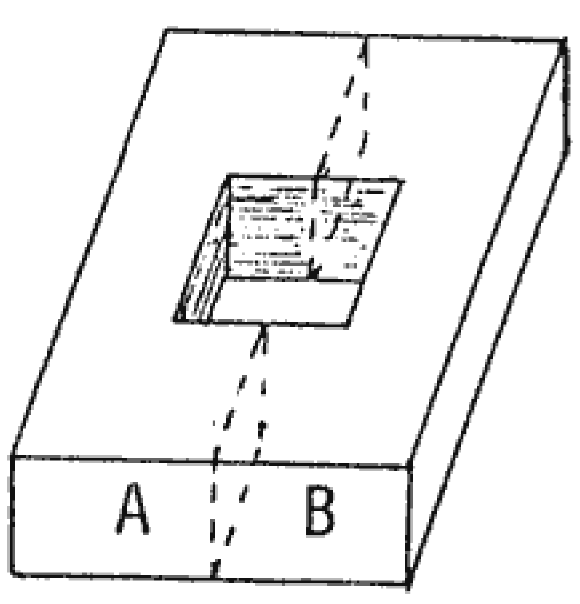
$$\chi(\Sigma_p) = (\chi(\Sigma_{p-1}) - 2) - 2 = \chi(\Sigma_1) - 2(p-1) = 2 - 2p .$$

Dunque se M è una superficie omeomorfa a Σ_p, segue

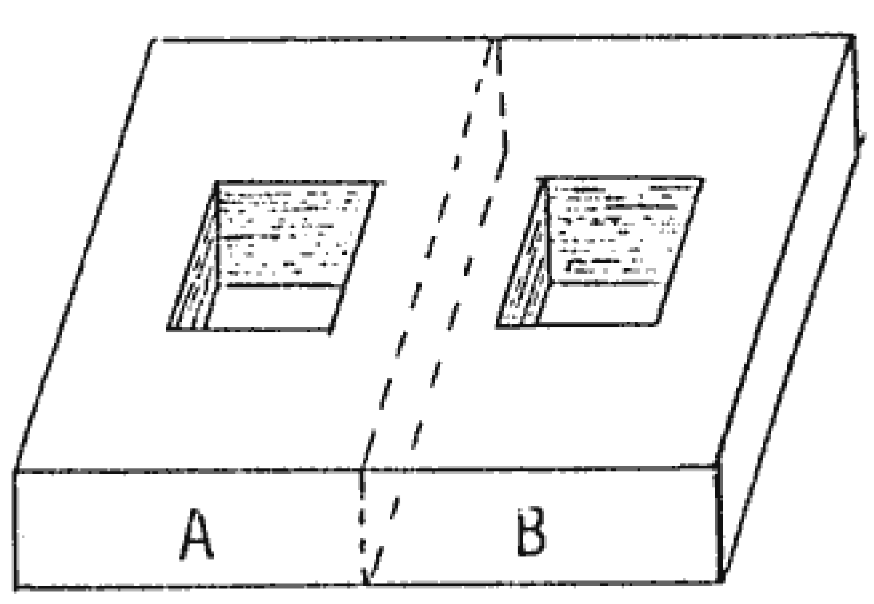
$$\chi(M) = 2 - 2p.$$

Il numero $p \geq 0$ si chiama *genere* della superficie M ed è ovviamente un invariante topologico. Per $p = 0$ (sfera) si ottiene il risultato classico. Tuttavia non sempre è facile decidere qual è il genere di una superficie, per cui spesso si procede inversamente ricorrendo alla formula

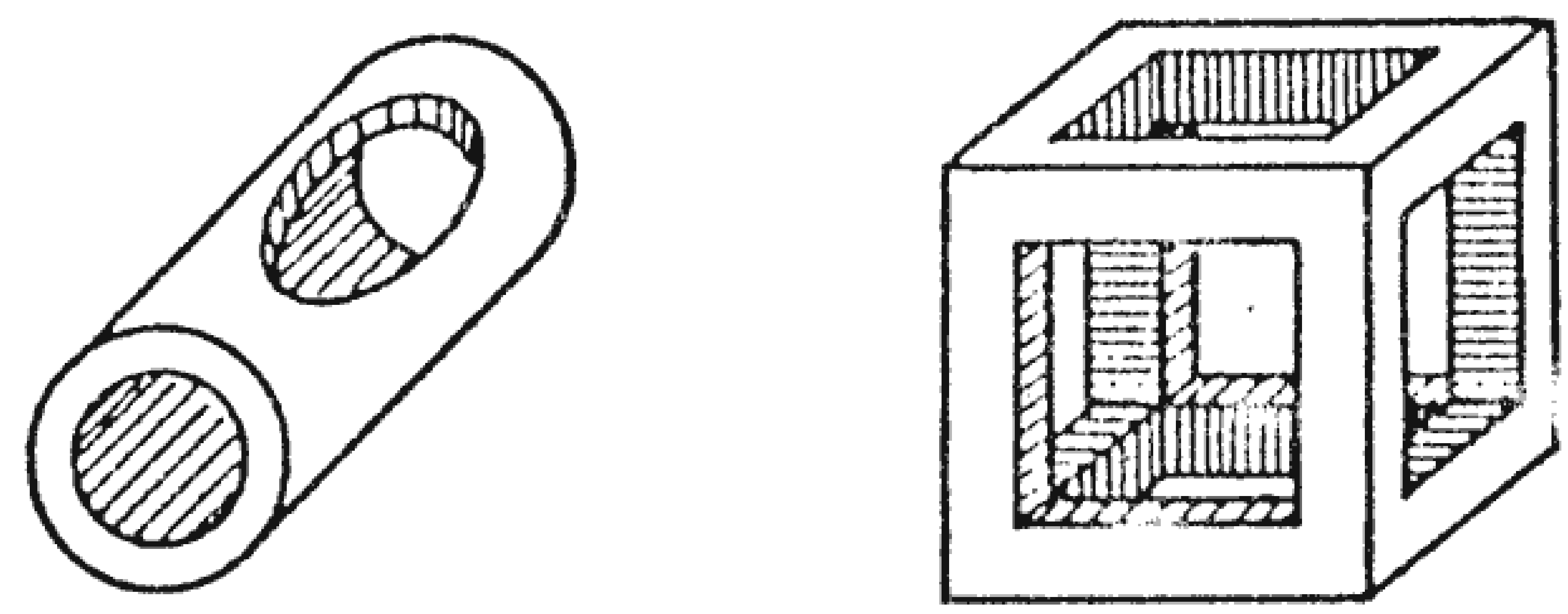
$$p = (2-\chi(\Pi))/2 .$$



Σ_1



Σ_2



Superficie di genere $p = 2$ e $p = 5$.

4. Poligoni generalizzati.

Si chiama *poligono generalizzato* una poliedrica (semplice e) piana: esso può pensarsi come unione di poligoni (ordinari) convessi. Possiamo sempre supporre che i poligoni convessi K_i siano tali che l'interno di $K_i \cap K_j$ $(i \neq j)$ sia vuoto, cioè che il poligono generalizzato Π sia unione, nel senso della geometria elementare, dei poligoni K_i: in breve Π è *somma diretta* dei poligoni K_i e si scrive $\Pi = \oplus_i K_i$.

Si vede facilmente che, rispetto alle operazioni di intersezione e di unione insiemistica, l'insieme dei poligoni generalizzati del piano, $\mathscr{Pol}$, è un reticolo distributivo.

Si chiama *funzionale poligonale* una qualsiasi funzione

$$\varphi : \mathscr{Pol} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Per convenzione poniamo $\varphi(\emptyset) = 0$. Il funzionale φ si dice *additivo* se $\forall\ \Pi, \Sigma \in \mathscr{Pol}$ vale

$$\varphi(\Pi) + \varphi(\Sigma) = \varphi(\Pi \cup \Sigma) + \varphi(\Pi \cap \Sigma).$$

Importanti esempi sono i funzionali $\mathscr{L}$, $\mathscr{A}$ e χ, rispettivamente *perimetro, area* e *caratteristica di Eulero* di un poligono generalizzato.

Se $h \in \mathbb{R}^+$, indichiamo con $h\Pi$ il poligono ottenuto da Π mediante l'omotetia di rapporto h; allora

$$\mathscr{L}(h\Pi) = h\,\mathscr{L}(\Pi), \qquad \mathscr{A}(h\Pi) = h^2\mathscr{A}(\Pi), \qquad \chi(h\Pi) = \chi(\Pi).$$

Inoltre i tre funzionali sono *invarianti per congruenze* ma non caratterizzano un poligono, come si può verificare considerando i due triangoli isosceli di lati:

$$a = b = 11,\ c = 4 \qquad\qquad a' = b' = 7,\ c' = 12.$$

Naturalmente se φ è una delle tre funzioni $\mathscr{L}$, $\mathscr{A}$ o χ , da $\varphi(\Pi) \neq \varphi(\Sigma)$ segue che i poligoni Π e Σ non possono essere congruenti. Anzi se $\chi(\Pi) \neq \chi(\Sigma)$ segue che Π e Σ non sono nemmeno omeomorfi.

E' questo lo spirito della *topologia algebrica*: tradurre un problema di topologia in uno di algebra. Informazioni su enti algebrici (in questo caso numeri) danno informazioni su enti geometrici. Analogamente la *geometria analitica* traduce problemi di geometria in problemi di analisi (con la segreta speranza che questi siano di piú facile soluzione). E' ciò che tutti abbiamo fatto fin dalle scuole elementari sotto il nome di *applicazione dell'algebra alla geometria.*

Ritorniamo alla caratteristica di Eulero.

Sia Π_1 il poligono in figura con la reticolazione indicata; segue immediatamente che $\chi(\Pi_1)=0$. Con un ragionamento analogo a quello fatto per Σ_p, si deduce che per il poligono Π_p con p buchi si ha

$$\chi(\Pi_p) = 1 - p.$$

Una figura piana omeomorfa a Π_p si chama *poligono topologico con ordine di connessione* $p + 1$. Si osservi che

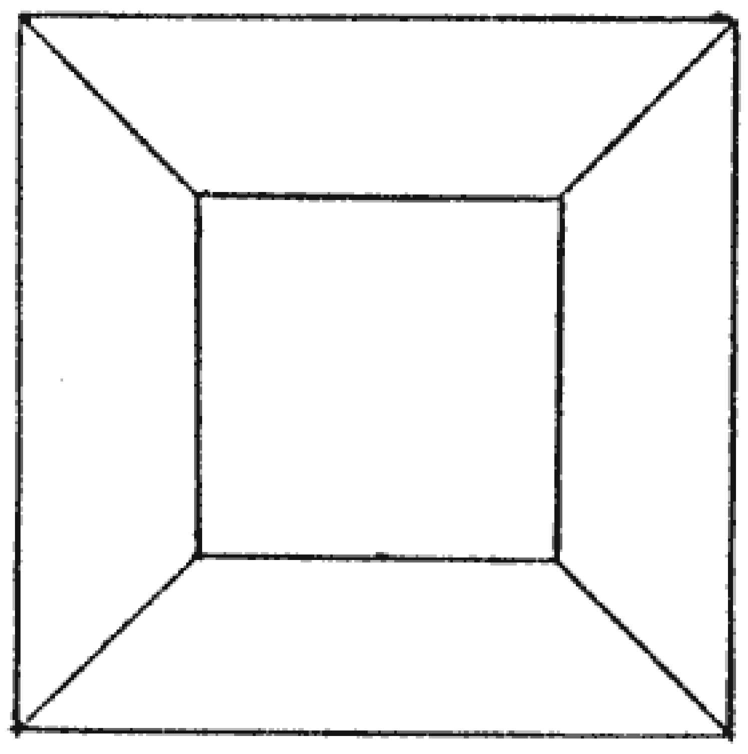
$$\chi(\Sigma_p) = \chi(\Pi_p) = 0 \quad ma \quad \Sigma_p \neq \Pi_p.$$

Se Π è un poligono convesso, allora $p = 0$; quindi in tal caso

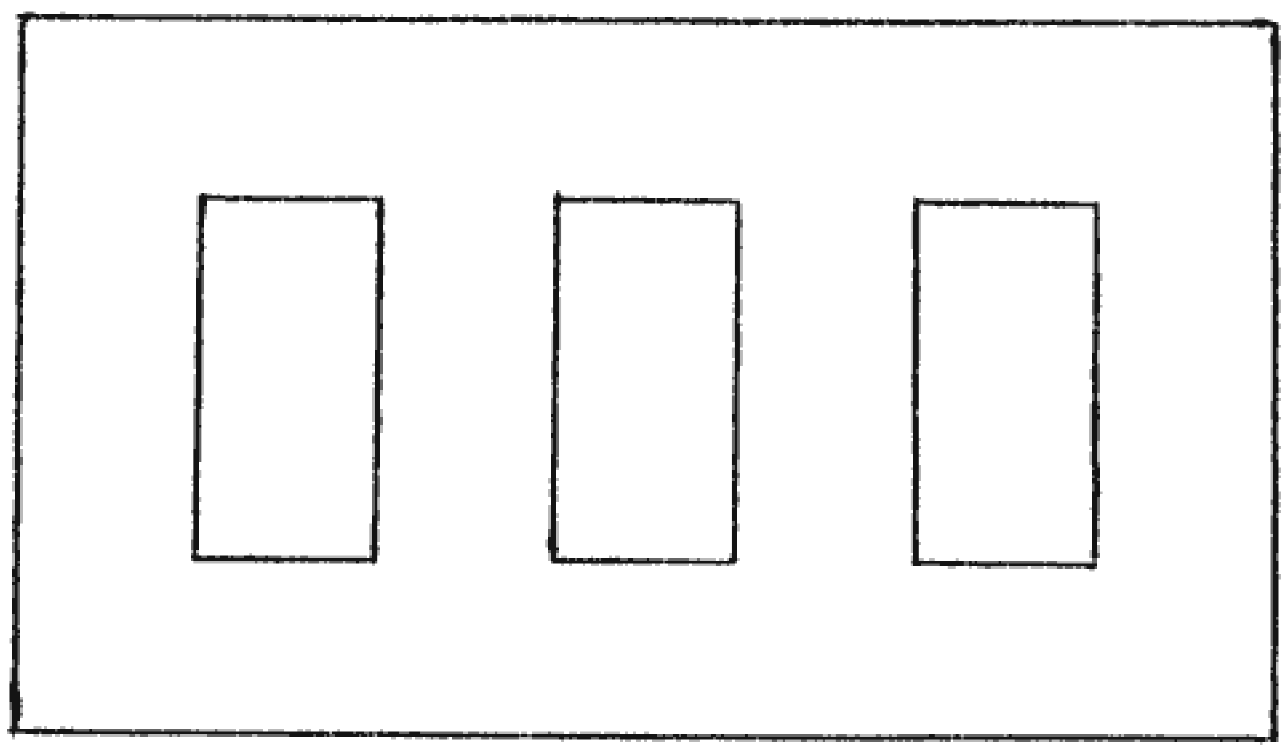
$$\chi(\Pi) = V - S + F = 1,$$

che può considerarsi la *formula di Eulero per una rete piana.*

Ricordiamo che una *rete* (o *grafo*) è una figura omeomorfa ad una poligonale (anche intrecciata). In tal caso si preferisce chiamare i vertici col nome di *nodi* e i lati col nome di *archi.*



Π_1



Π_p

5. Conclusione

Come ho detto, il 1750 segna l'inizio della storia del teorema di Eulero: la dimostrazione, benché non corretta, è molto interessante. Sostanzialmente Eulero fa vedere che l'espressione *V-S+F* ha valore costante per tutti i poliedri "da lui considerati" e quindi può essere calcolata limitandoci ad una piramide.

La prima dimostrazione soddisfacente è di A. M. Legendre (1794), che proietta il poliedro (convesso) da un punto interno su una sfera e raggiunge il risultato usando in maniera essenziale l'area di un poligono sferico. A questa dimostrazione non di pertinenza dell' *Analysis situs* seguono nel 1810 da parte di A. L. Cauchy due dimostrazioni *"combinatorie"*, ma anche queste non sono esenti da critiche.

Nel 1813 S. Lhuilier riconosce che il teorema di Eulero ha eccezioni ed analizza minuziosamente i diversi casi *patologici* , introducendo il concetto di *genere* di un poliedro, che giocherà un ruolo fondamentale in topologia.

Chi pone al teorema nel 1847 le ipotesi corrette è C. von Staudt che sostanzialmente definisce la nozione di poliedro semplicemente connesso (cioè di genere 0).

Infine nel 1850 L. Schläfli ottiene la prima generalizzazione per poliedri (euleriani) ad n dimensioni pervenendo alla relazione

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1} + (-1)^n = 1$$

dove α_h è il numero delle *facce h-dimensionali.*

Come afferma J. C. Pont (autore de *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, Presses Univ., Paris 1974), al quale sono debitore delle notizie storiche,

> *"dopo un secolo di storia, il teorema di Eulero ha percorso tutte le tappe di un onesto teorema: apparizione empirica, enunciato approssimativo, dimostrazione in un caso particolare, enunciato esatto, generalizzazione."*

Successivamente C. F. Gauss (1827) e J. B. Listing (1861) mettono in luce il legame tra il teorema di Eulero e l'*Analysis situs*, che dopo Listing si chiamerà *Topologia.* Listing nella sua opera *"Vorstudien zur Topologie"* dice esplicitamente

> *"Per topologia noi intendiamo lo studio degli aspetti qualitativi delle forme spaziali o delle leggi della connessione, della posizione mutua (...) astrazion fatta dei loro rapporti di misura e di grandezza."*

Egli ha una visione netta dell'autonomia di questa nuova branca della matematica e va alla ricerca di una dimostrazione puramente topologica del teorema di Eulero. Questa è raggiunta nel 1900 da H. Poincaré, che tenendo conto di tutti i contributi dei predecessori, dà piú dimostrazioni distinte del teorema per poliedri n-dimensionali (anche non convessi). Egli aggiunge che

> *"Questi teoremi sui poliedri hanno una portata assai generale, poiche' una varieta' qualsiasi puo' essere decomposta in poliedri rettilinei e curvilinei, essendo questo equivalente per l'Analysis situs."*

Poincaré (1854-1912), dando basi matematiche solide alle intuizioni di B. Riemann (1826-1866), ha fondato come disciplina autonoma la *topologia combinatoria* che dal 1940 in poi si è chiamata *topologia algebrica,* nome piú adatto ai metodi di questa scienza.

A me è sembrato non fuori luogo accennare in questa sede alla tormentata e insieme affascinante storia del teorema di Eulero e non credo sia trascurabile farlo notare agli allievi, che pensano che un teorema nasca già perfetto, nella forma compiuta. Quasi sempre infatti la matematica, specialmente nelle trattazioni piú formali, è presentata come un edificio perfetto, bello ma privo di vita.

Per far amare la matematica è opportuno, penso, presentarla anche nella sua realtà storica: emerge cosí anche l'uomo con le sue pene, le sue gioie, i suoi sogni. E' chiaro che non possiamo percorrere tutto il cammino seguito per giungere alla scoperta di un teorema o all'elaborazione di una teoria, ma accennare che questo cammino c'è stato o almeno averne la coscienza, è già un primo passo verso l'*umanizzazione della matematica.*

Appendice: La dimostrazione di Cauchy.

Premettiamo la nozione di rete su una sfera, osservando che il bordo di un poliedro convesso si può proiettare su una sfera.

Una *rete* su una sfera consiste di un numero finito di punti, detti *vertici*, e di archi di circonferenza massimi, detti *lati*, congiungenti alcuni vertici, verificanti le seguenti condizioni:

(i) ogni coppia di vertici è congiunta da al piú un lato;

(ii) due lati non hanno punti interni in comune.

Introduciamo le seguenti notazioni:

V = *numero dei vertici*

S = *numero dei lati*

F = *numero delle regioni aperte connesse*

c = *numero delle componenti connesse*

(Una *componente connessa* è una parte connessa della rete che non è congiungibile con la parte rimanente della rete.)

Allora vale la seguente *formula di Eulero per reti sferiche:*

$$(*) \qquad \boxed{V - S + F = 1 + c.}$$

Nella dimostrazione del teorema è essenziale l'ipotesi che la rete sia su una sfera e non su una superficie di genere diverso da zero. Infatti si sfrutta il

TEOREMA DI JORDAN
Ogni curva di Jordan J su una sfera divide la superficie in (esattamente) due regioni (aperte e connesse) aventi entrambe come frontiera comune J.

La dimostrazione di (*) procede per induzione sul numero dei lati. Per $S=0$ la (*) vale poiché in questo caso la rete consiste di V vertici isolati (quindi $F=1$, $c=V$). Per andare avanti abbiamo bisogno del concetto di *vertice libero*, un vertice da cui esce solo un lato.

LEMMA
Se una rete Q (con $S \neq 0$) non contiene vertici liberi, allora esiste almeno una poligonale semplice e chiusa fatta di lati di Q.

Dim.

Poiché Q contiene lati, per ipotesi esiste un vertice p_1 da cui esce un lato p_1p_2; poiché p_2 non può essere libero, esisterà un lato p_2p_3 diverso da p_1p_2. Cosí procedendo si costruisce una catena di vertici $p_1, p_2, \ldots, p_n$ in cui due consecutivi sono congiunti da un lato e tre consecutivi sono distinti. Poiché Q ha solo un numero finito di vertici, alla fine giungeremo ad un vertice p_r tale che $p_r = p_n$ con $r < n$. Consideriamo il primo vertice che soddisfi questa condizione; abbiamo allora una curva poligonale chiusa costituita da lati di Q

$$p_r,\ p_{r+1}, \ldots, p_n$$

con almeno tre lati distinti. Ciò prova il lemma.■

Possiamo ora procedere per induzione.

Supponiamo che la (*) valga per tutte le reti con $S = n$ lati e consideriamo una rete Q con $n+1$ lati. Distinguiamo due casi:

(i) Q ha un vertice libero;

(ii) Q non ha vertici liberi.

Nel caso (i) sia p un vertice libero, congiunto con un arco ad un altro vertice p'. Se p' è ancora un vertice libero, allora rimuovendo l'arco (aperto) pp' avremo una rete Q' con

$$V' = V \qquad F' = F \qquad S' = S-1 \qquad c' = c+1$$

e quindi vale la (*) poiché $S' = n$. Analogamente si conclude se p' non è libero.

Nel caso (ii) per il lemma esiste una poligonale chiusa costituita da archi. Rimuovendone un arco si ha una rete Q' con

$$V' = V \qquad S' = S-1 \qquad F' = F-1 \qquad c' = c,$$

da cui ancora la (*) per l'ipotesi induttiva.■

Osserviamo infine che se la rete Q su S^2 proviene dalla proiezione del bordo di un poliedro convesso si ha $c = 1$ e quindi la classica formula di Eulero.

BIBLIOGRAFIA

Si riportano solo testi e articoli che possono essere piú o meno direttamente utilizzati per l'insegnamento. Se ne dà anche un breve commento.

[1] M.L. CALDELLI, B. D'AMORE, *I poliedri. La formula di Eulero.* Scuola e Didattica, La Scuola, Brescia, 1985

[2] H.M. CUNDY, A.P. ROLLETT, *Modelli matematici*, (presentazione di P. Canetta), Feltrinelli, Milano 1974.

[3] G. DE CECCO, *Il teorema di Jordan*, Archimede (4),1976.

[4] P. GARIO, *L'immagine geometrica del mondo. Storia dei poliedri.*, Stampatori-didattica, Torino 1979.

[5] D. HILBERT, S. COHN-VOSSEN, *Geometria intuitiva*, Boringhieri 1960.

[6] I. LAKATOS, *Dimostrazioni e confutazioni*, Feltrinelli, 1979.

[7] G. POLYA, *La scoperta matematica*, Vol. 2, Feltrinelli, 1970.

[8] SMP SCHOOL MATHEMATICS PROJECT, *Un progetto per l'insegnamento della matematica nella Scuola Media*, Cambridge Univ. Press, 1965 (5 volumi); Traduzione a cura dell'UMI., Zanichelli, 1972.

* * * * * * *

[1] Possibile presentazione dell'argomento nella Scuola Media, con lo scopo anche di guidare gli alunni alla "scoperta" della formula di Eulero.

[2] Questo libro, nato in una classe inglese (corrispondente ai nostri ultimi anni di liceo), ha avuto origine dall'interesse spontaneo degli studenti per la costruzione di modelli con carta, cartone, fili di ferro ed altro materiale facilmente reperibile.

[3] Esposizione del teorema di Jordan per le poligonali e le poliedriche, fondamento per le definizioni di poligono e di poliedro usate in questa conferenza.

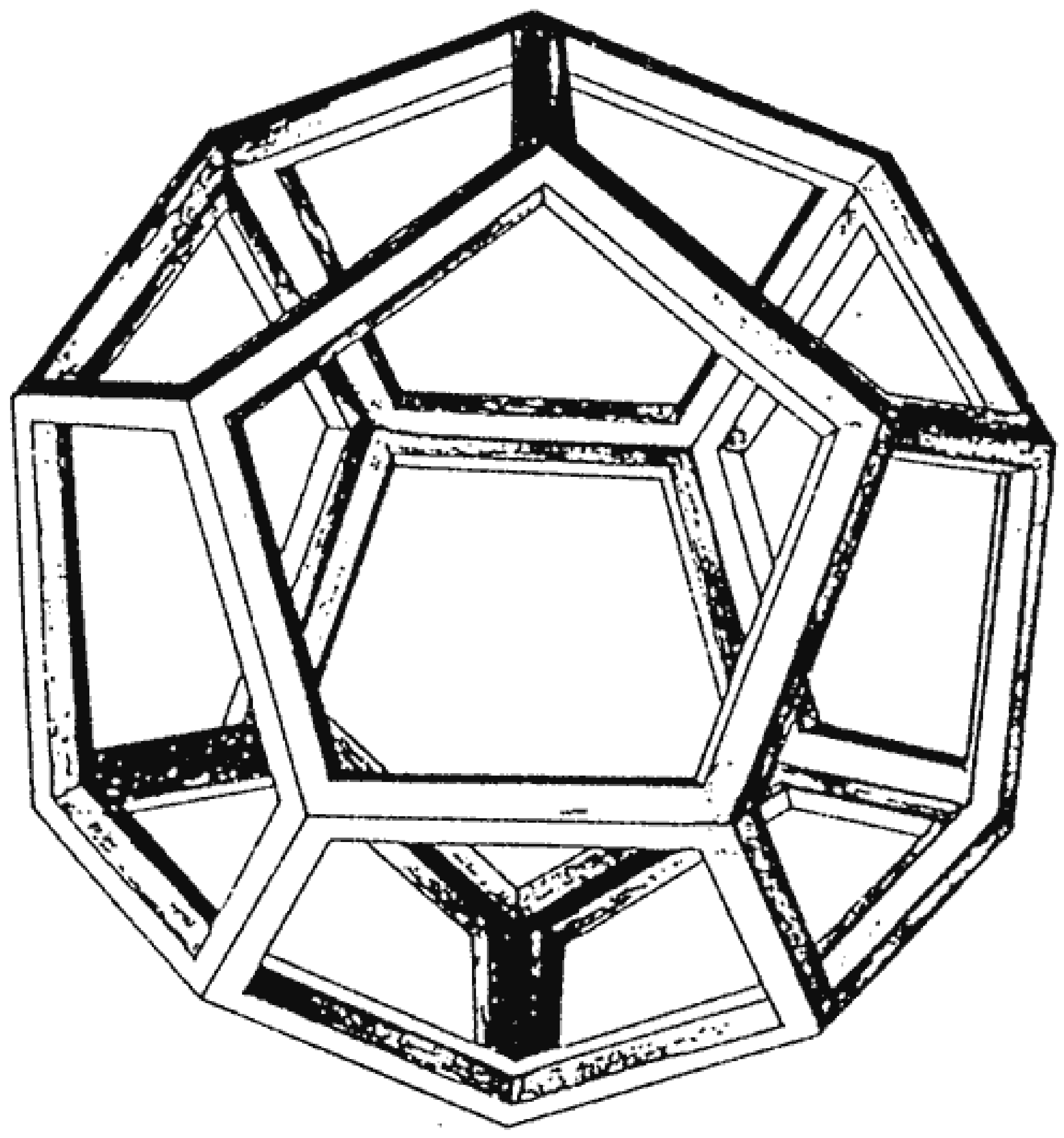
[4] Il capitolo III, di circa 100 pagine, è interamente dedicato alla formula di Eulero. Il libro affronta la storia dei poliedri anche in rapporto ad altre discipline.

[5] Libro classico e molto interessante contenente quasi tutti gli argomenti esposti in questa conferenza.

[6] Presentazione abbastanza esauriente del teorema e delle diverse definizioni di poliedro, con particolare attenzione alla "logica della scoperta matematica". La forma letteraria è simile a quella dei dialoghi di Platone.

[7] La formula di Eulero è presentata come un "problema" con osservazioni, congetture, argomentazioni induttive, che aiutino il "ragionamento plausibile" Il metodo scientifico proposto è :"Indovina e controlla".

[8] La relazione di Eulero è trattata in piú di un capitolo (nei volumi I, II e III). Si veda in particolare il cap. 8 del vol. I e il cap. 6 del vol. III. L'esposizione è ricca di esempi e di esercizi e non è trascurato il ricorso alla colla e alle forbici per costruire modelli di solidi (come parte integrante dell'insegnamento e non come evasione!).



da DE DIVINA PROPORTIONE di Luca Pacioli (Venezia, 1509)

(disegno di Leonardo da Vinci riproducente lo scheletro del dodecaedro regolare da lui intagliato in legno).

* * *

Archytas Tarantinus dicere solebat:

"Si quis in coelum ascendisset naturamque mundi et pulchritudinem siderum perspexisset, insuavis illa admiratio ei esset, quae iucundissima fuisset, si aliquem, cui narraret, habuisset

(Cicerone, *Laelius*, 23,88)