

**Una conversazione su: Fondamenti della matematica  
e "teoria base". L'esempio della teoria 7x2**

Ennio De Giorgi

Nello studio dei "fondamenti della matematica" forse può rientrare anche la proposta di ragionevoli "teorie base", ove col termine "teorie base," designerò una selezione di concetti primitivi, definizioni, assiomi, abbastanza semplici per essere compresa anche da ascoltatori non specializzati ed abbastanza ampia perchè sia possibile assumerla come base fondamentale su cui edificare le piu' complesse teorie matematiche (e forse anche altre teorie scientifiche e filosofiche).

Tra i requisiti desiderabili di una "teoria base", metterei al primo posto la semplicità, l'uso di un linguaggio vicino alle abitudini della maggior parte dei matematici contemporanei, l'eventuale recupero di qualche antica tradizione matematica e filosofica.

Altro requisito essenziale di una buona "teoria base" dovrebbe essere la facilità "d'innestare" in modo naturale, sul tronco della teoria stessa, i diversi rami della matematica. Inoltre la teoria base dovrebbe presentare il piu' alto grado di "autoreferenza"; mi e' difficile trovare una definizione generale del termine "autoreferenza", ma posso citare l'esempio della teoria 7x2 in cui, le relazioni  $Rrelb$ ,  $Rrelt, \dots Rrelq$ , sono, per così dire, le pietre di un arco di cui l'operazione  $Seprq$  è la chiave di volta.

Infine accanto a requisiti informali, la "teoria base" dovrebbe avere due requisiti facilmente formalizzabili da parte dei logici matematici: dovrebbe essere facilmente descrivibile nel linguaggio del calcolo dei predicati del primo ordine e dovrebbe possedere molti modelli finiti non banali.

Concluderò osservando che non vi è ragione per pensare che la teoria 7x2 sia ottimale rispetto a tutti questi requisiti; essa è solo

un esempio che spero, potrà incoraggiare altri matematici alla ricerca di altre "teorie base" o alla individuazione, all'interno di teorie già note, di qualche nucleo fondamentale finito che possa essere ragionevolmente assunto come "teoria base".

Lo spirito conduttore di questa teoria risiede nel rinviare il concetto di "coppia", "terna", ecc., per evitare di essere immediatamente immessi in una teoria non finita. Pertanto si useranno i concetti di relazioni binarie, ternarie e quaternarie, come verrà specificato, al fine di costruire, finchè è possibile, una teoria base FINITA con modelli FINITI.

## TEORIA 7x2

Diamo le seguenti definizioni:

1)  $Qqualq \Leftrightarrow q$  e' una qualita'.

Scriveremo  $qx$  per denotare che  $x$  gode della qualita'  $q$

2)  $Qrelbr \Leftrightarrow r$  e' una relazione binaria

3)  $Qreltp \Leftrightarrow p$  e' una relazione ternaria.

Scrivere  $\rho xyz$  equivale a dire che " $x$  e' nella relazione  $\rho$  con  $y$  e  $z$ ".

Infine:

4)  $Qrelq\tau \Leftrightarrow \tau$  e' una relazione quaternaria.

Ovviamente  $\tau xyz$  significa che  $x$  e' nella relazione  $\tau$  con  $yzt$ .

Definiamo poi le operazioni nel modo seguente:

5)  $Qops f \Leftrightarrow f$  e' una operazione semplice;

$fx=y$  indicherà che  $y$  e' il risultato dell'operazione semplice  $f$  eseguita su  $x$ .

6)  $Qopb \phi \Leftrightarrow \phi$  e' una operazione binaria.

Scriveremo  $\phi xdy=z$  per indicare che  $z$  e' il risultato dell'operazione  $\phi$  eseguita su  $x$  ed  $y$ .

**Osservazione.** Richiamandoci alle notazioni usuali adottate per la

somma ed il prodotto, molto spesso useremo la notazione  $x+y$  o  $x \cdot y$  in luogo di  $\phi xy$ .

Unitamente alle sei definizioni date si introduce l'operazione

- 7) Invr $b$ , inversione della relazione binaria; posto Invr $b$   $r = r^{-1}$  vale la condizione:

$$rxy \Leftrightarrow r^{-1}yx$$

**Osservazione.** Una delle possibili varianti di questa teoria è quella di considerare le operazioni semplici come caso particolare delle relazioni binarie e le operazioni binarie come caso particolare delle relazioni ternarie.

Introduciamo ora un secondo gruppo di oggetti fondamentali. Il primo è  $R_{qual}$ , caratterizzato dalla condizione:

- 1)  $R_{qual} qx \Leftrightarrow qx$  relazione binaria che descrive il comportamento della qualità.

- 2)  $R_{relb}$  è una relazione ternaria che può essere applicata a relazioni binarie o ad operazioni semplici nel modo seguente:

$$(Relb)rxy \Leftrightarrow rxy$$

$$(Relb)fx y \Leftrightarrow fx=y .$$

Analogamente poniamo:

- 3)  $R_{relt}$  è una relazione quaternaria tale che:

$$(Relt)\rho xyz \Leftrightarrow \rho xyz$$

$$(Relt)\phi xyz \Leftrightarrow \phi xy=z$$

Introduciamo ora l'operazione binaria  $Seprq$  (separazione di variabili nelle relazioni quaternarie) caratterizzata dalle proprietà seguenti:

- 4) se  $\tau$  è una relazione quaternaria, allora, per ogni oggetto  $x$ , è definita  $Seprq\tau x$  ed è una relazione ternaria, tale che

$$(Seprq\tau x) yzt \Leftrightarrow \tau x yzt.$$

Conviene esplicitamente osservare che una relazione quaternaria può essere descritta da una operazione binaria e da una relazione ternaria.

Introduciamo ora le nozioni di dominio, codominio ed ambiente.

5) Sia  $Qrelbr$  (cioè sia  $r$  una relazione binaria),  $Rdom$  è una relazione binaria tale che

$$Rdomxr \Leftrightarrow \text{esiste } y : rxy,$$

e traduce il fatto che "x appartiene al dominio di r".

Analogamente se  $Qopsf$  allora :

$$Rdomxf \Leftrightarrow \text{esiste } y : fx = y.$$

6) Se  $Qrelbr$  definiamo:

$$Rcodyr \Leftrightarrow \text{esiste } x : rxy.$$

Se  $Qopsf$  allora :

$$Rcodyf \Leftrightarrow \text{esiste } x : fx = y$$

L'ambiente di una qualità, relazione, operazione, è l'area in cui vanno presi gli oggetti che hanno quelle qualità o sono comunque coinvolti da quella relazione o operazione.

7) Denoteremo con  $Ramb$  la relazione binaria così definita:

a) Se  $q$  è una qualità ed  $x$  un oggetto

$$Rambxq \Leftrightarrow qx.$$

b) Se  $r$  è una relazione ed  $x$  un oggetto allora:

$$Rambxr \Leftrightarrow Rdomxr \text{ Vel } Rcodxr.$$

c) Se  $f$  è un'operazione ed  $x$  un oggetto allora

$$Rambxf \Leftrightarrow Rdomxf \text{ Vel } Rcodxf.$$

d) Se  $\rho$  è una relazione ternaria ed  $x$  un oggetto allora

$$Rambx\rho \Leftrightarrow \exists y, z \text{ tali che } \rho xyz \text{ Vel } \rho yxz \text{ Vel } \rho yzx.$$

e,f,g) Definizioni analoghe si danno per le operazioni binarie, le relazioni quaternarie e le operazioni ternarie.

Abbiamo così selezionato il "tronco"  $7 \times 2$  sul quale possono essere

innestati i vari "rami" della matematica.

Intanto, mostriamo come un primo innesto puo essere l'aritmetica.

### ARITMETICA

Le notazioni di cui ci serviremo sono le seguenti:

QNn  $\Leftrightarrow$  è la qualita di n di essere un numero naturale.

Add  $\Leftrightarrow$  addizione di due numeri.

Molt  $\Leftrightarrow$  moltiplicazione di due numeri.

Nord  $\Leftrightarrow$  ordinamento naturale di numeri naturali.

Precisamente:

$$\text{Nord}xy \Leftrightarrow x \leq y .$$

Aggiungendo gli assiomi canonici dell'aritmetica classica, questa sarà pienamente formulata.

Scriveremo:

QMPx  $\Leftrightarrow$  x è un modello di predicato <sup>(\*)</sup>1.

MPindx = y  $\Leftrightarrow$  y è l'indice di complessità del modello di predicato x.

Qualità, relazioni, operazioni introdotte nella (7x2), sono particolari modelli di predicati.

Esempi

Qqual1  $\Rightarrow$  MPind q = 1

MPind 1 = 0

MPind 0 = 0.

Se r è una relazione binaria o un'operazione semplice, allora:

MPind r = 2

1

---

(\*)La notazione introdotta sarà utile nella costruzione della teoria dei predicati, nel senso che, ad un predicato di ordine uno associerà un modello di ordine uno.

Se  $\rho$  è una relazione ternaria o un'operazione binaria, allora:

$$MPind \rho = 3.$$

Se infine,  $\tau$  è una relazione quaternaria o una operazione ternaria, allora

$$MPind \tau = 4.$$

Introduciamo [Sep], la separazione di variabili nei modelli di predicati (che comprende come caso particolare la Sepqr). Sep è un'operazione binaria che agisce nel modo seguente :

Se  $x$  è un modello di predicato ed il suo indice è  $n+1$ , allora per ogni  $y$  esiste un modello di predicato  $Sep x y$  il cui indice è  $n$ . In formule se  $MP \text{ ind } x = n+1$ , allora qualunque sia  $y$  esiste  $MP \text{ ind } (Mp \text{ Sep } xy) = n$ .

Il raccordo fra questo concetto ed il secondo gruppo di nozioni della teoria base è il seguente.

Se per semplicità, poniamo

$$x \cdot y = MP \text{ Sep } xy$$

allora valgono i seguenti assiomi < :

$$qx \Leftrightarrow q \cdot x = 1$$

$$rxy \Leftrightarrow (r \cdot x) \cdot y = 1$$

$$fx = y \Leftrightarrow (f \cdot x) \cdot y = 1$$

$$\rho xyz \Leftrightarrow (((\rho \cdot x) \cdot y) \cdot z) = 1$$

$$\phi xy = z \Leftrightarrow ((\phi \cdot x) \cdot y) \cdot z = 1$$

$$\tau xyzt \Leftrightarrow (((\tau \cdot x) \cdot y) \cdot z) \cdot t = 1.$$

Si è così effettuato l'innesto dell'aritmetica e si è ottenuto, mediante MPsep, l'unificazione dei concetti, inizialmente separati, di qualità, relazioni, operazioni.

Viene naturale chiedersi se tutti i modelli di predicato debbano necessariamente essere numeri, qualità, relazioni, operazioni.

Convienne ammettere che vi siano dei modelli di predicato che non sono né numeri né qualità ecc., ma altri enti per esempio insiemi, funzioni, mappe o altro.

Tutto sommato per un innesto facile dei vari rami della matematica, conviene riservare le parole: qualità, relazioni, operazioni a quei modelli di predicato che meglio rispondono alle nozioni intuitive di qualità, relazioni, operazioni.

Ritengo che altri innesti possibili possano essere:

1) l'innesto del calcolo dei predicati del primo ordine nella teoria base; questa operazione verosimilmente rivelerà delle difficoltà soprattutto nella parte semantica (interpretazione delle formule).

2) Attraverso una attenta rilettura dell'uso che si fa in fisica del concetto di "variabile" si dovrebbe chiarire come tale uso del termine variabile è collegato con l'uso che del termine si fa in logica.

3) La teoria degli insiemi e la relativizzazione di essa (analisi standard e non standard) possono rappresentare un altro innesto.

4) Per i probabilisti è possibile introdurre la nozione di variabile aleatoria collegandola con la nozione di variabile del punto.

Infine si può passare all'innesto di altre teorie fondamentali per esempio logiche modali,  $\lambda$ -calcolo, categorie, ecc.

E' assai probabile che tentando questi innesti si possano vedere meglio i pregi e i difetti della teoria  $7 \times 2$  e di altre "teorie base" finite.

### **Bibliografia**

- [1] E.De Giorgi-M.Forti: *Premessa a nuove teorie assiomatiche dei fondamenti della matematica*, Pisa, Quad. 45(1984), 2-31.
- [2] E.De Giorgi-M.Forti: *Una teoria-quadro per i fondamenti della matematica*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Mat. Fis. Natur. 79(1985), 55-67.
- [3] E.De Giorgi-M.Forti-V.M.Tortorelli: *Sul problema dell'autoriferimento*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Mat. Fis. Natur. 80(1986), 363-372.
- [4] M.Clavelli-E.De Giorgi-M.Forti-V.M.Tortorelli: *A self-reference oriented theory for the Foundation of Mathematics*, in *Analyse mathématique et Applications - Contributions en l'honneur de J.L. Lions*, Gauthier-Villars, Paris 1988, 67-115.