CHE COSA RESTA E CHE COSA DOVREBBE RESTARE DELLA MATEMATICA QUANDO SI E' DIMENTICATA LA MATEMATICA

FULVIA FURINGHETTI

SOMMARIO. *In questa nota si considerano alcuni aspetti dell'immagine della matematica al di fuori della comunità dei matematici. In particolare, si considerano due elementi da cui questa immagine trae origine: la divulgazione e la formazione scolastica.*

Su quest'ultimo punto si fissa l'attenzione al fine di offrire agli insegnanti spunti di riflessione sull'immagine che essi stessi hanno della disciplina che insegnano e sui meccanismi cognitivi attraverso cui questa si trasmette agli alunni.

INTRODUZIONE

In questa nota cerco di individuare qualche elemento che permetta di configurare quale sia l'*immagine della matematica* (*ciò che resta della matematica quando si è dimenticata la matematica*) al di fuori della comunità dei matematici. Per fare ciò ho preferito alla tradizionale forma dell'intervista in un conveniente campione di "gente comune", un'analisi di alcune testimonianze indirette, o meglio inconsce, offerte da aspetti della cultura dei nostri giorni che mi sembrano significativi per lo scopo che mi sono proposta.

Non mi soffermo su che cosa si intenda con il termine "immagine", che uso nella accezione che ad esso si dà attualmente con frequenza (talvolta persino fastidiosa) nel linguaggio colloquiale. Mi pare opportuno, al fine di non creare aspettative che non saranno soddisfatte, far osservare esplicitamente che non tratterò il tema della pervasività della matematica - "la nostra cultura invisibile" di Hammond (1978) - nei vari aspetti del mondo reale, tema che pure reputo centrale nella pratica dell'insegnamento e nella formazione degli insegnanti.

L'immagine della matematica tra la "gente comune" concerne soprattutto l'età adulta ed è molto difficile da modificare poiché ha remota origine nell'apprendimento scolastico. I meccanismi che intervengono nel processo della sua formazione sono tuttora oggetto di studio e di riflessione da parte dei ricercatori in educazione matematica. Il mio contributo alla discussione su questo punto deriva da studi condotti soprattutto da scienziati del nord America e di Israele e da mie ulteriori riflessioni che mi hanno portato ad elaborare una teoria della "credenze preesistenti". Le "credenze preesistenti" sono per me quelle idee che ho riscontrato preesistere nella mente degli studenti al momento in cui si insegnano determinati argomenti.

Queste riflessioni possono essere uno spunto iniziale (non certo una ricetta!) per cominciare una discussione, ben lungi dall'essere conclusa, su quello che *dovrebbe restare della matematica quando si è dimenticata la matematica.*

QUALCHE OSSERVAZIONE PRELIMINARE SULL'IMMAGINE DELLA MATEMATICA TRA I MATEMATICI

Periodicamente i matematici discutono la natura della matematica e la mentalità che caratterizza la ricerca in questo campo. Mi pare si possa dire che ciò è accaduto in particolare proprio nell'era moderna, dopo che essa si è assestata come disciplina a sé stante, nettamente separata da fisica, filosofia ecc. e che, d'altra parte, la crisi dei fondamenti della fine dell'Ottocento ed il rinnovato interesse per la filosofia della matematica abbiano stimolato questo tipo di discussione.

Un'eco di questa ricerca "esistenziale" dei matematici si coglie frequentemente negli articoli della rivista *The Mathematical Intelligencer*. Si vedano, per esempio, su questo tema Borel (1983) e Dehn (1983) che, seppur datati in alcuni passi, offrono buoni spunti di riflessione. Nel primo è adombrato, tra gli altri, uno dei temi centrali della discussione, cioè la dualità tra matematica come disciplina a sé stante con una sua interna valenza e bellezza - la «aesthetics of mathematical thought» di Dreyfus e Eisenberg (1984) - e la matematica come strumento per le applicazioni in altri ambiti disciplinari.

L'analisi storica dello sviluppo delle teorie matematiche sembra provare che in passato questa dualità fu accettata serenamente come parte della natura della matematica e dei suoi rapporti con le altre scienze - la matematica «regina e ancella delle scienze» di Bell (1951) -, mentre attualmente ci pare che essa sia vissuta da alcuni in maniera un po' schizofrenica nel senso che l'accettare uno di questi due aspetti - l'applicativo o il teorico - sembra escludere tassativamente l'altro, quando non addirittura portare a disprezzarlo. Questa dualità si ritrova nella discussione sui problemi educazionali connessi all'insegnamento della matematica e su di essa, esasperata e banalizzata (l'arido far di conto contro il ragionamento rigoroso, ma fine a sé stesso come un gioco) è, come vedremo, spesso costruita l'immagine della matematica al di fuori della comunità dei matematici.

Indubbiamente posizioni filosofiche quali il neoidealismo (su cui si sono formate molte generazioni di insegnanti di matematica), attribuendo alla scienza valore solo pratico e non conoscitivo, hanno propiziato la schizofrenia indotta da questa dualità. A ciò si aggiunga che lo sviluppo di teorie di filosofia della matematica, quali il neoempirismo e fallibilismo, ha messo ulteriormente in crisi l'immagine della matematica dal punto di vista della perdita della certezza. Si veda per approfondimenti su questo punto Hanna (1983) e Borga (1990). I ricercatori in educazione matematica stanno diventando sensibili ai legami di questi problemi di filosofia della matematica con i problemi dell'insegnamento/apprendimento della matematica e cercano di studiare le relazioni tra le diverse concezioni della matematica e i problemi educazionali. Si veda per approfondimenti su questo punto Hanna (1983) e Lerman (1989).

L'immagine della matematica tra i matematici è dunque tormentata e controversa, quindi non sorprende che sia motivo di dubbi tra gli insegnanti il decidere quale immagine trasmettere agli allievi.

Legata alla discussione sulla natura della matematica è la discussione sulla figura del matematico e su che cosa sia la creatività - e di conseguenza la ricerca - in matematica. Alcune classiche opere, per esempio Hadamard (1945) e Newman (1956), illustrano questo tema. Inoltre scritti come quelli di Halmos (1968), (1981), (1985) e quello di Hardy (1989) costituiscono un buon materiale di studio.

Direi invero che, in generale, la piú suggestiva ed esaustiva fonte su questo tema siano proprio le biografie stesse dei grandi matematici. Come ho già avuto modo di sottolineare in Furinghetti (1988) esse offrono eccezionali suggerimenti non solo sulla natura delle varie branche della matematica e sulle varie scoperte, ma su che cosa significa essere un matematico o, piú in generale, uno scienziato impegnato nella ricerca. Nella mia esperienza di ricercatore in educazione matematica ho sperimentato che, per quanto concerne gli studenti, la biografia (una buona biografia) getta piú luce sulla natura misteriosa (per gli studenti) della disciplina che non spiegazioni mirate sul tema. Per portare fin d'ora il discorso su un punto che mi sta a cuore (come si vedrà in seguito) osservo che, ovviamente, in una società multimediale come la nostra, la trasmissione della biografia e piú in generale di ogni conoscenza, può avvenire anche con mezzi diversi dai libri. Per esempio, recentemente ho visto a Leicester (U.K.), durante i lavori dell'interessante convegno HIMED 90, organizzato dalla British Society for the History of Mathematics, il film svedese sulla vita della matematica russa Sofya Kovalevskaya, intitolato *The hill on the dark side of the moon* (1983), efficacemente presentato dal famoso storico della matematica Ivor Grattan-Guinness. Una buona sceneggiatura, accettabilmente fedele alla realtà storica ed una buona regia hanno dato efficaci spunti per capire qualcosa sulla creatività matematica e sulla figura del matematico professionista. Del resto l'idea del cinema come mezzo per raccontare biografie non è nuova. In passato la televisione italiana ha trasmesso le biografie di Descartes e di Pascal curate da Roberto Rossellini.

MATEMATICA E MATEMATICI PER I NON MATEMATICI: IMMAGINE E STEREOTIPI

La matematica è una disciplina che gode di una singolare proprietà: essa è amata, odiata, capita, non capita, ma nella mente di tutti esiste una certa immagine di essa. Ciò dipende dal fatto che essa si configura come uno degli assi portanti della formazione scolastica di un individuo e costituisce il principale elemento unificante nell'educazione nelle diverse culture, poichè ha una sua intrinsecità dovuta al fatto che a differenza delle altre materie scolastiche quali letteratura, storia ecc. essa è abbastanza indipendente dal contesto culturale e da fattori territoriali. In particolare la lingua (non il linguaggio) incide sulla sua trasmissione meno che per altre discipline.

A proposito della matematica nelle varie culture, segnalo che in Bishop, Damerow, Gerdes e Keitel (1988) ci sono una panoramica dei recenti sviluppi del filone della ricerca in educazione matematica detto *etnomatematica* e cenni su studi di storia della matematica che stanno sviluppandosi da alcuni anni intorno alle culture non europee (su queste ultime si possono avere ulteriori notizie nelle riviste di storia della matematica).

Questa intrinsecità, da una parte conferma le mie affermazioni sul fatto che la matematica è uno degli assi portanti nella formazione dell'individuo, dall'altra fa riflettere su quanto l'apprendimento (virtuale o effettivo) della matematica sia un'esperienza scolastica che segna la persona dal punto di vista culturale.

Questa immagine della matematica (e la conseguente immagine della figura del matematico che risulta da essa condizionata) presente, secondo me, in ogni individuo con un minimo di scolarizzazione, è soggetta a stereotipi (termine che qui usiamo con connotazione non necessariamente negativa) che cerco di analizzare brevemente nel seguito.

Mi sembra utile a tale proposito citare alcuni passi letterari che ci possono ricondurre ad alcuni di questi stereotipi.

Comincio dal poeta inglese Samuel Taylor Coleridge (1772-1834), che, ragazzo diciasettenne al Christ's Hospital, scrive al fratello (cito nella mia traduzione, poiché non ho trovato una traduzione italiana ufficiale):

«Sono stato spesso sorpreso che la Matematica, la quintessenza del Vero, abbia trovato cosí pochi e tiepidi ammiratori. Un'assidua riflessione ed un'analisi minuziosa hanno alla fine rivelato la causa; mentre la Ragione è lussureggiante nel suo proprio Paradiso, l'Immaginazione viaggia stancamente in un arido deserto. Assistere la Ragione con lo stimolo dell'Immaginazione è il progetto della seguente opera [l'opera a cui allude è un problema di Euclide espresso in versi].».

In questo passo Coleridge dà una veste poetica (come, invero, è ovvio attendersi da un poeta) ad uno stereotipo dell'immagine della matematica al di fuori della comunità dei matematici: la matematica è per definizione la verità, ma, purtroppo, è una disciplina arida, fondata su un ragionamento privo di fantasia.

Chi si è cimentato nella ricerca matematica può valutare la scarsa rispondenza di questa immagine alla reale natura della disciplina.

Addirittura, è opinione di molti che se si considerassero in una gara sulla quantità di fantasia impiegata tutte le attività che implicano creatività, quindi non solo le scienze, ma anche le arti e la tecnologia, si dovrebbe concludere che musica e matematica sono in testa, poiché i risultati che si ottengono in queste attività creative sono un intrinseco prodotto dello spirito, nel senso che essi non sono una scoperta di qualcosa già presente in natura (vedere la fisica) o qualcosa che parte, con tutta la trasfigurazione intermedia dovuta all'artista, dalla natura (vedere le arti figurative) o che ha un obiettivo pilotato dalla funzionalità (vedere la tecnologia e l'architettura).

Piú positiva è l'opinione riportata dallo scrittore italiano Umberto Eco, il quale scrive ne *Il nome della rosa*, Bompiani, Milano, 1980, pagine 218-219:

«"Solo nelle scienze matematiche, come dice Averroè, si identificano le cose note per noi e quelle note in modo assoluto." [...] "Le conoscenze matematiche sono proposizioni costruite dal nostro intelletto in modo da funzionare sempre come vere, o perché sono innate o perché la matematica è stata inventata prime delle altre scienze. E la biblioteca matematica [quella in cui è ambientata la vicenda] è stata costruita da una mente umana che pensava in modo matematico, perché senza matematica non fai labirinti."».

Lo stereotipo a cui ci si può qui ricondurre è quello della matematica come attività di ragionamento perfetto e quindi per traslato come sinonimo di verità e certezza. Tale stereotipo si ritrova in molti modi dire ed espressioni del linguaggio comune («la matematica non è un'opinione»). In questo brano risulta sottolineata l'importanza della modellizzazione del problema da risolvere come mezzo efficiente per arrivare alla soluzione.

L'idea della modellizzazione, anzi della matematica come una della chiavi di lettura della realtà fisica è molto ben espressa nel seguente brano dello scrittore tedesco Heinrich Böll (1917-1985), il quale scrive in *Foto di gruppo con signora*, traduzione di Italo Alighiero Chiusano, Einaudi, Torino, 1972, pagina 26:

«Molto sfortunata fu Leni invece con due materie strettamente apparentate: la religione e l'aritmetica (piú tardi la matematica). Se anche a uno solo dei suoi maestri o delle sue maestre fosse venuta l'idea di far capire già alla piccola Leni, quando aveva sei anni, che il cielo stellato, ch'essa amava tanto, offre delle possibilità di avvicinamento fisico e matematico, essa non avrebbe opposto resistenza né all'abbaco, né alla tavola pitagorica, di cui aveva lo stesso orrore che altre persone hanno per i ragni.».

Questo brano in maniera semanticamente piú corretta di quanto abbia fatto il giovane Coleridge introduce un sapore poetico nel discorso matematico e mi piace perché in maniera concisa, ma pregnante, illustra certe potenzialità educative e un corretto approccio didattico per quanto concerne l'apprendimento della matematica.

Non è questo l'unico autore che dimostra un'inconscia sensibilità verso problemi di apprendimento della matematica. Il poeta italiano Giacomo Leopardi (1798-1837) scrive nello *Zibaldone* alcune pagine sulla matematica, in particolare una dissertazione su numeri ordinali e cardinali che vale la pena di leggere (come tutto Leopardi). In essa il poeta ipotizza l'opportunità di un'introduzione dei primi che preceda i secondi, sulla base di ipotesi sul loro uso da parte degli uomini primitivi. Si deve considerare a proposito di questo brano che esso è stato scritto molti decenni prima della discussione sui numeri e i fondamenti dell'aritmetica nell'ambito logico-matematico.

Naturalmente, a proposito del buon approccio didattico alla matematica offerto da letterati non si può non pensare alle opere di Lewis Carroll, che non solo sono pervase di matematica, ma anche sono ricche di spunti didattici (specialmente per l'introduzione della logica) come ho già osservato in Furinghetti (1988). Un libro recentemente uscito, forse non ancora tradotto in italiano al momento in cui scrivo, sviluppa questi spunti in maniera adattabile a vari livelli scolari. D'altra parte il pastore Carroll (Charles Lutwidge Dodgson, 1832-1898) era un educatore e insegnante di matematica e quindi questo lato della sua produzione letteraria non sorprende certo.

Nella letteratura il tema dell'esperienza scolastica che condiziona l'immagine della matematica è espresso in maniera molto efficace anche da altri autori, oltre il già citato Böll.

L'austriaco Robert Musil (1880-1942) nel celebre romanzo *L'uomo senza qualità* dedica alcune pagine alla discussione sulla natura della matematica e alla sua immagine nella società, con una certa cognizione di causa data la sua formazione di ingegnere (un altro ingegnere grande scrittore come Carlo Emilio Gadda).

Riporto il seguente brano nella traduzione di Anita Rho dall'edizione di Einaudi, Torino, 1957, pagine 44-45 del volume 1. «Non occorre davvero dilungarsi troppo sull'argomento, giacché quasi tutti gli uomini oggi si rendono ben conto che la matematica è entrata come un demone in tutte le applicazioni della vita. Forse non tutti credono alla storia del diavolo a cui si può vendere l'anima, ma quelli che di anima devono intendersene, perché in qualità di preti, storici e artisti ne traggono lauti guadagni, attestano che essa è stata rovinata dalla matematica, e che la matematica è l'origine di un perfido raziocinio che fa, sí, dell'uomo il padrone del mondo, ma lo schiavo della macchina. L'intima sterilità, il mostruoso miscuglio di rigore nelle minuzie e di indifferenza per l'insieme, la desolata solitudine dell'uomo in un groviglio di particolari, la sua inquietudine, la malvagità, la spaventosa aridità di cuore, la sete di denaro, la freddezza e la violenza, che contraddistinguono il nostro tempo, sarebbero secondo questi giudizi unicamente e semplicemente conseguenze del danno che un ragionare logico e rigoroso arreca all'anima! E cosí anche allora, quando Ulrich divenne matematico, v'erano persone che predicevano il crollo della cultura europea perché l'uomo non albergava piú in cuore né fede né amore, né innocenza né bontà; ed è significativo notare che tutti costoro da ragazzi e scolari erano cattivi matematici. Con ciò essi ritennero piú tardi per dimostrato che la matematica, madre delle scienze esatte, nonna della tecnica, fosse anche la matrice di quello spirito che ha poi prodotto i gas asfissianti e gli aeroplani da bombardamento.».

L'immagine che emerge anche da altri passi della stessa opera è molto complessa e tormentata: essa si può riferire allo stereotipo della matematica come scienza arida, con l'aggiunta di un fondo di acredine nei confronti della disciplina il quale, a mio parere, non è cosí diffuso in questa forma esasperata (se non fra gli ingegneri che hanno molto sofferto la parte propedeutica di matematica loro somministrata nel biennio).

Ancora da Musil è quest'altra citazione, un po' piú serena, da *Il giovane Törless* che mi è stata riferita testualmente, ma su cui non ho altre informazioni: «La matematica è tutto un mondo a sé e bisogna esserci vissuti dentro un bel po' per sentire tutto quello che, in essa, è necessario».

Il seguente brano di Stendhal (Marie-Henry Beyle, 1783-1842) fissa in maniera molto pregnante l'attenzione sull'educazione matematica e sull'esperienza scolastica come fondamentale nella formazione dell'individuo:

«...Amavo tanto più la matematica quanto più disprezzavo i miei insegnanti, i signori Dupuy e Chabert. Malgrado la grandiloquenza e cortesia, la soave e solenne aria che il signor Dupuy assumeva quando parlava a qualcuno, avevo abbastanza acume da intuire che egli era infinitamente più ignorante del signor Chabert. Il signor Chabert, che nella gerarchia sociale della borghesia di Grenoble stava così sotto il signor Dupuy, qualche volta nelle mattine di domenica o giovedì prendeva un volume di Eulero o ... e risolutamente affrontava le difficoltà.

Egli aveva ciò nonostante sempre l'aria d'un farmacista che sa la buona ricetta, ma niente mostrava come queste *ricette* nascano le une dalle altre, nessuna *logica*, nessuna filosofia in quella testa; per non so quale meccanismo d'educazione di vanità, forse per religione il buon M. Chabert dimenticava persino il nome di queste cose.

Il mio entusiasmo per la matematica può aver avuto come sua base principale la mia ripugnanza per l'ipocrisia [...].

Dal mio punto di vista, l'ipocrisia era impossibile in matematica e, nella mia semplicità giovanile, pensavo che doveva essere così in tutte le scienze a cui, come mi era stato detto, era applicata. Che stupore per me scoprire che nessuno poteva spiegarmi come accadeva che: meno moltiplicato meno fa più (- x - = +)! (Questa è una delle tesi fondamentali per la scienza nota come *algebra*).

Non solo nessuno mi spiegava questa difficoltà (ed è sicuramente spiegabile perchè conduce a verità), ma, ciò che era peggio, essi la spiegavano su ragioni che erano evidentemente lontane dall'esser chiare a loro stessi.

Il signor Chabert, quando lo incalzavo, diventava confuso, ripetendo la sua *lezione*, proprio quella lezione contro la quale avevo sollevato le mie obiezioni, ed infine sembrava dirmi "Ma è l'usanza; ognuno accetta questa spiegazione. Eulero e Lagrange, che presumibilmente erano bravi quanto voi, l'hanno accettata!"».

Mi pare che tutti gli stereotipi sugli insegnanti di matematica e la loro (presunta) freddezza, sulla matematica come *non sense* intellettuale (si pensi a questo proposito anche alla commedia *La lezione* di Jonesco) siano qui ben adombrati e spiegati. Forse il brano, cosí come le altre pagine sull'esperienza scolastica del protagonista del romanzo, andrebbe proposto ai futuri insegnanti per farli riflettere sulle aspettative culturali degli alunni e su come il deludere tali aspettative segni intellettualmente l'individuo, specialmente se esso è sensibile.

Mi piace confrontare questa immagine che emerge dalla letteratura con una immagine che emerge da un'altra forma d'arte che, come ho già accennato sopra, io considero molto efficace e attuale e che amo molto, cioè il cinema. Mi sembra che piú spesso di quanto si faccia esso andrebbe considerato non solo come momento ludico, ma come espressione di cultura e come veicolo di informazioni sulla società. Per esempio, nel caso specifico dell'indagine sull'immagine della matematica tra la cosiddetta "gente comune", esso offre molti inaspettati spunti.

Può sorprendere, considerando le prime risultanze sull'immagine della matematica emerse precedentemente che qualcosa concernente tale disciplina sia presente, si badi bene non come oggetto di narrazione, come nel caso descritto in Emmer (1983), ma come espediente narrativo, in una forma di comunicazione in generale ritenuta piú di intrattenimento. In realtà ciò è giustificato da fatti oggettivi concreti. In primo luogo, come si è precedentemente osservato, una certa immagine della matematica è presente in ognuno di noi ed è spiegabile che piú o meno inconsciamente affiori in determinate circostanze. Inoltre la caratteristica della matematica di essere elemento unificante delle varie culture, cosí come il fatto che iconograficamente essa permetta rapidi e chiari cenni narrativi, gioca un ruolo fondamentale in una forma di comunicazione, quale è il cinema, che deve avvalersi di espedienti di trasmissione diversi dalla scrittura del romanzo e della narrazione orale.

Va inoltre aggiunto a quanto precedentemente detto che c'è un rilevante interesse del cinema per il mondo della scuola. Un regista che citerò fra poco, Weir, ha diretto recentemente un bel film sul mondo della scuola (*L'attimo fuggente, Dead poets society*, 1989). Il regista Ramon Menendez ha tratto da un romanzo di successo il film *Alzati e fatti valere* (*Stand and deliver*, 1988) sulla vicenda realmente accaduta dell'insegnante di matematica Jame Escalante che per mezzo della matematica recupera socialmente alcuni giovani della parte piú modesta della periferia di Los Angeles, mettendoli in grado di essere ammessi in alcune prestigiose università americane (si veda sulla vicenda l'articolo di Furio Colombo su *La Stampa* (1/7/1988, 122, n. 138). Il film ha suscitato interesse nel mondo della scuola (a questo proposito si vedano, per esempio, le "Notices" su *Mathematics Teaching*, n. 129 (1989), 44).

Le citazioni che potrei fare sono veramente molte e prese da varie tipologie di film. Comincio anche qui con la poesia. Ne *Il Mago di Oz* (*The Wizard of Oz*, Victor Fleming, 1939) c'è una scena in cui l'uomo di paglia, uno dei tre amici della bambina protagonista del racconto, ricevuto dal mago il cervello, per provarne l'efficenza enuncia una specie di teorema di Pitagora (forse senza troppe preoccupazioni di correttezza da parte dello sceneggiatore). Questo è un caso di citazione della matematica come sinonimo del corretto ragionare.

In due film del tutto diversi, accomunati da una citazione della matematica molto simile, troviamo invece lo stereotipo della matematica come estraneità e astrazione dalla vita e, per traslato, come purezza. Nella scena de *Il dottor Zivago* (*Doctor Zivago*, David Lean, 1965) in cui la protagonista, una studentessa adolescente e ignara, sta per essere sedotta, il regista per dare un'idea della lontananza di Lara da ciò che sta per accaderle, inquadra in dettaglio con la macchina da presa il libro che ella sta studiando: è un libro di geometria euclidea. Lo stesso espediente narrativo è usato in *Picnic ad Hanging Rock* (*Picnic at Hanging Rock* , Peter Weir, 1980) quando il regista vuole dare un'idea di come gli insegnanti e gli allievi siano lontani da quanto sta loro per accadere. A questo proposito aggiungerò che in entrambi questi casi la geometria interviene come paradigma di perfezione e astrazione, stereotipo presente in molte situazioni (si pensi alla frase di Dante ne *Il convivio* «La geometria è senza macula d'errore e certissima per sé»).

Il ruolo positivo della matematica, sinonimo di vero, integrità e giustizia, emerge ripetutamente nel film *Il sipario strappato* (*The torn curtain*, Alfred Hitchcock, regista con un passato di studi in ingegneria, 1966). Per esempio è significativo che π sia scelto come simbolo del gruppo di personaggi "buoni" che aiutano il protagonista della vicenda. Nel corso del film c'è un tentativo di spiegazione (grosso modo) del significato di questo simbolo.

Associata all'immagine della matematica che abbiamo rilevato precedentemente, la figura del matematico è quella di un uomo mite (finché non si ribella alle angherie e ingiustizie), distratto, timido, ingenuo e sostanzialmente aggirabile, ma anche dotato di precise (talvolta rigide) idee etiche e morali. Queste caratteristiche compaiono nel personaggio del professore universitario protagonista di *Cane di paglia* (*Dog of straw*, Sam

Peckinpah, 1971) e nell'insegnante di matematica di scuola secondaria in *Bianca* (Nanni Moretti, 1985).

Un altro luogo comune relativo ai matematici (femminilità e matematica incompatibili) si trova nel film *Un tram che si chiama Desiderio* (*A streetcar named Desire*, Elia Kazan, 1951) tratto da un lavoro teatrale di Tennessee Williams (1914-1989). La protagonista Blanche per darsi una rispettabilità mente sul suo passato e dice al suo corteggiatore di essere un'insegnante, ma quando le si chiede se insegna matematica, nega sdegnata come se si trattasse di un attentato alla sua femminilità.

Dei tanti cenni narrativi che fanno pensare ad un cattivo rapporto scolastico con la matematica ricordo un Woody Allen insolitamente banale, che in *Radio days* (1987), per far capire che un suo compagno di scuola è antipatico, gli fa snocciolare formule matematiche durante un incontro casuale al Luna Park.

LA DIVULGAZIONE MATEMATICA: TENTATIVI E LIMITI

Mi pare si possa dire che le varie immagini della matematica che si ritrovano negli adulti hanno origine prevalentemente nelle esperienze scolastiche. L'atteggiamento nei confronti della matematica da parte degli adulti con infelici esperienze scolastiche alle spalle è di due tipi: i pochi che sono stati in grado di meditare autonomamente sulla sua reale natura rimpiangono il cattivo approccio loro impartito, gli altri maturano una repulsione e un rifiuto per essa. Pare certo che sia molto difficile a livello adulto intervenire a modificare questa immagine, se non ricorrendo a un programma mirato a costruirla ex novo, come quello descritto in Burton (1987). La matematica è non solo nozioni e concetti, ma anche e soprattutto metodo, educazione e addestramento. Parafrasando la celebre frase attribuita a Euclide (non esistono vie regie alla geometria) si può dire: non esistono vie regie alla matematica.

Per quanto concerne la modifica dell'immagine, molti ripongono speranze nella divulgazione. Su questo punto si accentra l'interesse anche degli educatori matematici, per esempio nel 1989 l'annuale convegno I.C.M.I. (commissione internazionale per l'istruzione matematica) svoltosi a Leeds (U.K) è stato dedicato al tema della divulgazione matematica. La discussione preparatoria ai lavori, apparsa in Howson, Kahane e Pollak (1988), è un interessante punto di riferimento.

D'altra parte è ben noto che la divulgazione scientifica presenta oggettive difficoltà e che, in particolar modo, è difficoltoso divulgare la matematica. Il dibattito su questo punto è abbastanza vivace, come provano le periodiche considerazioni che appaiono come accompagnamento delle recensioni dei libri di divulgazione scientifica sugli inserti culturali dei giornali (specialmente *Tutto libri* de *La Stampa* e *Mercurio* de *La Repubblica*). Recentemente Giorgio Israel e Enrico Bellone recensendo su *Mercurio* libri di divulgazione matematica e fisica, hanno avuto modo di scrivere su questo tema; un intero numero de *Il Manifesto* (1/12/1988, 18, n. 281) è stato dedicato alla divulgazione. In esso Gianfranco Bangone ne analizza alcuni aspetti e Tullio Regge, scienziato attivo anche nel campo della divulgazione, in un'intervista mette in evidenza alcune difficoltà del divulgare anche per scienziati illustri (per esempio quella di divulgare senza, nello stesso tempo, essere criticato dai colleghi per l'inevitabile approssimazione dell'esposizione).

A queste difficoltà di carattere generale se ne aggiungono alcune piú locali, inerenti il mondo culturale italiano. Prima di tutto bisogna osservare che i grandi matematici italiani del nostro secolo, mentre hanno dimostrato un buon interesse per i problemi della didattica della matematica (un nome per tutti, Enriques), hanno dimostrato uno scarso interesse per la divulgazione, in questo differenziandosi dai loro colleghi fisici, biologi ecc. che sono sempre stati piú attenti all'immagine.

Infine in Italia il problema delle due culture, la fortuna del neoidealismo di cui si è detto precedentemente, la propensione degli intellettuali italiani e dei politici hanno avuto le conseguenze ben note non solo nella scuola, ma anche in altri aspetti della vita. Per esempio, per quello che qui ci concerne, fino a non molti anni fa' in Italia c'era una tradizione modesta nella pubblicazione di libri e riviste di divulgazione scientifica.

Ora la situazione sta cambiando e in primo luogo si sta modificando l'atteggiamento degli editori che possono condizionare notevolmente gli orientamenti culturali: si pubblica un discreto numero di opere nel campo della divulgazione scientifica (persino matematica!), pur restando sempre lontani dalla situazione anglosassone, a proposito della quale si può osservare che quasi tutte le pubblicazioni italiane di divulgazione scientifica (e ancora in particolare matematica) sono traduzioni dall'inglese. Ritengo che in questo cambiamento, per quello che riguarda la matematica, intervenga (ancora una volta!) la diffusione dei personal computer, la quale ha contribuito a convogliare, anche se spesso (purtroppo) forse solo superficialmente, l'interesse della gente su situazioni vicine alla matematica.

Mi pare comunque che sussistano sempre le perplessità di fondo prima accennate e riprese ancora recentemente da Emmer (1990), per cui penso che l'analisi sul problema della divulgazione scientifica, a suo tempo opportunamente promossa dal C.O.A.S.S.I., darebbe ora risultati numerici e conclusioni un po' diversi da quelli esposti in Bianca, Rigutti e Santaniello (1986), fermo restando che la matematica continuerebbe ad occupare uno degli ultimi posti nella classifica concernente il numero di pubblicazioni di divulgazione.

Un elemento che invece considero di grande interesse dal punto di vista didattico e del miglioramento dell'immagine della matematica è quello delle mostre e dei musei sulla matematica.

Su questo tema non avrei saputo a priori fare previsioni, avrei anzi espresso un certo scetticismo; ora le esperienze che ho fatto mi stanno convincendo che le varie forme di iconografia riferite alla matematica, se ben gestite, possono risultare efficaci per l'educazione e per la divulgazione matematica. Si veda su questo tema Brown e Porter (1990).

Ho visto sezioni di musei dedicate alla matematica molto belle (quello di Los Angeles contiguo a un McDonald's), confuse e mal gestite (La Villette a Parigi: si veda per notizie sul suo allestimento Strichartz (1983)), ma sempre interessanti e stimolanti. Lo stesso discorso vale per le mostre. Le ultime due che ho visitato, *L'occhio di Horus. Inerari nell'immaginario matematico* a Bologna e *Les Mathématiques en Méditerranée* a Marsiglia hanno avuto un grosso successo di pubblico e costituiscono senz'altro un gradevole approccio alla matematica.

ALCUNI ESEMPI DI TENTATIVI DI MIGLIORAMENTO DELL'IMMAGINE DELLA MATEMATICA ATTRAVERSO INIZIATIVE ALTERNATIVE ALL'INSEGNAMENTO TRADIZIONALE

L'immagine della matematica si forma a scuola ed è dunque a scuola che bisogna agire se si vuole modificare questa immagine in maniera piú aderente alla realtà e, alla lunga, piú fruttuosa per l'educazione dell'individuo.

Le azioni che si possono attuare sono di due tipi (che non si escludono a vicenda, ma possono essere complementari): la prima consiste ovviamente in un insegnamento consapevole dei problemi educazionali che si stanno affrontando, la seconda consiste in *interventi alternativi* all'insegnamento di routine effettuati dall'insegnante stesso o dall'esterno.

Chiaramente, da ricercatore in educazione matematica, vedo con maggior favore il primo tipo di azione, ma mi sembra qui opportuno discutere anche il secondo, poiché avendo esaminato esperienze mie o di altri ricercatori ho tratto la conclusione che esso ha delle potenzialità (ma anche dei pericoli), soprattutto se attuato in situazioni particolari, per esempio nei due casi opposti di studenti dotati o studenti demotivati.

L'obiettivo di questi *interventi alternativi* è, in prima istanza, come dicono Zeeman e Stewart (1985), quello di incoraggiare gli studenti nell'arte e nella pratica della matematica. Esso può essere perseguito:

- scegliendo argomenti caratterizzanti importanti branche della matematica e sottolineando gli elementi di sorpresa ed eleganza
- dando agli studenti l'opportunità di risolvere e calcolare.

Questo è ciò che hanno fatto i due studiosi citati in un'esperienza condotta con studenti particolarmente interessati alla matematica della fascia d'età 12-13 anni. Questa esperienza consiste in una serie di lezioni supplementari da loro tenute fuori dell'orario scolastico su:

Geometria e prospettiva
Algoritmi euclidei e frazioni continue
Geometria piana e geometria solida
Equazioni diofantee
Probabilità
Ingranaggi
Giroscopi
Nodi
Teoria delle catastrofi.

I lavori sono organizzati in modo che ci sia un continuo coinvolgimento attivo degli studenti e quindi un controllo (anche se senza valutazione) dell'apprendimento.

Chi conosca l'interesse umano, la versalità e la disponibilità di Christopher Zeeman, il creatore con René Thom della "teoria delle catastrofi", non si stupisce che uno scienziato di tale fama si sia impegnato in questa attività per lui insolita. E del resto non è egli il solo matematico di valore che si impegna su questo piano. Anche Serge Lang ha fatto una esperienza analoga, discussa in Adda (1987) e Lang (1986), consistente in seminari rivolti a studenti pre-universitari, quindi piú orietata alla ricerca avanzata.

Nell'ottica di queste attività si colloca anche un'esperienza condotta su iniziativa del Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova proprio con lo scopo di migliorare l'immagine "esterna" della matematica. Un gruppo di docenti del Dipartimento (tra cui me stessa per le geometrie non euclidee) ha preparato una serie di conferenze con questi titoli (altri titoli sono stati proposti nelle successive tornate dell'attività):

Topologia, grafi, informatica
I numeri naturali e il paradosso di Russell
Logica e fondamenti della matematica
Problemi aperti in teoria dei numeri
Dalla geometria classica alle geometrie non euclidee
Classificazioni delle superficie
Relatività speciale: evidenze sperimentali e fondamenti
Spazi vettoriali di dimensione infinita e applicazioni
Topologia delle curve e delle superficie
Applicazioni della statistica.

Un pacchetto predisposto dal Dipartimento, costituito da tre seminari scelti tra i precedenti è stato offerto nelle scuole secondarie superiori della provincia di Genova che hanno aderito all'iniziativa. Purtroppo l'esperienza è stata progettata in modo che la partecipazione attiva degli insegnanti delle scuole è risultata limitata (di ciò si sono giustamente rammaricati alcuni insegnanti): essa si è ridotta solo all'adesione all'iniziativa e eventualmente a orientare gli studenti sull'opportunità di partecipare, a seconda delle loro basi matematiche. Questo fatto ha influito sulla ricaduta dell'iniziativa tra gli studenti coinvolti. Infatti le esperienze fatte senza la partecipazione attiva degli insegnanti e talvolta anzi, come nel caso della nostra, condotte come lezioni ex cattedra con poco coinvolgimento dei ragazzi e senza controllo sull'apprendimento, hanno limiti educativi. Cosí, anche se questa attività non è stata inutile, ma anzi abbiamo avuto qualche buon riscontro, non mi sembra si possa dire che essa sia la via migliore per intervenire sull'immagine della matematica nella globalità della popolazione studentesca. Le iniziative descritte sono, in sostanza, dirette a studenti particolari (i piú motivati) e non alla globalità di una classe.

Io con il mio gruppo di lavoro ho fatto un'esperienza analoga alla precedente, mirata però all'introduzione di elementi di informatica in corsi di matematica della scuola secondaria superiore. In questa esperienza, descritta in Bottino, Forcheri, Furinghetti e Molfino (1986) sono stati coinvolti in ogni fase della preparazione anche gli insegnanti degli alunni cui l'esperienza era diretta: i risultati ci sono sembrati soddisfacenti, anche per merito di questo elemento.

Sulla base delle precedenti considerazioni e delle esperienze già fatte, ho fiducia che l'*intervento alternativo* da me proposto con il volumetto Furinghetti (1988) possa avere buone ricadute didattiche. In breve rammento che tale intervento consiste nel proporre agli studenti una lettura opportunamente guidata di testi di argomento matematico (non manuali scolastici) e il volumetto raccoglie alcune schede per gli insegnanti che possono orientare nella scelta dei testi da proporre. Si può non essere d'accordo né sui titoli dei testi da noi proposti, né sullo stile, che per scelta nostra non è mai troppo critico, ma la filosofia di fondo, esposta diffusamente in Furinghetti (1987) mi sembra condivisibile e fruttuosa sia per studenti cosiddetti bravi, sia per studenti "tiepidi" verso la matematica.

Poiché il lavoro di introdurre nell'attività scolastica letture alternative è stato sperimentato in un certo numero di classi, so che esso richiede molto impegno da parte degli insegnanti, ma che vale la pena di impegnarvisi, poiché si ha un effettivo guadagno riguardo al problema di creare negli studenti una immagine della matematica più ricca.

COME E PERCHÉ SI FORMA A SCUOLA UNA CERTA IMMAGINE DELLA MATEMATICA: UN TENTATIVO DI SPIEGAZIONE OFFERTO DA RICERCHE IN EDUCAZIONE MATEMATICA

Sulla base della convinzione che l'immagine della matematica è condizionata (purtroppo spesso in negativo) dall'esperienza scolastica dell'individuo in maniera piú radicale di quanto accade per le altre discipline scolastiche, mi sembra sensato concludere la discussione sull'immagine della matematica con alcuni cenni sulle teorie dell'apprendimento che possono aiutare a spiegare la genesi di tale immagine.

In primo luogo osservo che proprio per la sua natura proteiforme, la matematica ha un'immagine che non è univoca neppure per l'insegnante, il quale ha una sua inconscia concezione della disciplina e inconsciamente la trasmette all'allievo, come è discusso in Chiarugi e Furinghetti (1990), Gonzales Thompson (1984). Per inciso, aggiungo che certi studi che sto conducendo con Bottino sembrano provare che qualcosa di analogo accade per un'altra materia proteiforme (l'informatica), che è anch'essa oggetto di diverse concezioni da parte degli utenti (insegnanti compresi). Ovviamente data la maggior limitatezza del contesto culturale in cui si forma, l'immagine della matematica elaborata dall'allievo è piú povera di quella che gli è trasmessa dall'insegnante.

Il problema di fondo è che la matematica non tollera (o almeno non ha una tradizione di) un apprendimento globale. L'apprendimento nella matematica si sviluppa secondo fasi non in successione, ma intersecantisi, che a seconda del contesto (livello scolare, tipo di scuola,...) hanno diversi sviluppi cosí schematizzabili:

• una fase, per cosí dire, istituzionale e propedeutica in cui si introducono nozioni e concetti. Tale fase purtroppo spesso finisce per constare soprattutto di esercizi di routine per l'acquisizione di manualità su certe tecniche.

• una fase di applicazione di tecniche, nozioni e concetti visti precedentemente

• una fase di formalizzazione, generalizzazione e astrazione.

Un'immagine della disciplina rispondente al reale nasce da *un equilibrio di queste tre fasi,* ottenuto calibrando i tempi e l'impegno a seconda delle età degli alunni e degli obiettivi del corso di studi in oggetto.

Nella pratica scolastica si osserva talvolta un prevalere della prima fase (che è francamente la meno gratificante da tutti i punti di vista, sia per l'insegnante che per lo studente) e su di essa si concentrano l'attenzione e gli sforzi dello studente, anche perchè spesso su di essa è effettuata la valutazione dell'apprendimento. In questa prima fase si forma l'immagine della matematica che poi abbiamo ritrovato in altri contesti. Purtroppo mi pare anche di poter dire che questo orientamento nello spingersi verso un formalismo e meccanicismo fini a sé stessi si accentua con il crescere del livello scolare: si parte dalle situazioni relativamente concrete delle scuole elementari, si passa attraverso le espressioni delle medie ed il calcolo letterale del biennio per arrivare allo studio meccanico del grafico di una funzione del liceo scientifico o, peggio, all'anno di trigonometria che conclude la formazione scientifica negli studi classici.

Cosí chi arriva a fare quello che può essere un legittimo e doveroso punto di arrivo della formazione matematica - ovvero un tentativo di astrazione e generalizzazione - si innesta in un contesto di scetticismo e di rifiuto aprioristico e le nozioni introdotte diventano sempre piú estranee all'aspettativa dello studente.

La fase di applicazione si riduce spesso a sole applicazioni all'interno della disciplina sviluppate ancora in maniera piuttosto meccanica. Ciò deve essere motivo di disappunto perché questa fase ha un interesse non solo per arricchire l'immagine della matematica nella concezione dello studente, ma anche per arricchire l'insegnamento di una poliedricità culturale funzionale alla formazione globale dello studente (a prescindere dallo specifico della matematica). Per questo tipo di potenzialità e la relativa discussione si veda ad esempio Gaskell e Klamkin (1974), Guerraggio (1989).

Se si considera come l'apprendimento della matematica avviene, si può concludere che ha ragione Von Foerster (1985) quando dice che gli studenti vivono l'esperienza scolastica come una violenza sul loro modo di essere. Per molti di essi è realtà quanto Jonathan Swift ha immaginato accadere nei paesi fantastici da lui visitati (*I viaggi di Gulliver*, traduzione di Carlo Formichi, A. Mondadori, Milano, 1982, pagina 399):

«Visitai, infine, la scuola di matematiche, dove il maestro impartiva il suo insegnamento con un metodo che in Europa si stenterebbe persino a immaginare. Teorema e dimostrazione venivano nitidamente scritti sopra un'ostia sottile con inchiostro composto d'una essenza cefalica. Lo studente era tenuto a ingoiarla a stomaco vuoto, e, per tre giorni successivi, a mangiare soltanto pane e acqua. Via via che l'ostia era digerita, la essenza saliva al cervello portando seco il teorema. L'esito, però, non era stato fino allora conforme all'aspettativa, sia per causa di qualche sbaglio nelle dosi della composizione, sia per la birberia dei ragazzi, i quali, avendo a schifo quel bolo, di solito vanno a nascondersi e lo vomitano prima che possa fare effetto. Nessuno, inoltre, è riuscito ancora a persuaderli di praticare rigorosamente la lunga astinenza che la prescrizione richiede.».

Per fornire qualche spunto di riflessione sull'apprendimento della matematica nella pratica scolastica riprendo alcuni concetti della psicologia dell'educazione matematica che mi sembrano particolarmente attinenti alle problematiche che stiamo trattando. Vinner (1983), nell'ambito di una teoria già precedentemente illustrata in Vinner e Hershkowitz (1980) e applicata in altri lavori, dà queste definizioni che traduco *verbatim*:

• chiamiamo "concetto immagine" ("concept image") l'insieme delle proprietà associate ad un certo concetto e la loro rappresentazione mentale

• chiamiamo "concetto definizione" ("concept definition") una definizione verbale che spiega accuratamente il concetto in maniera non circolare.

Ai vari livelli scolari la costruzione dei concetti avviene secondo questo schema:

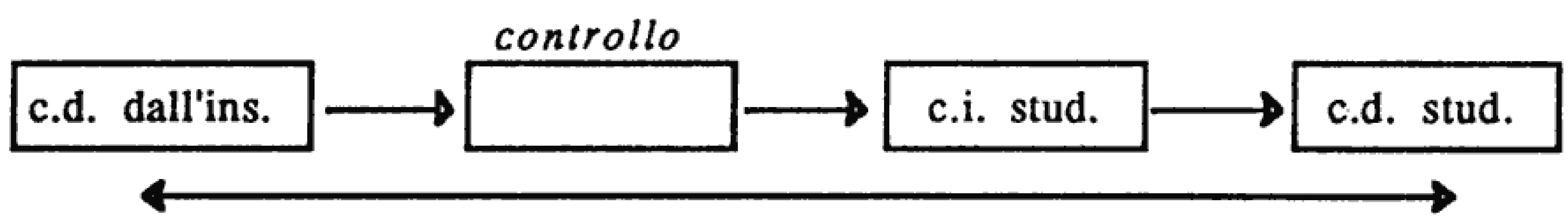

figura 1

Questo schema presuppone vuota la casella in cui si costruirà il c.i. dello studente, con possibilità da parte dell'insegnante di controllare il processo di formazione dei concetti. In realtà numerosi casi di studio provano che tale casella non è vuota, ma contiene c.i. preesistenti degli studenti e la formazione del concetto avviene secondo questo schema:

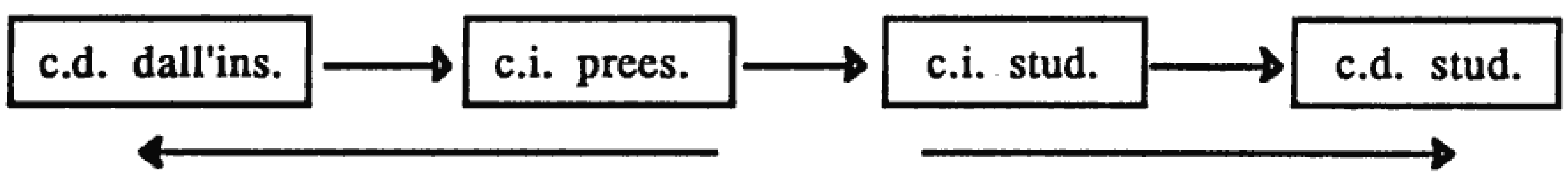

figura 2

Il passaggio dal c.d. dell'insegnante al c.i. dello studente non è sempre controllato dall'insegnante, poiché i c.i. preesistenti degli studenti talvolta ostacolano l'apprendimento: il risultato è che i c.d. dell'insegnante e i c.d. dello studente non sono collegati (nella figura 2 manca il collegamento che nella figura 1 indica la rispondenza dei c.d. di insegnanti e studenti).

Per illustrare le precedenti osservazioni riporto qui di seguito alcuni esempi di false credenze preesistenti nelle menti degli studenti su un certo concetto al momento in cui questo concetto sta per essere introdotto. Fornisco anche alcuni cenni di spiegazioni e rimando per i dettagli ai lavori sul tema citati.

Mi è piú stato piú facile trovare esempi riferiti a concetti abbastanza avanzati non solo a causa della mia maggiore pratica della fascia d'età 14-19 anni, ma anche per il fatto che i concetti preesistenti sono tanto piú numerosi col passare degli anni, poiché uno dei fattori che li propizia è l'esperienza scolastica che può propiziare l'accumularsi nozioni in forma non corretta, come è discusso in Furinghetti e Paola (1988a), Furinghetti e Paola (1988b).

Esempi

1. *Falsa credenza*:
L'operazione di moltiplicare due numeri dà sempre un numero maggiore dei due fattori.
Cause:
- nel linguaggio comune moltiplicare è associato ad aumentare
- gli esempi usualmente proposti inducono a inferire che...

2. *Falsa credenza*:
Nello stesso ordine di idee: la radice quadrata di un numero è minore di quel numero.

3. *Falsa credenza*:
L'altezza di un triangolo cade internamente al triangolo.
Cause:
- gli stereotipi indotti dalla visualizzazione creano la convinzione che...

4. *Falsa credenza*:
La proprietà di linearità vale per tutti gli operatori che si incontrano. Allora $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, $\sqrt{(a + b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\mathrm{sen}(a + b) = \mathrm{sen}\,a + \mathrm{sen}\,b$ e cosí via.
Cause:
- un uso troppo "audace" della generalizzazione di situazioni note, come discusso anche in Fischbein (1990).

5. *Falsa credenza*:
Dato il grafico della funzione $f(x) = x$, se $x \geq 0$ e $f(x) = 0$, se $x<0$, esso non può essere grafico di una funzione continua. Per una discussione su questo punto si veda Tall e Vinner (1981).
Cause:
• nel linguaggio comune continuo può anche significare che non ci sono cambiamenti delle proprietà e quindi se si fissa l'attenzione su una certa proprietà...
6. *Falsa credenza*:
$|a| = a$, studiata in Chiarugi, Fracassina e Furinghetti (1990).
Cause:
• apprendimento precedente non corretto su casi mistificanti, per cui a è positivo se non è preceduto da segno
• difficoltà epistemologiche sul concetto di variabile.

CHE COSA DOVREBBE RESTARE DELLA MATEMATICA QUANDO SI È DIMENTICATA LA MATEMATICA

Mi sembra opportuno fissare l'attenzione degli insegnanti sul fatto che bisogna tener conto dell'esistenza degli schemi mentali preesistenti nella mente degli studenti, se si vuole dare efficacia all'insegnamento prevenendo il formarsi di quelle idee scorrette, su cui poi si costruisce un sapere "violento" che origina le squallide immagini della matematica che abbiamo visto sopra.

Considero la consapevolezza su questo fatto un buon punto di partenza per la discussione su ciò che dovrebbe restare della matematica quando si è dimenticata la matematica. Quanto a fornire un elenco preciso di contenuti o abilità, mi limito a dare alcune idee generali, che vanno discusse e sviluppate in rapporto all'età degli studenti, l'ambito culturale e tutti gli altri fattori ambientali inerenti l'insegnamento.

In primo luogo è opportuno che l'insegnante, pur nella limitatezza del suo contesto, e senza illusioni, si configuri con precisione l'obiettivo culturale matematico a cui vuole informare il suo insegnamento e lo persegua con quell'equilibrio tra manualità, astrazione e applicazione di cui ho detto sopra.

Mi sembra un buon traguardo, in riferimento sia ad un proseguimento degli studi all'università, sia alla formazione per il lavoro e, naturalmente, per la vita, che dell'insegnamento matematico restino questi elementi:

- le tecniche di base sulle operazioni rapportate alla presenza di strumenti di calcolo, ma non necessariamente superate da questa. Mi sembra opportuno che esse siano associate ai concetti di approssimazione e di ordine di grandezza, che permettono la previsione e la valutazione dei risultati (si vedano le sciocchezze dette nei telegiornali sui bilanci degli stati ecc. in cui milioni e miliardi sono termini intercambiabili);
- il concetto di sistema assiomatico, eventualmente anche al livello semiintuitivo di regola del gioco
- l'uso univoco, non ambiguo del linguaggio (anche quello naturale)
- l'abitudine al ragionamento deduttivo, almeno nel senso più elementare di "buon ragionamento"
- il concetto di modellizzazione di un problema.

Si usa il termine concetto, laddove si intende che possono mancare le tecniche, ma non l'idea generale che sta alla base.

Ciò premesso, da parte sua l'insegnante deve abbandonare alcune illusioni e essere disposto a una notevole tolleranza intellettuale. In Davis e Hersh (1988) è detto che «non c'è nessuna legge di natura, Dio o governo per cui tutti debbano conoscere la formula quadratica. La matematica è interessante e importante, ma anche arte, religione, letteratura, e molte altre cose lo sono.». Anche se non si condivide la filosofia della matematica che c'è alla base dell'opera degli autori, non si può non riflettere su questa affermazione e accettare che si può vivere felici o infelici indipendentemente dal rapporto con la matematica.

Su queste basi penso che si possa offrire agli studenti l'opportunità di elaborare un'immagine che chiamerò "ecologica" della matematica, intendendo con ciò un'immagine rispondente alla natura e rispettosa delle peculiarità di questa disciplina.

Dedico questo lavoro a mia madre Teresa Arvigo che mi ha molto incoraggiato quando ero studentessa di matematica e a mio padre Augusto (1913-1982), che quando avevo molto studiato ci accompagnava al cinema.

BIBLIOGRAFIA

Cito i dati che ho potuto desumere dalle edizioni che ho avuto la possibilità di consultare.

• Adda J.: 1987, "Review of the book of Serge Lang *Des jeunes et des maths. Un chercheur rencontre des collègiens*". Éditions Belin", *Educational Studies in Mathematics*, 18, 209-212.

• Bell E. T.: 1951, *Mathematics, queen and servant of science*, MacGraw-Hill, New York-Toronto-London.

• Bianca M., M. Rigutti e M. Santaniello: 1986, *Divulgazione scientifica e didattica delle scienze*, Le Monnier, Firenze.

• Bishop A. J., P. Damerow, P. Gerdes e C. Keitel: 1988, "Mathematics education and society (MES)", in A. Hirst and K. Hirst (editors.) *Proceedings of the Sixth International Congress on Mathematical Education*, J. Bolyai Mathematical Society, Budapest, Hungary. Esiste anche una raccolta dei lavori più significativi di questa sessione pubblicata dall'U.N.E.S.C.O.: C. Keitel, P.

Damerow, A. Bishop and P. Gerdes (editors) *Mathematics, Education and society*, Document Series N. 35, UNESCO, Paris.

• Borel A.: 1983, "Mathematics: art and science", *The Mathematical Intelligencer*, 5, n. 3, 9-17.

• Borga M.: 1990, "Logica matematica, fondamenti e filosofia della matematica oggi", in F. Furinghetti (a cura di), *Matematica oggi. Dalle idee alla scuola*, B. Mondadori, Milano, 181-186.

• Bottino R. M., P. Forcheri, F. Furinghetti e M.T. Molfino: 1987, "An attempt to integrate Mathematics and Computer Science in High School", in P. Bowie (editor) *Proceedings of the 38th CIEAEM's meeting*, Southampton, U.K., (*Mathematics for those between 14 and 17, is it really necessary?*), The Cotswold Press Eynsham, Oxford, 115-120.

• Brown R. e T. Porter, "Making a mathematical exhibition", in *Proceedings I.C.M.I. Seminar 1989*, Leeds, (in corso di stampa).

• Burton L.: 1987, "From failure to success: changing the experience of adult learners of mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, 18, 305-316.

• Chiarugi I., G. Fracassina e F. Furinghetti: 1990, "Learning difficulties behind the notion of absolute value", in G. Booker, P. Cobb and T. N. De Mendicuti (editors) *Proceedings of the P.M.E. 14*, Oaxtepec (Mexico), 3, pp. 231-238.

• Chiarugi I. e F. Furinghetti: 1990, "La matematica nei bienni: nuovi programmi e vecchi problemi. Presentazione di un questionario di indagine", in F. Furinghetti (a cura di), *Matematica oggi. Dalle idee alla scuola*, B. Mondadori, Milano, 36-46.

• Davis P. J. e R. Hersh: 1988, *Il sogno di Cartesio*, Edizioni Comunità, Milano; trad. it. di *Descartes' dream*, Harvester Press Limited, Brighton, 1986.

• Dehn M.: 1983, "The mentality of the mathematician: a characterization", *The Mathematical Intelligencer*, 5, n. 2, 18-26.

• Dreyfus T. e T. Eisenberg: 1984, "On the aesthetics of mathematical thought", *For the Learning of Mathematics*, 6, n. 1, 2-10.

• Emmer M.: 1983, "Un esperimento di matematica visiva: i film della serie «arte e matematica»", in F. Furinghetti (a cura di), *Il ruolo della geometria nella cultura e nella scuola*, Tilgher, Genova, 93-108.

• Emmer M.: 1990, "Esiste una divulgazione matematica oggi in Italia?", comunicazione presentata al convegno *Il pensiero matematico nella cultura e nella società italiana degli anni '90*, Milano, 29-30 marzo 1990.

• Fischbein E.: 1990, "Intuition and information processing in mathematical activity", *International Journal of Educational Research*, 14, n. 1, 31- 50.

• Furinghetti F.: 1987, "Ipotesi per una biblioteca di area matematica", *N.U.M.I.*, 14, supplemento al n. 11, 45-52.

• Furinghetti F. (a cura di): 1988, *Ipotesi per una biblioteca di area matematica per studenti della scuola secondaria superiore*, Ecig, Genova.

• Furinghetti F. e D. Paola: 1988, "Wrong beliefs and misunderstandings about basic concepts of Calculus (age 16-19)", in *Proceedings of the 39th CIEAEM's meeting*, Sherbrooke, Québec, (*The role errors play in the learning and teaching of Mathematics*), Les Éditions de l'Université de Sherbrooke, 173-177.

• Furinghetti F. e D. Paola: 1988b, "Students' concept images on the concepts of infinity, infinitesimal, limit, continuity, $\varepsilon-\delta$", *manoscritto*.

• Gaskell R. E. e M. S. Klamkin: 1974, "The industrial mathematician views his profession: a report of the committee on corporate members", *American Mathematical Monthly*, n. 81, 699-716.

• Gonzales Thompson A.: 1984, "A relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice", *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.

• Guerraggio A.: 1989, "Matematica, modelli e società", *Rivista IBM*, 25, n. 4, 16-25.

• Hadamard J.: 1945, *The psychology of invention in the mathematical field*, Princeton University Press, Princeton.

• Halmos P. R.: 1968, "Mathematics as a creative art", *American scientist*, 56, 375-389.

• Halmos P. R.: 1981, "The heart of mathematics", *American Mathematical Monthly*, 87, 519-524.

• Halmos P. R.: 1985, *I want to be a mathematician: an automathography*, Springer Verlag, New York.

• Hammond A. L.: 1978, "Mathematics - Our invisible culture", in L.A. Steen, *Mathematics today. Twelve informal essays*, Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin,134. Si vedano gli altri articoli contenuti in questo volume e le relative bibliografie.

• Hanna, G.: 1983, *Rigorous proof in mathematics education*, OISE Press, Toronto.

• Hardy G. H.: 1989, *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano; trad. it. di *A mathematician's apology*, rev. ed. Cambridge University Press, New York, 1969 (orig. 1940).

• Howson A. G., P. Kahane e H. Pollak: 1988, " The popularization of mathematics", I.C.M.I. study n. 4, *Bulletin n. 24 of ICMI*, 1-10.

• Lang S.: 1986, *Encounters with Maths*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

• Lerman S.: 1989, "Constructivism, mathematics and mathematics education", *Educational Studies in Mathematics*, 20, 211-223.

• Newman J. R. (editor): 1956, *The world of mathematics*, Simon and Schuster, New York, settima edizione.

• Strichartz R. S.: 1983, "Mathematics on display", *The Mathematical Intelligencer*, 5, n. 2, 37-40.

• Tall D. O. e S. Vinner: 1981, "Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity", *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

• Vinner S.: 1983, "Concept definition, concept image and the notion of function", *International Journal for mathematical Education in Science and Technology*, 14, n. 3, 293-305.

• Vinner S. e R. Hershkowitz: 1980, "Concept image and some common cognitive paths in the development of simple geometric concepts", in *Proceedings of the P.M.E. 10*, Berkeley, 177-184.

• Von Foerster A.: 1985, "Cibernetica ed epistemologia: storia e prospettive" in G. Bocchi e M. Ceruti (a cura di), *La sfida della complessità*, Feltrinelli, Milano.

• Zeeman C. e I. Stewart: 1985, "Mathematics for young people: the Royal Institution Masterclass", *The Mathematical Intelligencer*, 7, n. 3, 59-64.

Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova
Via L.B.Alberti 4
I 16132 Genova
Italia