SOMME INFINITE O SERIE NUMERICHE

E.Barone

1. SOFISMA DI ZENONE: ACHILLE E LA TARTARUGA.

Il famoso sofisma di Zenone (V sec. a. C.) su Achille e la tartaruga si puo' cosi' descrivere: il pie'veloce Achille, avendo sfidato nella corsa una tartaruga , le da' un vantaggio di uno spazio s_1. Egli per percorrere tale spazio impieghera' un tempo t_1. Durante quel tempo t_1, la tartaruga ha pero' percorso uno spazio s_2 e quindi Achille per percorrerlo ci impieghera' un tempo t_2 e cosi' via. Cio' induce Zenone a concludere che, per quanto possa sembrare assurdo, Achille non raggiungera' la tartaruga. Questo, evidentemente, e'dovuto al fatto che Zenone congettura che la somma di infinite quantita' positive, nel nostro caso

$$t_1 + t_2 + \ldots,$$

debba necessariamente dare infinito. Altrettanto celebri sono i sofismi sulla percorribilita' di un segmento finito (se ne percorre prima meta', poi la meta' della meta', ecc. e quindi dovendo percorrere infinite lunghezze positive, non si riuscira'a percorrere l'intero segmento), e sull'esistenza di due entita' distinte (se esistono due entita' distinte A e B, deve esistere una entita'C, distinta dalle precedenti, che le separi; ma essendo C distinto da A e da B, devono esistere altre due entita' che separino A da C e C da B, ecc.; quindi se esistono due entita' distinte , ne devono esistere infinite).

Le argomentazioni zenoniane hanno il pregio di aver evidenziato le difficolta' che sorgono nella scomposizione di un intervallo di tempo o di una lunghezza , a causa dell'inevitabile introduzione del concetto di infinito.

L'atteggiamento dei matematici nei riguardi dell'infinito fu di estrema diffidenza e si cerco' accuratamente di evitarlo in tutte le costruzioni matematiche, almeno nella forma di "infinito effettivo" (tale concetto di ìnfinito, detto anche "infinito in atto" va distinto da quello di"infinito potenziale", dove le quantita' in gioco sono sempre finite, anche se possono crescere arbitrariamente).

2. LA DEFINIZIONE DI SOMMA DI INFINITI NUMERI.

La causa fondamentale dei sofismi precedenti, sta nel fatto che non si sa bene cosa si deve intendere per somma di infiniti numeri.Bisogna infatti attendere piu' di 2000 anni , precisamente il 1700, con la nascita del calcolo infinitesimale, dovuto a Newton e Leibnitz, per padroneggiare con sicurezza tale concetto.

Oggi sappiamo che data una successione di numeri reali

$a_1, a_2, \ldots$

chiamiamo SOMMA di tali numeri e la denotiamo con

$s = a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n \geq 1} a_n$

il limite, quando esiste, della successione delle SOMME PARZIALI

$s_1, s_2, \ldots$

essendo

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

La coppia di successioni $(\{a_n\}, \{s_n\})$ si dice SERIE di termine generale a_n , e si indica brevemente con il simbolo $\sum_{n \geq 1} a_n$.

Diremo che la serie

a) CONVERGE alla somma s, se s e' un numero reale;

b) DIVERGE POSITIVAMENTE, se $s = +\infty$;

c) DIVERGE NEGATIVAMENTE, se $s = -\infty$;

d) e' NON REGOLARE, se non esiste il limite delle somme parziali.

Le serie del tipo a),b) e c) si dicono REGOLARI.

Le serie i cui termini sono tutti positivi oppure tutti negativi hanno una particolare importanza, in quanto sono tutte regolari. Cio' e' dovuto al fatto che, se $a_n \geq 0$ per ogni n, essendo

$$s_n = s_{n-1} + a_n$$

risulta

$$s_n - s_{n-1} = a_n \geq 0$$

e quindi la successione $\{ s_n \}$ e' crescente e come tale ha un limite finito oppure $+ \infty$.

Un' altra importante osservazione e' la seguente. Mentre e' facile provare che, se una serie e' convergente, allora il

$$\lim. a_n = 0 ,$$

non e' vero il viceversa. Considerjamo infatti la serie

$$1 + 1/2 + 1/2 + 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + \ldots$$

nella quale si osservano tanti "gruppetti" aventi come somma 1.

Se si prende n sufficientemente grande, sara' s_n grande quanto si vuole, e quindi tale serie e' positivamente divergente, pur essendo infinitesima la successine dei suoi termini.

Vediamo ora un esempio fondamentale di serie ed alcune sue utili applicazioni in argomenti trattati nelle scuole medie superiori.

3. LA SERIE GEOMETRICA.

Consideriamo due problemi apparentemente molto diversi.

a) Si chiama montante la somma di un capitale C e dell'interesse dovuto a tale capitale. Se r e' il tasso annuo unitario di interesse , dopo un anno si avra' il montante

$$M_1 = C + rC = C (1+r)$$

dopo due anni si avra' il montante

$$M_2 = M_1(1+r) = C (1+r)^2,$$

in generale, dopo n anni si avra' il montante

$$M_n = C (1+r)^n.$$

b) Sia P_n il numero di individui di una popolazione biologica nell'anno n. E' sensato ipotizzare che ogni anno la popolazione aumentera' di una quantita' proporzionale al numero di individui presenti. Quindi se denotiamo con k il coefficiente di crescita della popolazione e con P_0 la popolazione iniziale, avremo

$$P_1 = P_0 + kP_0 = P_0(1+k)$$

e poi, come prima,

$$P_n = P_0(1+k)^n.$$

Come si vede due problemi diversi, portano allo stesso modello matematico, che puo' essere sintetizzato dalla progressione geometrica di ragione x

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

Ora in molti casi e' utile valutare le somme parziali di tale successione e la somma della sua serie.

Posto

$$s_n = 1 + x + .. + x^n$$

risulta

$$s_n = s_{n-1} + x^n = 1+xs_{n-1}$$

e quindi

$$s_{n-1} = (1-x^n)/(1-x)$$

purche' ovviamente sia x diverso da 1 (per $x = 1$ risulta $s_n = n+1$ e quindi lim. $s_n = + \infty$).

Se $x < 1$ risulta lim. $x^n = 0$ e quindi

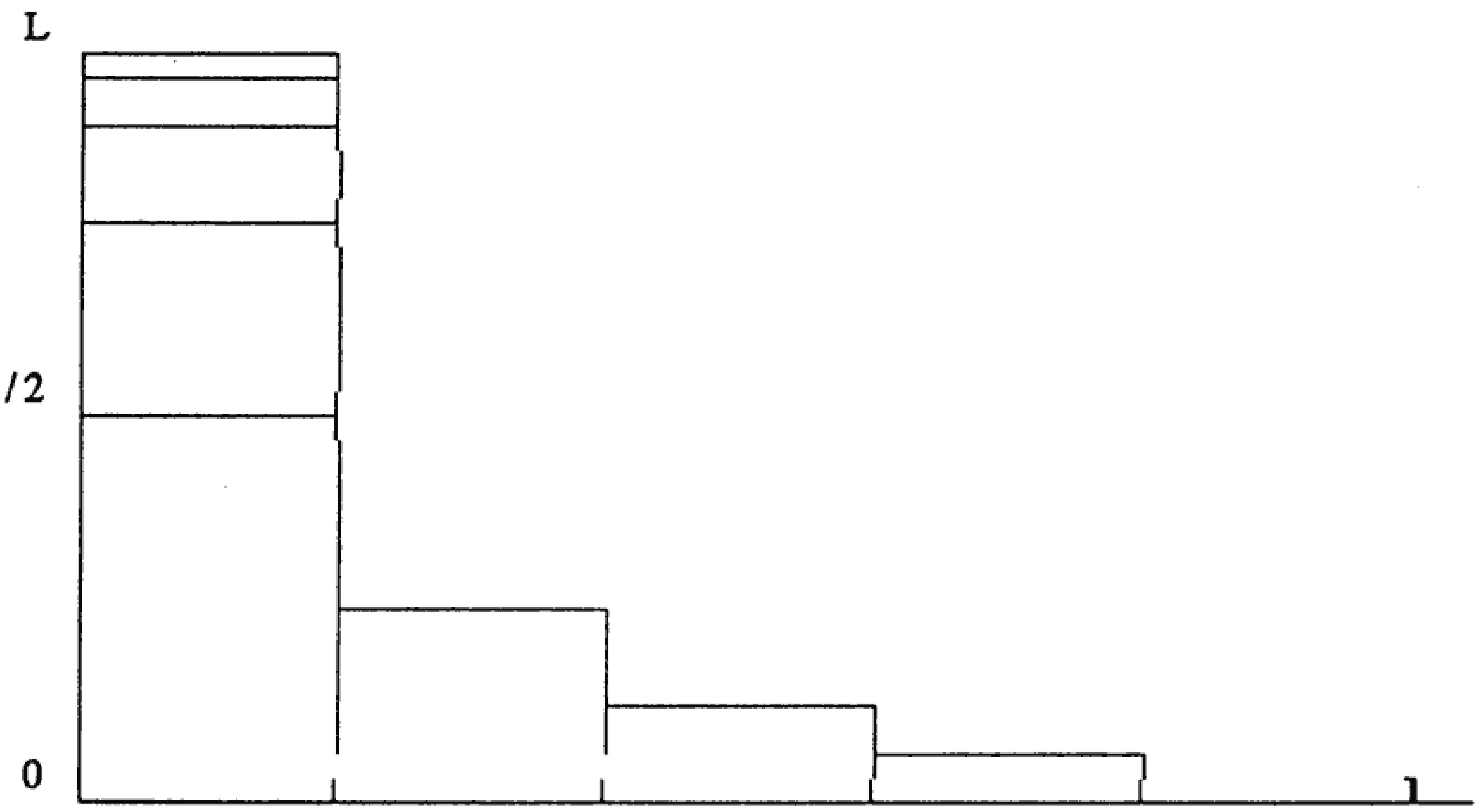
$$= \text{lim. } s_n = 1/(1-x) ,$$

mentre per $x > 1$, lim. $s_n = + \infty$.

La serie geometrica permette di dare una spiegazione al sofisma sulla percorribilita' (o sulla dicotomia) di un segmento . Sia quindi L la lunghezza di un segmento. Percorrendone prima meta' poi la meta' della meta' e cosi' via, non si percorre affatto una distanza infinita, bensi'

$$L/2 + L/4 + L/8 + \dots = L/2 (1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + ..) =$$
$$= L/2 [1/ (1- 1/2)] = L .$$

Una rappresentazione geometrica convincente dei calcoli precedenti e' la seguente



Dal discorso precedente si evince che una somma infinita di quantita' positive, non e' affatto detto che sia infinita e quindi nel sofisma di Achille e la tartaruga, la somma dei tempi t_i puo' essere un tempo finito t ed Achille raggiungera' la tartaruga dopo tale tempo.

4. RAPPRESENTAZIONE DECIMALE DEI NUMERI REALI

Un'applicazione interessante del concetto di serie ed in particolare della serie geometrica, e' la rappresentazione decimale o in qualsiasi base b, dei numeri reali.

Richiamiamo brevemente alcune nozioni introduttive sui numeri reali. I numeri reali sono rappresentabili mediante allineamenti decimali infiniti, del tipo

$$x = a, x_1x_2x_3 \ldots x_n \ldots .$$

dove a e' un intero relativo, mentre x_n e' una cifra compresa tra 0 e 9. Se la base b e' diversa da 10, x_n variera' tra 0 e b-1.

A sua volta anche a e' formato da un segno e da un allineamento finito di cifre .

Limitiamoci per semplicita' di notazione ai numeri positivi. Il numero reale x individua una successione di intervalli, decrescente per inclusione

$[\ a\ ;\ a+1\ ]\ ,\ [\ a,x_1\ ;\ a,x_1+0,1\ ]\ ,\ [\ a,x_1x_2\ ;\ a,x_1x_2+0,01\ ]\ ,..$

Ad esempio il numero

$\sqrt{2} = 1,41421356....$

individua la successione di intervalli

$[\ 1\ ;\ 2\ ]\ ,\ [\ 1,4\ ;\ 1,5\ ]\ ,\ [\ 1,41\ ;\ 1,42\ ]\ ,\ [\ 1,414\ ;\ \ 1,415\ \ ]$

Se chiamiamo con A l'insieme degli estremi sinistri di questi intervalli e con B l'insieme degli estremi destri, allora la coppia (A , B) e' una coppia di classi contigue di cui x e' l'"elemento separatore" e la cui esistenza e' garantita dall'assioma di "continuita'" di Dedekind (vedi [1] pg.15,96,97).

Ora il significato dell'allineamento decimale finito

$a = a_m\ a_{m-1}..a_2a_1a_0$

e'

$a_m10^m + a_{m-1}10^{m-1} + ... + a_110 + a_0$

mentre il significato di

$a,x_1x_2..x_n$

e'

$a + x_110^{-1} + x_210^{-2} + .. + x_n10^{-n}.$

Pertanto essendo

$x = \lim.\ a,x_1x_2...x_n$

il numero reale ci appare come la somma di una serie. Si puo' anzi provare che tutti e soli i numeri reali compresi fra zero e uno sono le somme del tipo

$\sum_{n\geq 1} x_n\ /\ 10^n \qquad \text{con } x_n\ =\ 0,1,2,..,9.$

5. NUMERI RAZIONALI PERIODICI : FRAZIONE GENERATRICE.

I numeri razionali sono caratterizzati dal fatto che la loro rappresentazione decimale, da un certo punto in poi, risulta periodica (potendo essere il periodo 0). Faremo vedere come si trova la frazione generatrice del numero decimale periodico, con l'ausilio delle serie geometriche, spiegando cosi' la famosa regoletta.

Per rendere piu' semplice il discorso, lo illustreremo con un esempio.

$$2{,}3\,\overline{75} = 2{,}3\ 75\ 75\ 75\ \ldots = 2 + 3/10 + 75/10^3 + 75/10^5 + \ldots =$$

$$= 2 + 3/10 + 75/10^3(1 + 1/10^2 + 1/10^4 + 1/10^6 + \ldots) =$$

$$= 2 + 3/10 + 75/10^3[1/ (1 - 1/10^2)] =$$

$$= 2 + 3/10 + 75/10 \ [1/ (10^2 - 1)] =$$

$$= 2 + 3/10 + 75/(10^3-10) =$$

$$= [2(10^3-10) + 3(10^2-1) + 75] / (10^3-10) =$$

$$= [2\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 75 - (2\cdot 10 + 3\cdot 1)] / 990 =$$

$$= (2375 - 23) / 990 .$$

Il discorso non cambia se al posto della base 10 si considera una qualsiasi base b . In particolare si ottiene un utile esercizio, trovando la frazione generatrice di un numero razionale periodico in base 2. Ad esempio qual'e' la frazione generatrice del numero binario $0{,}01\,\overline{10}$?

Concludiamo questo paragrafo ricordando che tutti i numeri razionali periodici di periodo 0, sono anche periodici di periodo 9 ed ammettono quindi due rappresentazioni decimali. Cio' e' dovuto al fatto che

$$0{,}\overline{9} = 0{,}999\ldots = 9/10 + 9/10^2 + 9/10^3 + \ldots =$$

$$= 9/10\cdot(1+1/10+1/10^2+\ldots) = 9/10 \ [1/(1-1/10)] = 1.$$

6. LA REGOLA PER STABILIRE IL TIPO DI UN NUMERO RAZIONALE.

Tenuta presente la precisazione richiamata alla fine del n. 5, un numero razionale puo' essere periodico di periodo zero (o equivalentemente, avere un numero finito di cifre dopo la virgola) o periodico di periodo diverso da zero. In questo secondo caso puo' essere "periodico semplice" oppure "periodico misto". Nel caso dei numeri decimali la regola per stabilire il tipo del numero razionale e' la seguente.

Dato un numero razionale rappresentato dalla frazione ridotta ai minimi termini, eseguendo la divisione fra il numeratore ed il denominatore si ottiene:

a) un numero finito di cifre decimali dopo la virgola (prima del periodo zero), se il denominatore ha come fattori primi solo 2 e 5;

b) un numero periodico semplice, se il denominatore non contiene come fattori primi ne' 2 ne' 5 (es. 5/3, 7/11, 4/21 ..);

c) un numero periodico misto, nei casi rimanenti (es. 5/12, 7/26, 3/210,...).

Questa regola , di solito insegnata, non viene mai provata ed e' un vero peccato, visto che si spreca una enorme quantita' di tempo con le famigerate "espressioni". I tediosi esercizi sulle espressioni hanno la stessa utilita' che avevano le paginette di aste nelle scuole elementari, cioe' di annoiare. Ma mentre in queste ultime scuole da tempo si respira aria di rinnovamento, nelle scuole medie superiori, tale rinnovamento tarda ad arrivare.

La dimostrazione di questa regola e' un' utile applicazione delle "classi dei resti" che, guarda caso, oggi vengono insegnate nelle Elementari, sotto il nome di "aritmetica dell'orologio", ma difficilmente trovano posto nei programmi delle scuole medie superiori.

Sempre con le classi dei resti si possono provare le "regole per la divisibilita' di un numero per 2, per 3, ecc." e le "prove del 9 e dell' 11, per le quattro operazioni".

Per una trattazione esauriente di questo argomento, vedi ad esempio [2] cap. IV, oppure [3] cap. IX.

Su questo argomento dei numeri razionali periodici e non, si possono trovare tanti argomenti di indagine e fare della vera matematica e non soltanto "conti". Ad esempio : se un numero e' periodico in una certa base, deve per forza esserlo in una base diversa? Se la risposta e' negativa , trovare una regola per stabilire in quale base un dato numero razionale, ha solo un numero finito di cifre dopo la virgola.

7. SOMME DI SERIE E CALCOLATORE

In generale e' abbastanza facile dire, avvalendosi di opportuni criteri, se una serie e' o no convergente, molto piu' difficile e' stabilire qual e' la somma della serie (lo stesso problema, non a caso, lo si ha con l'integrazione).

Il calcolatore e' uno strumento molto utile per diagnosticare la somma di una serie. Infatti il calcolo successivo di alcuni valori di s_n , puo' far congetturare il valore della somma della serie.

Ci sono pero' dei casi in cui solo la teoria puo' risolvere esattamente il problema. Vediamo un esempio.

E' noto che la serie armonica

$$\sum_{n\geq 1} 1/n$$

e' divergente (positivamente), mentre la serie alternante

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \dots$$

e' convergente (Leibniz 1673).

Si puo' allora pensare di scrivere un piccolo programma per il calcolo della somma della serie. Ricordando che la serie a termini di segno alternato hanno la proprieta'

$$s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1}$$

si possono calcolare successivamente le s_n e fermarsi quando, per esempio

$$s_{2n+1} - s_{2n} < 10^{-7}.$$

Si trova

$s_1 = 1$; $s_2 = 0,5$; $s_3 = 0,8333334$; $s_4 = 0,5833334$; ..

e dopo molti calcoli riusciremmo a trovare pochissime cifre esatte dopo la virgola. Infatti si ha, ad esempio

$s_{2000} = 0,6928902$; $s_{2001} = 0,6933899$

e quindi solo due sono le cifre esatte dopo la virgola.

Il motivo di cio' e' che la serie converge si', ma molto lentamente.

La teoria degli sviluppi in serie di Taylor ci dice invece che

$$\log_e(1+x) = \sum_{n \geq 1}(-1)^{n+1} x^n / n \quad \text{per} \quad -1 < x \leq 1$$

e quindi la somma della serie alternante e' $\log_e 2 = 0,693147181..$ (tale calcolo si puo' effettuare con mezzi piu' rapidi delle somme parziali della serie alternante. Vedi ad esempio [4] pg.426, 462,..).

BIBLIOGRAFIA

[1] E. GIUSTI - Analisi Matematica 1. Bollati Boringhieri. 1988

[2] G. C. BAROZZI - Aritmetica. Un approccio computazionale. Zanichelli. 1987

[3] G.H.HARDY, E.M. WRIGHT - An introduction to the theory of numbers. Oxford University Press 1975

[4] G. GEYMONAT - Lezioni di Matematica 1 . Levrotto & Bella. 1981

Lecce 5/12/89

E.BARONE
Dip. di Mat.
Via Arnesano
73100 Lecce

rivisto 9 /10/90