Presentazione

Questa pubblicazione è dedicata ad alcune delle relazioni tenute nell'anno accademico 1989/'90 nell'ambito dell'attività pluriennale di aggiornamento rivolta ai docenti della scuola secondaria, alla cui realizzazione hanno partecipato, a vario titolo, il gruppo locale di ricerca didattica operante presso il Dipartimento di Matematica, la sezione salentina della Mathesis e l'IRRSAE di Puglia.

E' dunque la continuazione del Quaderno n. 3 - 1990, cui rimando, ed in particolare alla relazione di A. Iacomella ivi pubblicata, per gli scopi e le finalità dell'attività di aggiornamento nel suo complesso. Tratto caratteristico della nostra proposta è lo svolgersi su base pluriennale, in quanto le aspettative ed i bisogni della classe docente richiedono interventi non frammentari ed occasionali. Già esser riusciti, pur tra diverse difficoltà, a tenere viva questa serie d'incontri, mi pare titolo di merito [1]. La nutrita partecipazione di docenti ai seminari ha confermato che le idee in base alle quali tutta l'attività è stata concepita sono state condivise. Abbiamo così creato una nuova ...

---

[1] Si tenga conto inoltre che nello stesso anno accademico il gruppo di ricerca ha predisposto un secondo calendario di incontri per la Scuola dell'Obbligo, articolatosi con gli interventi di E. Barone sulla Probabilità, di Carlo Marchini sull'Aritmetica e le rappresentazioni cartesiane, di Domenico Lenzi sulla rappresentazione dei numeri mediante il minicalcolatore di Papy, di Alba Iacomella sulle trasformazioni in Geometria e di Bruno Rizzi su aspetti computazionali dell'Aritmetica.

tradizione, quella degli incontri presso il Dipartimento di Matematica. Ma al di là del fatto episodico mirato all' arricchimento culturale degli insegnanti, che gli incontri possono favorire, i seminari sono pensati dal gruppo di ricerca didattica come premessa indispensabile per il raggiungimento dello scopo principale: la costituzione di una unità operativa di ricerca in Didattica della Matematica che coinvolga numerosi docenti ed entri così nel tessuto scolastico locale.

Si desume facilmente, dal seguente elenco degli interventi e dei relatori, che si è cercato di affrontare le tematiche innovative previste dai nuovi programmi e contemporaneamente di attivare una riflessione di carattere epistemologico e pedagogico, reperendo a Lecce ed altrove le competenze. L'intervento di numerosi docenti e ricercatori di altre sedi universitarie è stato momento di utile confronto tra le varie metodologie di ricerca didattica.

Il curatore di queste note chiede scusa se non è riuscito a procurarsi tutte le relazioni relative agli interventi svolti, di cui viene allegato il calendario completo, ma motivi tecnici e di tempo hanno limitato il numero delle esposizioni scritte, anche perché alcuni seminari, in particolare quelli del 16 novembre e del 20 dicembre 1989, non sono qui riportati in quanto apparsi in altre pubblicazioni.

Elenco dei seminari tenutisi nell'A.A. 1989/'90

- 17 e 25 ottobre 1989 - *Enzo Barone* (Lecce): Le serie e le loro applicazioni all'insegnamento.
- 25 ottobre 1989 - *Domenico Lenzi* (Lecce): Il concetto di cardinalità per gli insiemi.

- 8 e 9 novembre 1989 - *Francesco Speranza* (Parma): Infinito e Finito nella Didattica della Matematica.

- 16 e 23 novembre 1989 - *Carlo Marchini* (Lecce): Aspetti didattici della teoria degli insiemi [2].

- 23 novembre 1989 - *Domenico Lenzi* (Lecce): Il teorema di Cantor-Schroeder- Bernstein.

- 20 dicembre 1989 - *Claudio Bernardi* (Roma): I sistemi elettorali; una proposta di sistema assiomatico [3].

- 18 gennaio 1990 - *Carlo Marchini* (Lecce): I numeri reali, un problema didattico.

- 8 febbraio 1990 - *Mauro Biliotti* (Lecce): Aspetti didattici della teoria dei codici.

- 7 marzo 1990 - *Maria Rosaria Rizzardi* (Lecce): Software matematico.

- 14 marzo 1990 - *Maria Rosaria Rizzardi* (Lecce): Laboratorio matematico.

- 21 marzo 1990 - *Carla Calvi Parisetti* (Parma): Probabilità soggettiva nella scuola superiore.

- 21 marzo 1990 - *Carla Calvi Parisetti* (Parma): Statistica inferenziale bayesiana nella scuola superiore.

- 26 marzo 1990 - *Salvatore Soresi* (Padova): Condizioni dell'insegnamento e difficoltà d'apprendimento.

- 5 aprile 1990 - *Consolato Pellegrino* (Modena): Avvio alla ricorsività.

- 20 aprile 1990 - *Silvano Holzer* (Trieste): Sulla nozione di media.

- 3 maggio 1990 - *Fulvia Furinghetti* (Genova): Che cosa deve restare della Matematica quando si è dimenticata la Matematica.

Accanto a questi incontri, Carlo Marchini ha tenuto un breve ciclo di lezioni sulla Logica Matematica, rivolto ad insegnanti delle Scuole Secondarie superiori, nei giorni 22/1/90, 15/2/90, 19/2/90, 5/3/90, 19/3/90 e 2/4/90.

Il Curatore

Carlo Marchini

---

[2] Pubblicato su La Matematica e la Sua Didattica, Anno 2, n. 3 (1988) e Anno 3 n. 1 (1989)

[3] Pubblicato su Bollettino U.M.I. (7) **4**-A, 1990.

LA RADICE QUADRATA NELLA SCUOLA MEDIA

E.BARONE

1. Introduzione.

La radice quadrata di solito e' introdotta gia'nella scuola media inferiore, quando il concetto di numero reale non e' stato ancora dato e solitamente si liquida il problema dicendo: "la radice quadrata di un numero intero che non sia quadrato perfetto e' un numero decimale. Alcuni Autori, gia' piu' avveduti, preferiscono dire: "poiche' un numero non quadrato perfetto e' sempre compreso tra quadrati di due numeri interi consecutivi, la sua radice quadrata sara' compresa tra le radici quadrate di questi due numeri. Ad esempio, essendo 45 compreso tra 36 e 49, risulta

$$6 < \sqrt{45} < 7."$$

Si puo' quindi correttamente parlare di approssimazione per difetto e per eccesso della radice quadrata. Dopo cio' tutti gli Autori passano a descrivere l'algoritmo di"estrazione" della radice quadrata, senza alcuna giustificazione di tale algoritmo. Le cose non cambiano negli anni successivi edahime' si puo' arrivare a scoprire che la maggior parte degli insegnanti, sia di scuola media inferiore , che di scuola media superiore, non solo non sa spiegare il predetto algoritmo, ma non si e' mai neanche posto il problema. Vediamo allora di dare una spiegazione di tale famoso algoritmo, che personalmente ho sempre avuto difficolta' a memorizzare e che ho dovuto ripassare, quando la prima delle mie figlie me ne ha chiesto ragione. In un secondo momento vedremo di dire qualcosa sulla opportunita' di tale algoritmo e sulla sua eventuale sostituzione.

2. L'algoritmo della radice quadrata.

Dato un numero naturale Y, di cui si vuole calcolare la radice quadrata X (o meglio la sua MIGLIORE APPROSSIMAZIONE PER DIFETTO, se il numero non e' un quadrato perfetto) , esiste un unico numero naturale n per il quale risulta

$$10^{2(n-1)} \leq Y < 10^{2n}.$$

Poiche' si ha

$$10^{n-1} \leq \sqrt{Y} < 10^{n} ,$$

possiamo affermare che X sara' formato da n cifre. Ad esempio se

$Y = 3\ 218\ 089$,

allora poiche'

$$100^{3} = 1\ 000\ 000 < 3\ 218\ 089 < 100\ 000\ 000 = 100^{4}$$

e' n = 4 e quindi sara' X formato da 4 cifre, cioe' compreso fra 10 000 e 99 999.

Un metodo pratico per trovare n , dato Y, e' quello di dividere Y in blocchi di due cifre a partire da destra. Nell'esempio sopra considerato, si ha

$$Y = 3\ 21\ 80\ 89 ,$$

cioe' quattro blocchi.

Se denotiamo rispettivamente con

$$y_1, y_2, .., y_n$$

il primo, il secondo, .., l'n-mo blocco, partendo da sinistra, di

Y (ogni blocco essendo formato da due cifre, con l'eventuale sola eccezione del primo, che puo' essere formato da una sola cifra), risulta

$$Y = y_1 \cdot 100^{n-1} + y_2 \cdot 100^{n-2} + .. + y_n .$$

Se invece denotiamo con x_i la i-ma cifra di X, a partire da sinistra, avremo

$$X = x_1 \cdot 10^{n-1} + x_2 \cdot 10^{n-2} + .. + x_n$$

ed X dovra' essere IL PIU' GRANDE INTERO per il quale

(1) $X^2 \leq Y$.

Quanto precede spiega la prima regola dell'algoritmo e getta le basi per capire tutte le regole successive.

Supponiamo inizialmente, per semplicita', che Y sia formato da due soli gruppetti, cioe' sia

$Y = y_1 \cdot 100 + y_2$.

La (1) diventa allora

$(x_1 \cdot 10 + x_2)^2 \leq y_1 \cdot 100 + y_2$

ovvero

(2) $x_1^2 \cdot 100 + (2 x_1 \cdot 10 + x_2) x_2 \leq y_1 \cdot 100 + y_2$.

Osservato che se x e' il piu' grande intero < 10, per il quale risulta

$$x_1^2 \leq y_1$$

si ha anche

$$x_1^2 \cdot 100 \leq Y < (x_1 + 1)^2 \cdot 100$$

(il Lettore e' invitato a spiegare questo passaggio) x_1 sara' la prima cifra a sinistra della radice cercata e la seconda regola dell'algoritmo e' spiegata.

Trovato x_1 , dalla (2) risulta

$$(3) \qquad (2\, x_1 \cdot 10 + x_2)\, x_2 \leq (y_1 - x_1^2) \cdot 100 + y_2 \, .$$

Si deve quindi cercare il piu' grande intero $x_2 < 10$, che verificala (3).

Per semplificare tale ricerca, osserviamo che 2 $x_1 * 10 * x_2$ e' minore del primo membro della (3) e quindi possiamo, in prima approssimazione, sostituire alla (3) la disuguaglianza piu' semplice

$$2\, x_1\, x_2 \cdot 10 \leq (y_1 - x_1^1) \cdot 100 + y_2$$

ovvero

$$(4) \qquad x_2 \leq [(y_1 - x_1^2) \cdot 100 + y_2] \,/\, 2x_1 \cdot 10.$$

Per fissare le idee, consideriamo ad esempio Y = 2 18. Risulta y =2, y =18, x =1 e , come e' noto, si ha la seguente schematizzazione :

$$\begin{array}{c|c} \sqrt{218} & 1 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \\ \cline{1-1} 118 & \end{array}$$

Ora la (4) esprime la ben nota regola: da

$$118 = (y_1 - x_1^2) \cdot 100 + y_2$$

si stacca l'ultima cifra , ottenendo 11 e si divide tale numero per 2 ($=2x_1$). Si otterra' il numero 5 che puo' essere l'x_2 cercato. Occorre pero'verificare che effettivamente valga la (3) . Si ha invece

$$(2x_1\cdot 10 + x_2)\, x_2 = 25\cdot 5 = 125 > 118.$$

questo significa che deve essere $x_2 < 5$ e quindi e' sensato provare con 4 . Facendo i conti si trova che

$$24\cdot 4 = 96 < 118$$

e quindi effettivamente x =4. Si ha quindi

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{218} & 14 \\ \cline{2-2} 1 & 24\cdot 4=96 \\ \cline{1-1} 118 & \\ 96 & \end{array}$$

Ora risulta $14^2=196$ mentre $15^2=225$, quindi $\sqrt{218}$ e' compreso fra 14 e 15.

Se ora supponiamo che Y sia formato da tre gruppetti, come nel caso del numero 2 18 37, la (1) diventa

$$(x_1\cdot 10^2+ x_2\cdot 10 + x_3)^2 \le y_1\cdot 100^2+ y_2\cdot 100 + y_3 .$$

ovvero

$$[(x_1\cdot 10 + x_2)\, 10 + x_3]^2 \le (y_1\cdot 100 + y_2)\, 100 + y_3.$$

La disuguaglianza precedente si puo' anche scrivere

$$(5) \qquad (x_1\cdot 10 + x_2)^2\, 100 + [2(x_1\cdot 10+x_2)\, 10 +x_3]\, x_3 \le$$
$$\le (y_1\cdot 100 +y_2)\, 100 + y_3 .$$

La (5) mostra che la ricerca della radice di un numero formato da tre gruppetti (cioe' compreso 10 000 e 999 999), consiste nel trovare prima x_1 ed x_2 massimi, che verifichino

$$(x_1 \cdot 10 + x_2)^2 \leq y_1 \cdot 100 + y_2$$

e quindi nel trovare la radice quadrata di y_1 100 + y_2 , e poi nel trovare la terza cifra x_3 in modo che valga la (5).
Osservato che la (5) e' dello stesso tipo della (2), e' chiaro che il procedimento puo' essere iterato.

A questo punto dovrebbe essere abbastanza chiaro come si procede in presenza di piu' di tre gruppetti e nel caso in cui si hanno e/o si vogliono cifre decimali. Per quest' ultimo caso, ad esempio, basta osservare che

$$2\ 18\ 37{,}898 = (2\ 18\ 37\ 89\ 80)\ 10^{-4}$$

e quindi

$$\sqrt{21837{,}898} = \sqrt{2\ 18\ 37\ 89\ 80} \cdot 10^{-2}.$$

A ben guardare tutto il discorso precedente potrebbe essere sintetizzato dicendo che la spiegazione dell'algoritmo della radice quadrata sta' nella formula

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab ,$$

ma potrebbe essere uno scherzo di cattivo gusto.

Viene spontaneo chiedersi : vista la difficolta' di giustificare tale algoritmo,e' proprio il caso di insegnarlo? Non ci sono algoritmi piu' facilmente giustificabili?

A parere del sottoscritto l'algoritmo di Erone potrebbe tranquillamente sostituire l'algoritmo precedente, almeno percio' che riguarda la giustificabilita'.

Diamo un cenno di tale algoritmo.

3. L' algoritmo di Erone.

Osserviamo innanzitutto che se X e' una approssimazione per difetto della radice di Y, cioe' risulta

$$X^2 \leq Y$$

si ha

$$X^2 Y \leq Y^2$$

e poi

$$Y \leq (Y/X)^2;$$

quindi Y/X e' una approssimazione per eccesso della radice di Y.

Del tutto analogamente si prova che, se invece X e' una ap prossimazione per eccesso, allora Y/X e' una approssimazione per difetto.

Ora l'idea dell'algoritmo e' molto semplice: se abbiamo due approssimazioni, una per difetto e l'altra per eccesso, possiamo ragionevolmente sperare che la loro media sia una approssimazione migliore.

Pertanto se X_0 e' una approssimazione della radice di Y, probabilmente

$$X_1 = (X_0 + Y/X_0)/2$$

sara' una approssimazione migliore. Vediamo di provarlo.

Intanto osserviamo che

$$X_1^2 - Y = (X_0^2 + (Y/X_0)^2 + 2Y)/4 - Y = (X_0^2 + (Y/X_0)^2 - 2Y)/4 =$$
$$= (x_0 - Y/X_0)^2 / 4 \geq 0.$$

Quindi indipendentemente dal tipo di approssimazione X_0, sicuramente X_1 sara' una approssimazione per eccesso della radice di Y. Per quanto detto sopra, Y/X_1 sara' una approssimazione per difetto. Questa situazione puo' essere illustrata sull'asse reale, come segue

```
-------------*------*---*------*------------------
           Y/X1   √Y   X2     X1
```

dove

$X_2 = (X_1 + Y/X_1)/ 2.$

Osserviamo che, se definiamo , al passo n+1,

(6) $X_{n+1} = (X_n + Y/X_n)/ 2$

otteniamo una successione X_n di approssimazioni per eccesso ed una Y/X_n di approssimazioni per difetto che , per costruzione , verificano le seguenti disuguaglianze.

(7) $Y/X_n \le Y/X_{n+1} \le \sqrt{Y} \le X_{n+1} \le X_n$.

Osserviamo inoltre che

(8) $X_{n+1} - \sqrt{Y} = (X_n - Y/X_n)/2 - \sqrt{Y} \le X_n/2 + \sqrt{Y}/2 - \sqrt{Y} =$
$= (X_n - \sqrt{Y})/2.$

Questo significa che ad ogni passo l'errore che si commette approssimando $\sqrt{Y}$ con X_n (o con Y/X_n), si dimezza e quindi il metodo e' molto rapido .

Dalla (8) si ricavano anche le disuguaglianze

(9) $X_n - \sqrt{Y} \le (X_1 - \sqrt{Y})/ 2^{n-1} \le | X_0 - Y/X_0 | / 2^n$

che legano l'errore al passo n, alla approssimazione iniziale e permettono di valutare il numero di passi necessario per ottenere il desiderato numero di cifre decimali esatte dopo la virgola. Se ad esempio si desiderano 5 cifre decimali, occorrera' scegliere n in modo tale che risunti

(10) $2^n \geq | X_0 - Y/X_0 | \cdot 10^5.$

In pratica l'esame e' molto piu' semplice , in quanto basta osservare, ad ogni passo, le cifre che si ripetono.

Diamo un ESEMPIO.

Vogliamo la radice di 2 con cinque cifre decimali esatte dopo la virgola.

Partiamo con $X_0 = 1$. Avremo $Y/X_0 = 2$ e $X_1 = 3/2 = 1{,}5$. Usando la (6) si ha la seguente tabella:

n	X_n	Y/X_n
1	1,5	1,33333
2	1,41666	1,41176
3	1,41421	1,41421

Si deduce ovviamente che non ha senso continuare. Si puo' osservare che, in generale, con tre passi si ottengono ben cinque cifre decimali, pur di partire con una approssimazione iniziale decente.

Per finire osserviamo che questo metodo, che si presta ad essere programmato con estrema facilita', e' solo un caso particolare del piu' generale metodo di NEWTON o DELLE TANGENTI per la ricerca della soluzione dell'equazione

(11) $f(x) = 0,$

quando f e' una funzione derivabile, con derivata f' continua, convessa in [a,b] . Se risulta ad esempio $f(a)<0$, $f(b)>0$ e $f'>0$ allora si prova che la successione

$$(12) \quad x_0 = b \ , \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

converge all'unica soluzione della (11).

Infatti il problema di trovare la radice quadrata di Y equivale a risolvere l'equazione (11) con

$$(13) \quad f(x) = x^2 - Y.$$

Poiche' $f'(x) = 2x$, la (12) diventa

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - Y) / 2x_n = (x_n^2 + Y) / 2x_n$$

e quindi si riottiene la (6).

La (12) puo' essere utilizzata, per esempio per estrarre la radice m-ma di un numero Y. In tal caso la

$$f(x) = x^m - Y, \ f'(x) = m \ x^{m-1}$$

ed il metodo diventa

$$(14) \qquad x_{n+1} = ((m-1)x_n + Y/x_n^{m-1}) / m \ .$$

Quindi insegnando il metodo di Erone si gettano le basi per qualcosa di molto piu' generale.

Lecce 25/10/89. Rivisto: 5/10/90

RIFLESSIONI SUL DILEMMA FINITO/INFINITO

Francesco Speranza

1. L'ANTICHITA'

In questo seminario non tenterò di esporre sistematicamente il problema: mi limiterò ad alcune osservazioni che possono risultare stimolanti, specialmemte quando fanno intravvedere che avremmo potuto seguire strade diverse nel dare risposte al dilemma finito/infinito.

Quasi sicuramente furono i filosofi greci i primi a concepire in modo razionale il dilemma. La parola "infinito" aveva, di fatto, significati diversi:

a] infinitamente numeroso,

b] infinitamente esteso,

c] illimitato, nel senso di "privo di confine",

d] infinitamente divisibile.

Fra questi significati vi sono alcune ovvie implicazioni (per esempio, se è vera b], è vera anche a]). Si osservi che il primo è invariante per biiezioni, il secondo per isometrie (e richiede quindi una struttura metrica), il terzo per trasformazioni topologiche (e richiede una struttura topologica). Questo spiega come mai gli antichi abbiano avuto qualche curiosa incertezza fra l'uno e l'altro significato: il pensare per strutture è una caratteristica della matematica di oggi. Si può attribuire a confusioni di questo tipo lo stupore suscitato - nei principianti, ancora oggi - da constatazioni come quella dell'equipotenza di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{Q}$.

Questi significati sfumano, in alcuni pensatori, verso altri più filosofici che matematici, per esempio "indeterminato", "non conoscibile con completezza" ([12], p. 15): essi sono espressi dal termine "απειρον", del quale è per noi difficile valutare la portata.

Nei tempi più antichi erano presenti entrambe le concezioni: "l'infinito esiste", "l'infinito non esiste". A favore della seconda sembra sia stato Parmenide: l'Essere è limitato, perché "se mancasse il limite tutto gli mancherebbe". D'altro canto Aristotele ci dice che "tutti quelli che hanno discusso l'argomento hanno considerato l'infinito principio delle cose ... Secondo i Pitagorici e Platone, l'infinito è una sostanza ... I fisici d'altra parte non considerano l'infinito come ... una sostanza, ma qualcosa che è continua per contatto. Questa l'opinione di Anassagora e di Democrito" [1].

I pitagorici, ci ricorda ancora Aristotele, nella dicotomia finito/infinito, ponevano quest'ultimo fra le entità con connotazione negativa, iniziando così una lunga tradizione.

Fra i paradossi di Zenone, alcuni sono tipicamente centrati sull'infinito: la "dicotomia" (se percorri un tratto, prima ne devi fare la metà, poi la metà della metà, ... all'infinito); la "freccia" (una freccia in ogni istante occupa una certa posizione, quindi in quell'istante è ferma: dunque è sempre ferma); l'"Achille"; la "pluralità" (se la realtà è molteplice, deve essere infinitamente piccola, perché composta da indivisibili senza grandezza; ma anche infinitamente grande, perché fra due parti ce ne deve essere una terza, e così via all'infinito).

Aristotele affronta il problema dell'infinito con il suo stile che ricorda un rullo compressore. Dopo avere rammentato cinque argomenti a favore della tesi dell'esistenza dell'infinito (per esempio, una grandezza o un numero possono sempre essere aumentati), si propone di demolirla, con argomenti che assomigliano molto a quelli di Don Ferrante nei "Promessi Sposi" (ovviamente questi conosceva bene i testi di Aristotele). Curiosa è l'argomentazione finale contro l'esistenza d'una realtà infinita composta di infiniti corpi di grandezza finita: in tal caso, dice Aristotele, avremmo infiniti luoghi senza un alto né un basso né alcun'altra direzione, nonché un infinito numero di differenti elementi, che sarebbero inconoscibili, "del che non c'è alcuna prova" [1]. Insomma, sarebbe violato il principio base della cosmologia aristotelica, un "cosmo" bene ordinato con un centro, e quindi con significato intrinseco per le parole "alto" e "basso".

La conclusione è un compromesso (fra le tesi dell'esistenza e della non esistenza) che possiamo dire geniale, e che deve aver soddisfatto Aristotele in quanto si inquadrava in una sua teoria generale. L'infinito non esiste "in atto", ma "in potenza", nel senso che, per esempio, dato un numero ve n'è sempre uno che lo supera ("una cosa viene da un'altra senza fine, e ciascuna di esse è finita, ma ve ne sono sempre di nuove"). Per le grandezze, invece, ce n'è (per ogni specie) una massima (il cosmo è finito), ma abbiamo un infinito per divisione (dato un segmento e una sua suddivisione, se ne può trovare una più fine).

La fisica di Aristotele ha dunque influenza sulla sua matematica.

Ma al tempo di Aristotele si era già sviluppata in modo organico e autonomo la matematica: ne abbiamo solo notizie indirette, ma sappiamo che il matematico Archita sosteneva l'infinità dello spazio dicendo: "arrivato al limite della sfera delle stelle fisse, posso spingere oltre una mano? E' assurdo che non lo possa fare, e se lo posso, al di fuori ci deve essere un corpo o lo spazio ..." [6]. Ma per Aristotele fuori del cosmo non c'è alcunché, neppure lo spazio vuoto, perché (come non c'è materia senza estensione) non c'è estensione senza materia. L'obiezione di Archita suonava un po', a parer mio, come il trucco degli scrittori di fantascienza che, per superare distanze interstellari, fanno uscire le astronavi nell'iperspazio.

In Euclide si può notare un compromesso fra la posizione democriteo-platonica e quella aristotelica. Una "retta" è quasi sempre "terminata", vale a dire è un segmento, ma è sempre prolungabile (postulato 2). Anzi, vi sono occasioni in cui si deve dire "indefinitamente prolungata" (come nella definizione di rette parallele, e più esplicitamente nel postulato 5). Euclide non parla mai della totalità dei punti d'una retta, e tanto meno dice che essa ha infiniti punti: si potrebbe dire che i punti appartengono a una retta "potenzialmente" (su una retta si possono prendere dei punti), ma non "in atto".

Si osservi che il 5^o libro degli *Elementi* di Euclide contiene la teoria, attribuita a Eudosso, delle proporzioni fra grandezze. Di fatto essa è equivalente alla teoria dei numeri reali: ma dal punto di vista sintattico essa evita di parlare di classi infinite (come sono le classi di Dedekind), anche se si fanno quantificazioni su $\mathbb{N}$.

L'impostazione della scienza greca tendeva a separare la matematica dalla fisica: la prima si poteva permettere delle astrazioni che per la seconda non avevano senso. Si spezzava l'armonia pitagorico-platonica fra mondo ideale e mondo fisico: Aristotele arrivava ad affermare che "la matematica non è lo stile delle scienze della natura". Il problema si presenta anche oggi, e la filosofia della scienza ha dovuto escogitare nuove spiegazioni.

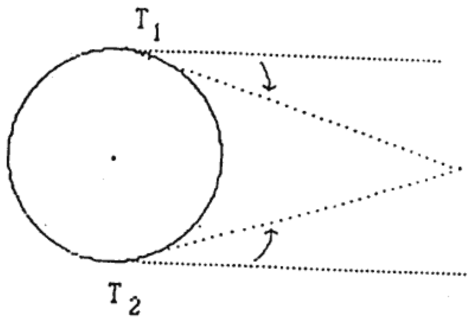
2. RINASCIMENTO ED ETA' MODERNA

Durante il Medioevo prevalse la concezione di un cosmo "finito, chiuso e gerarchicamente ordinato" (12), il cui significato è espresso dalle caratteristiche *qualitative* dei luoghi che lo compongono.

Una rivoluzione fu compiuta da Nicolas Krebs, detto Nicola Cusano, vescovo di Bressanone. L'universo non ha limiti (e quindi resterà sempre inconoscibile nella sua interezza per via razionale: è la "dotta ignoranza", titolo della sua opera principale). Qualunque punto può esserne considerato il centro, e quindi non vi sono luoghi più o meno nobili, né si possono distinguere moto e quiete assoluti. Giordano Bruno sostenne poi che l'universo è sostanzialmente omogeneo, popolato da infiniti astri, probabilmente centri di sistemi planetari.

A differenza di Cusano e di Bruno, i primi scienziati novatori non lo furono sul tema dell'infinità dello spazio. Copernico fu un rivoluzionario molto prudente: non abbandonò il principio che i movimenti degli astri fossero composizioni di movimenti circolari. Per lui l'universo ha la forma d'una sfera, anche se al di fuori di essa c'è pur sempre spazio. Per quanto concerne le misure astronomiche, sappiamo che Aristarco aveva escogitato dei metodi (concettualmente validi) per valutarne alcune, e con qualche considerazione piuttosto approssimativa si era arrivati a stimare in 2000 raggi terrestri l'ordine di grandezza dell'universo. Copernico si trovò di fronte a un'obiezione.

Nell'ambito del sistema solare, le teorie tolemaica e copernicana sono modelli cinematicamente equivalenti, nel senso che sono traducibili l'uno nell'altro. Ci si può tuttavia chiedere



che cosa vedrebbe un osservatore posto su una stella (così come Galileo vide al telescopio i "pianeti medicei" ruotare intorno a Giove). Secondo il sistema eliocentrico, una stella si dovrebbe vedere dalla Terra, quando questa si trova in punti opposti dell'orbita terrestre, in posizioni diverse sulla volta celeste (la differenza è la cosiddetta parallasse). Ebbene, a Copernico si poteva muovere l'obiezione che nessuna parallasse era stata osservata: egli fu portato così a dover ammettere che il cosmo fosse migliaia di volte più grande di quanto normalmente si pensasse, di modo che non si osservavano le parallassi (in effetti, la prima fu riscontrata solo nel 1838, ed era inferiore a 1").

Galileo, sull'infinità dell'universo, ha una posizione prudente e metodologicamente corretta: "Né voi né alcun altro ha mai provato che il mondo è finito ... o infinito ..." (12), e in un altro passo, dopo aver riconosciuto che vi sono "argute ragioni" in favore dell'una e dell'altra tesi, dichiara di propendere per l'infinitezza proprio a ragione della sua incomprensibilità.

Ma veniamo ad alcune di queste "ragioni". Vediamo quelle di Keplero. Egli osserva che (11) a] Le maggiori grandezze apparenti delle stelle sono dell'ordine di 1' (noi vediamo secondo ampiezze angolari!)

b] vi sono coppie di tali stelle che distano apparentemente di circa 83'.

Un osservatore posto nelle vicinanze d'una di esse vedrebbe l'altra circa 80 volte più grandi di quanto le vediamo noi, cioè con un diametro apparente triplo di quello del Sole. Il cielo, visto dalle altre stelle, apparirebbe quindi popolato da stelle molto più grandi di quelle che vediamo noi.

Il sistema solare si trova quindi, per così dire, entro una cavità vuota di stelle. e c'è un buon motivo per ritenere che si trovi proprio al centro. Quella che i Greci dicevano "via Lattea" e i medioevali "via di San Giacomo" (collegandola ai pellegrinaggi a San Giacomo de Compostela) appare più o meno la stessa in tutte le direzioni.

Alle argomentazioni di Keplero si poteva obiettare che una delle stelle "grandi" potrebbe essere molto più distante dell'altra che vista da noi le sembra vicina. Ma allora dovrebbe essere molto più grande anche nella realtà: ci sarebbero quindi stelle sempre più grandi via via che ci allontaniamo, e il luogo del sistema solare sarebbe sempre "speciale".

Purtroppo per Keplero, la premessa a] è sbagliata: i primi telescopi (e poi anche quelli più potenti) non hanno fatto aumentare la grandezza apparente delle stelle, perciò qualunque valutazione di questa è inattendibile.

Keplero si pone anche due domande:

" Non potrebbe qualcuna delle stelle visibili distare da noi di un intervallo infinito?"

La risposta negativa è abbastanza semplice: il diametro della stella dovrebbe essere infinito, e questo è impossibile per ragioni di principio.

La domanda stessa è sorprendente: quando noi diciamo che una retta è illimitata, non intendiamo dire che esistano punti a distanza infinita! La nostra illimitatezza è, rispetto a quella sottintesa dalla domanda di Keplero, potenziale, anche se va oltre quella di Euclide.

"E se vi fossero stelle di grandezza finita sparse su spazi infiniti e quindi da un certo punto in poi invisibili?"

Delle ragioni che Keplero dà per sostenere la risposta negativa, una è di carattere epistemologico: "se non si vedono, non riguardano l'astronomia". Un'altra fa sentire come pesasse ancora la tradizione aristotelica: " se la regione delle stelle fisse è limitata verso il basso, verso (la cavità che contiene) il nostro mondo, perché non dovrebbe essere limitata verso l'alto?" [11]

"L'"alto" e il "basso" aristotelici giocano ancora un ruolo essenziale: eppure Keplero è stato il rivoluzionario che ha osato abbandonare il principio della circolarità dei movimenti celesti.

La terza ragione è piuttosto singolare: tutte assieme, le stelle costituirebbero un corpo infinito (anche come materia): ma ciò che è infinito manca di limite, e quindi anche di dimensioni (riecco l'απειρου!)

3. IL GRANDE MOMENTO DELLA "NUOVA SCIENZA"

Come si vede, in quei secoli l'infinito interessava soprattutto in quanto "illimitato", e in particolare applicato alla realtà fisica: Tuttavia, per Newton lo spazio e il tempo "veri" sono quelli "matematici" e assoluti.

Cartesio, Newton e Leibniz sono per un universo infinitamente esteso, il metodo cartesiano, facendo corrispondere numeri e punti d'una retta, tende a far pensare analoghi, e cioè infiniti, i loro insiemi. Leibniz inoltre si dichiara convinto che l'infinito, in particolare quello per divisione, esiste in atto (concordemente con la sua teoria delle monadi: la realtà non solo divisibile all'infinito, ma è effettivamente divisa).

Intorno al 1830, mentre l'astronomia mieteva successi grazie ai metodi newtoniani, Wilhelm Olbers sviluppò un'argomentazione "di plausibilità" nello stile di quella di Keplero.

A quell'epoca si riteneva ragionevole supporre che le stelle fossero distribuite abbastanza uniformemente nell'universo. Oggi si sa che sono raggruppate in galassie, basta allora sostituire "galassie" a "stelle". Immaginiamo una successione di superfici sferiche, di raggio R, 2R, 3R, ..., con centro nella Terra. il volume compreso fra l' n-esima e l' (n+1)-sima superficie è $\frac{4}{3} \pi [(n+1)^3R^3 - n^3R^3]$ cioè $\frac{4}{3} \pi [3n^2 + 3n +1]R^3$.

In base all'ipotesi di uniformità della distribuzione, il numero delle stelle comprese nello strato è proporzionale a $3n^2 + 3n + 1$, cioè, per n grande, approssimativamente al quadrato di n. Possiamo ammettere che in ogni strato la luminosità delle stelle sia statisticamente la stessa, e quindi che anch'essa sia proporzionale al quadrato della distanza. Ma la luce che arriva a noi viene ridotta proporzionalmente al quadrato della distanza, e quindi da ogni strato ci arriva all'incirca la stessa quantità di luce: gli strati sono infiniti, e quindi ci arriva infinita luce (e infinito calore). Per nostra fortuna, quasto non accade! (Ma che cosa avrebbe detto un novello Parmenide?)

Dobbiamo cercare eventuali ipotesi nascoste. Quella dell'uniforme distribuzione si potrebbe appoggiare al "principio di ragion sufficiente": non si vede un motivo perché la distribuzione non sia uniforme. Inoltre, già al tempo di Olbers si sapeva che la luce ha velocità finita, e poiché nell'argomentazione si ammette che ci arrivi luce da ogni strato, si ammette anche che ci arrivi luce da tempi arbitrariamente lontani. Basta supporre che l'universo esista da un tempo finito, per sciogliere il paradosso.

Se l'universo fosse finito, il volume dell'n-esimo strato non sarebbe più proporzionale a n^2. anzi, da un certo livello in poi il volume dello strato diminuirebbe. Però la luce circolerebbe più volte nell'universo ...

4. QUALCHE PRECISAZIONE METODOLOGICA

Abbiamo visto alcune argomentazioni, basate su certe ipotesi. un'ipotesi, una teoria possono essere sottoposte a controllo: si parla di "verifica" quando il risultato è positivo: la parola può tuttavia indurre in errore, perché, salvo in situazioni molto speciali, non è possibile controllare tutti i casi. E' invece corretto parlare di falsificazione, perché un solo caso negativo *dovrebbe* confutare l'ipotesi.

Ebbene, l'affermazione che qualcosa è infinitamente esteso è inverificabile, o meglio incontrollabile. Non possiamo constatare che ci sono punti oltre ogni limite, o che qualcosa può essere divisa al di là di qualsiasi divisione già realizzata.

Corrispettivamente, la finitezza dell'universo, e l'atomismo (il fatto che la materia sia divisibile solo fino a un certo livello) sono infalsificabili. Anche se non abbiamo trovato limiti (all'estensione o alla suddivisibilità), con un ulteriore passo potremmo toccare questi limiti.

Fin qui abbiamo parlato di ipotesi prese isolatamente. Di solito le troveremo inserite in una teoria più complessa, per cui l'alternativa finito/infinito potrà rispecchiarsi in un'alternativa fra due possibilità di tipo diverso, e sottoponibili a controllo (almeno una delle due). Per esempio, nella teoria della relatività generale, lo spazio risulterebbe limitato se la somma delle masse fosse superiore a una certa soglia, e viceversa. Ma la falsificazione di una conseguenza dell'ipotesi non comporta automaticamente la falsificazione dell'ipotesi, perché la conseguenza è ottenuta nell'ambito di una teoria, e potrebbe essere falsa un'altra ipotesi implicita nella teoria.

Non abbiamo esperienza diretta dell'infinito, in qualunque sua accezione: come mai parliamo di infinito? Si tratta di una estrapolazione, per usare un termine matematico. Ci accorgiamo che a uno degli insiemi che usiamo comunemente possiamo aggiungere un nuovo elemento; generalizziamo il fatto, e diciamo che un numero ha sempre un successivo. Vediamo che un segno sulla carta si può prolungare: idealizzando e generalizzando, diciamo che un segmento si può prolungare, anzi addirittura che esiste la "chiusura" di tutti questi prolungamenti, una retta.

5. L'INFINITO MATEMATICO

Galileo si interessò al problema dell'infinito da diversi punti di vista. Uno è ben noto: associamo a ogni numero naturale il suo quadrato, otteniamo una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei naturali e quallo dei quadrati, che ne è una parte propria: abbiamo un esempio di "parte che è uguale al tutto": Galileo osserva che questa difficoltà proviene dall'applicare all'infinito gli stessi attributi del finito.

Meno nota è l'argomentazione delle "ruote". Prendiamo un poligono regolare e una retta *r* che contiene uno dei suoi lati. immaginiamo di farlo "rotolare" lungo la *r*. Prendiamo un poligono omotetico, con lo stesso centro, più piccolo, e sia *s* la retta del lato parallelo a *r*. Nel rotolamento, i lati del poligono minore si vanno a sovrapporre ad alcuni segmenti di *s*, intervallati da tratti "non tocchi". Aumentando il numero dei lati del poligono, diventano più piccoli sia questi che quelli. Prendiamo due circonferenze concentriche, "che son poligoni di lati infiniti" (affermazione impensabile nella tradizione euclidea, anche se qualche greco l'aveva fatta) accade una cosa inaspettata: ogni punto della *s* viene toccato dal rotolamento della circonferenza minore. Noi spieghiamo questo fatto dicendo che questa slitta su *s*, vale a dire che il punto di contatto ha velocità istantanea non nulla: neghiamo di fatto che qui si possa applicare il "principio di continuità" (quello che accade per ogni valore di *n* deve accadere anche per *n* tendente all'infinito).

Galileo, per salvare il principio, fa un'ardita ipotesi: "la linea passata dagl'infiniti lati del cerchio grande ... esser pareggiata in lunghezza dalla linea passata dagl'infiniti lati del minore, ma da questi con l'interposizione d'altrettanti vacui tra essi" [9].

Bonaventura Cavalieri, che si considerava discepolo di Galileo, basò il suo metodo degli indivisibili su "tutte le sezioni" d'una figura, ottenute con un sistema di rette o (se del caso) di piani paralleli. I critici del metodo, per esempio Guldino, non tardarono a trovare paradossi in applicazioni appena un po' generalizzate: per esempio, due triangoli di uguale altezza e basi diverse si possono ripartire in infiniti segmenti a due a due "uguali", e allora i triangoli sarebbero "uguali" (per area).

Il Settecento è pieno di veri e propri giochi dei matematici sull'infinito, dei quali non si sa se ammirare o deplorare la spregiudicatezza. Tutto dipende, in fondo, dal successo del "gioco". Come esempio d'un gioco cui ha arriso il successo, citiamo un'argomentazione di Eulero:

Sappiamo che $\sin x = 0$ se e solo se x è un multiplo intero relativo di π . Si ha allora che $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = 0$ (che vale $\frac{\sin x}{x}$) se e solo se x è un multiplo non nullo di π.

Per analogia con un'equazione algebrica di cui si conoscono le radici

$$\frac{\sin x}{x} = (1 - \frac{x}{\pi})(1 + \frac{x}{\pi})(1 - \frac{x}{2\pi})(1 + \frac{x}{2\pi}) \ldots ,$$

e, trasformando il prodotto infinito in una serie,

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = 1 + x^2 (- \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \ldots) + \ldots$$

Uguagliando termine a termine, la prima uguaglianza dà

$$\frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots \quad \text{(risultato corretto!)}$$

Come esempio di gioco senza successo possiamo citare la "serie di Grandi" $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$: se S è la sua somma, allora si può (!) scrivere

$S = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$,

ma anche

$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1$,

o ancora

$S = 1 - (1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - S$, da cui $S = \frac{1}{2}$

Oggi è fin troppo facile sorridere di queste speculazioni: invece, bisogna rifarsi allo spirito non formalista dell'epoca, influenzata dalla filosofia platonica, per cui S "deve esistere", in qualche modo, e allora si tratterebbe solamente di trovare un modo per calcolarla; ma ...

Nell'Ottocento, con il programma di rigorizzazione dell'analisi, si ripresenta il problema dell'infinito. Fino ad allora, l'"infinito" era uno solo (come si potrebbe aumentare qualcosa che è oltre ogni limite?): Bernhard Bolzano per primo concepì l'idea di infiniti far loro diversi, senza però (almeno, a quanto ci risulta) riuscire a indicarli.

Si potrebbe dire che fino a Bolzano matematici e filosofi guardarono all'infinito stando nel finito, o facendo al più rapide scorribande: Bolzano pose le tende al di là del limite, ma fu Georg Cantor che pose il dominio della matematica sull'infinito attuale. Infatti a lui si deve il riconoscimento dei diversi cardinali e ordinali transfiniti, stabilendo anzitutto l'equipotenza di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{Q}$, e la non equipotenza di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{R}$.

Per la maggior parte dei matematici, i numeri transfiniti sono indiscussi "abitanti" del "mondo 3" popperiano (il mondo delle teorie). Non così per gli intuizionisti, che non riconoscono la legittimità di un discorso che coinvolga totalità che vanno oltre quelle numerabili. per esempio, ritengono che sia lecito prendere in considerazione solo quei numeri irrazionali che si possono definire in modo esplicito (per esempio, e). E' noto che la cardinalità dell'insieme di questi numeri non può superare quella di $\mathbb{N}$(cardinalità delle frasi possibili con un linguaggio ad alfabeto finito); quindi "la maggior parte" dei numeri reali resterà sempre inesprimibile con i mezzi usuali (alcuni hanno voluto considerare paradossale questo fatto).

Non ci soffermeremo (poiché sono ben note) sulle gustose stranezze che si hanno generalizzando all'infinito fatti propri del finito, come per esempio l'"albergo di Hilbert" [14].

6. BELLEZZA DEL FINITO

In quest'ultimo paragrafo mi limiterò ad alcune considerazioni sul "finito" nel significato a], senza entrare nella problematica delle varie definizioni possibili. Osservo anzi che a volte si distinguono, fra gli insiemi finiti, quelli "molto grandi", così grandi che a essi in pratica può convenire applicare metodologie dell'infinito (per esempio, si può così giustificare il fatto che che configurazioni considerate finite dalla Fisica e dalla Chimica - per esempio, gli atomi contenuti in un oggetto fisico -vengano studiate con strumenti di Matematica infinitaria, per esempio la geometria euclidea o l'analisi infinitesimale). Per quanto la distinzione può avere senso, si parlerò qui del finito "piccolo".

La Matematica classica (diciamo, quella precedente alla "liberazione" dai riferimenti concreti) studia insiemi infiniti ($\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, gli spazi delle geometrie classiche,...), pur senza affrontare esplicitamente il problema dell'infinito. E' curioso che in molte trattazioni di geometria elementare si metta fra i primi assiomi che "una retta (o lo spazio) ha infiniti punti" (quando a studenti universitari ho chiesto di dirmi un assioma della geometria, spesso mi hanno indicato questo): affermazione estranea allo spirito della geometria euclidea e inutile per la dimostrazione degli usuali teoremi.

La "Matematica moderna" cerca invece, solitamente, di non caricare subito le trattazioni con sistemi di assiomi (che pretendono di essere) completi, lasciando quindi la possibilità di specie di strutture più ampie, in quanto vincolate da un sistema di assiomi più ridotto. Così si ottengono gli spazi proiettivi e affini finiti, gli spazi topologici finiti, le aritmetiche modulari, eccetera. In alcuni casi queste strutture hanno trovato applicazioni " concrete ", vorrei qui fare l'elogio di tutte, anche di quelle che (per ora) non l'hanno trovate.

Quando un modello di assiomi ammette un modello finito, la coerenza è assicurata. In questo modo ci assicuriamo della coerenza di molte teorie significative della Matematica moderna (per esempio, le geometrie - proiettiva o affine - grafiche, la teoria dei gruppi, la topologia generale). Comunque, una configurazione finita si può analizzare pezzo per pezzo, si possono fare su di essa affermazioni sicure: queste possono essere congetture relative alla possibilità di dimostrare teoremi nella teoria stessa.

Prendiamo per esempio la geometria affine piana. Si ammettono gli assiomi

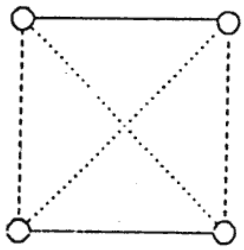
"Dati due punti, esiste una sola retta alla quale essi appartengono"

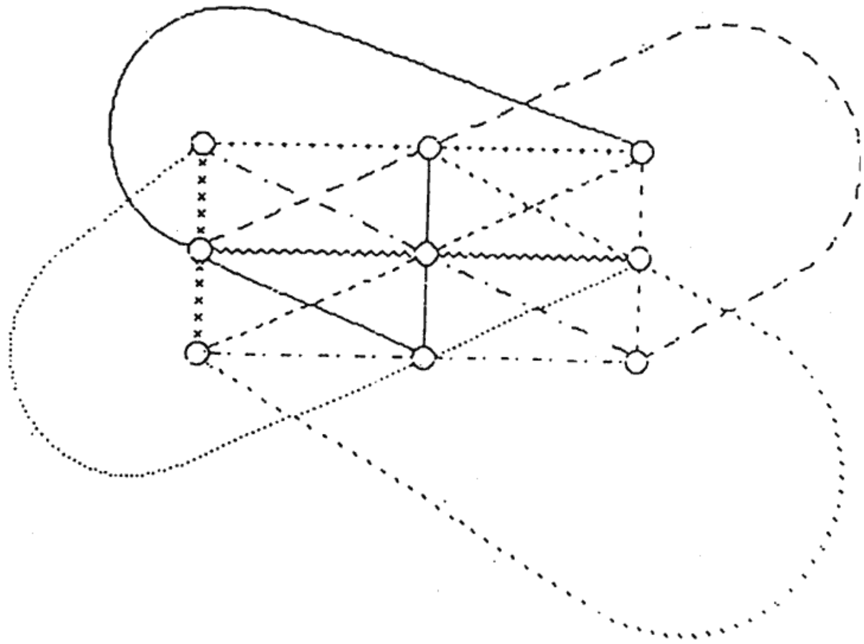
" Dati una retta r e un punto P che non le appartiene, esiste una sola retta cui P appartiene e disgiunta da r".

Si constata che la configurazione formata da n punti appartenenti alla stessa retta è un modello di questi assiomi, altrettanto si può dire di quella formata da n punti allineati e dalle rispettive rette singoletto. Per evitare questi modelli, si può introdurre un altro assioma

"Esistono almeno tre punti non allineati".

Ecco due modelli di questi assiomi





(i circoletti sono i "punti", una linea congiungente più circoletti è una "retta" alla quale quei "punti" appartengono).

In questi "mondi possibili" sono *vere* le affermazioni:

"due rette hanno lo stesso numero di punti"

"se una retta ha n punti, il piano ne ha n^2"

"presi due punti, esiste una traslazione che porta il primo nel secondo" (una traslazione è una biiezione che trasforma una retta in sé o in una parallela, e tale che le rette congiungenti punti corrispondenti sono parallele).

Le prime due congetture sono dimostrabili nella teoria, mentre la terza non lo è (come si prova esibendo un modello che non la soddisfa).

Le configurazioni finite sono dunque particolarmente "utili" per capire la distinzione tra fase sintattica e fase semantica, e fra teoria e metateoria. Sono anche significative per stabilire un contatto fra il quasi-empirismo (secondo il quale una teoria formale deve avere la sua base in una teoria informale, e trovare la sua significatività in questa (13)) e il formalismo (inteso nel senso originario di Hilbert: programma che si propone di dare veste formale alle teorie matematiche, per fondarle in modo coerente).

BIBLIOGRAFIA

[1] H.G. APOSTLE, Aristotle's Philosophy of Mathematics, University of Chicago Press, Chicago 1952

[2] G.ARRIGO, B.D'AMORE, Infiniti, in corso di pubbl.

[3] F. ARZARELLO, Matematica dell'infinito, CLU, Torino 1980

[4] B. BOLZANO, Paradoxien des Unendlichen, Elbert, Leipzig 1851

[5] G. CANTOR, Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Berlin 1932

[6] F.M. CORNFORD, Invention of space, in "Essays in Honor of Gilbert Murray", Allen and Unwin, London 1936

[7] F. ENRIQUES, Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, Stock-Zanichelli, Roma-Bologna 1925-1935

[8] F. ENRIQUES, G. DE SANTILLANA, Compendio di storia del pensiero scientifico, Zanichelli, Bologna 1936

[9] G. GALILEI, Discorsi e dimostrazioni sopra due nuove scienze,in "Opere", Ed. Naz., v. 8, Barbera, Firenze 1933

[10] D. HILBERT, Ueber das Unendliche, Mat. Ann., 95, 161-190 (trad. ital. in "Ricerche sui fondamenti della Matematica", Bibliopolis, Napoli)

[11] J. KEPLER, Epitome astronomiae Copernicanae, I, in "Opera

omnia", Frisch, Frankfurt - Erlangen 1959

[12] A. KOYRE', From the closed world to the infinite universe, J. Hopkins Press, Baltimore 1957 (trad. ital. Dal mondo chiuso all'universo infinito , Feltrinelli, Milano)

[13] I. LAKATOS, A renaissance of empiricism in the philosophy of mathematics? in "Mathematics, science, epistemology", Cambridge University Press, Cambridge 1978

[14] C.MARCHINI, Difficoltà del concetto di finito in teoria degli insiemi, in corso di pubbl.

[15] R.RUCKER, Infinity and the mind, Birkhauser, Basel 1982 (trad. ital. in corso di pubbl.)

Codici correttori di errori

Mauro Biliotti

La teoria dei codici correttori di errori nasce in risposta al problema pratico di realizzare la trasmissione di informazioni, codificate in forma digitale, in maniera tale che eventuali errori che dovessero alterare il messaggio durante la trasmissione possano essere scoperti e corretti in fase di ricezione.

In generale un messaggio puo' essere riguardato come una sequenza di blocchi di simboli. Ciascun blocco e' costituito da una sequenza finita di simboli 0 e 1. Una sequenza finita di simboli 0 e 1 e' detta *parola*. Per comodita', spesso si suppone che ogni parola abbia la stessa lunghezza n (riguardata come sequenza).

Un *codice* (di lunghezza n) e' un insieme di parole (di lunghezza n).

Si puo' pensare alle parole del codice come alle sequenze di simboli 0 e 1 che hanno un "significato" nel linguaggio considerato. Un messaggio e' una sequenza di parole del codice. Per poter assolvere al compito di correggere gli errori intervenuti nella trasmissione di alcune parole, il codice usato deve avere particolari proprieta', come vedremo nel seguito.

Iniziamo con un esempio. Supponiamo di usare parole di lunghezza $n = 4$. Con i simboli 0 e 1 si possono costruire $2^4 = 16$ sequenze distinte di 4 elementi, quindi 16 parole distinte. Un codice di lunghezza 4 che consista di tutte le 16 parole di lunghezza 4 non permette alcuna correzione di errori. Infatti qualsiasi sequenza di 4 simboli 0 e 1 ricevuta risultera' una parola del codice e sara' impossibile sapere se la parola originariamente trasmessa era quella ricevuta, oppure un'altra.

Supponiamo che 16 sia il numero di parole che occorrono per compilare i vari messaggi, ossia che il codice debba consistere di 16 parole, ma che si voglia cercare di eliminare l'inconveniente appena riscontrato. L'idea e' di aggiungere una specifica coda, ad esempio di *3* digits, a ciascuna delle *16* parole di *4* digits, facendole cosi' diventare sequenze di lunghezza *7*. Ad esempio la parola:

$$1\ 0\ 0\ 1$$

potrebbe diventare

$$1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1$$

In tal modo, fra tutte le $2^7 = 128$ sequenze di lunghezza *7*, solo *16* saranno *parole del codice* e quindi riconoscibili fra le altre.

Un processo di comunicazione e' illustrato nella Tab. A.

Si potrebbe dire che, in linea teorica, il principale problema della teoria dei codici consista nello studiare i metodi per aggiungere code il piu' corte possibile, le quali consentano di correggere piu' errori possibile. In pratica, ragioni di semplicita' di codifica e di decodifica possono essere prevalenti nella scelta di un determinato codice.

L'idea di definire una distanza fra le parole.

Siano

$$\underline{u} = (a_1,\dots,a_n) \qquad a_i \in \{0,1\}$$
$$\underline{v} = (b_1,\dots,b_n) \qquad b_i \in \{0,1\}\ .$$

Definiamo la *distanza di Hamming* $d(\underline{u},\underline{v})$ fra $\underline{u}$ e $\underline{v}$ nel modo seguente:

$d(\underline{u},\underline{v})$ *e' uguale al numero delle posizioni* i *nelle quali* $a_i \neq b_i$.

E' facile verificare che:

(1) $d(\underline{u},\underline{u}) = 0$

(2) $d(\underline{u},\underline{v}) = d(\underline{v},\underline{u})$

(3) $d(\underline{u},\underline{v}) + d(\underline{v},\underline{z}) \geq d(\underline{u},\underline{z})$.

Nell'insieme di tutte le parole di lunghezza *n* possiamo definire delle "sfere" di dato centro $\underline{u}$ e dato raggio *r* sfruttando la distanza introdotta. Precisamente:

$$S_r(\underline{u}) = \{ \underline{v} : d(\underline{u},\underline{v}) \leq r \}.$$

Supponiamo di scegliere un insieme C di parole di lunghezza *n* tali che le sfere di centro una parola in C e raggio *r* siano a due a due disgiunte, come nella Tab. B. Se nel trasmettere una parola $\underline{u}$ di C si commette un numero di errori $\leq r$, si riceve una parola $\underline{v}$ che cade dentro una sfera (e una sola), precisamente quella di centro $\underline{u}$. Decodificando $\underline{v}$ come la parola $\underline{u}$ centro di tale sfera si ritrova quindi la parola originariamente trasmessa. *E' stato cosi' corretto automaticamente l'errore di trasmissione.*

Per capire quale sia il massimo numero di errori che un dato codice C puo' correggere, occorre determinare il massimo fra i numeri *r*, tali che le sfere con centro una parola di C e raggio *r* siano a due a due disgiunte. Si indichi tale massimo con *t*. Si procede nel modo seguente:

- per ogni coppia di parole distinte di C se ne calcola la distanza e fra tutte le distanze cosi' ottenute si prende la minore (vi possono essere coppie di parole che hanno la stessa distanza, ovviamente). Tale distanza si chiama *minima distanza del codice* C e si indica generalmente con *d*.

E' un facile esercizio provare che $t = [(d-1)/2]$ ove con $[(d-1)/2]$ si denota il massimo intero $\leq (d-1)/2$ ($(d-1)/2$ se *d* e' dispari e $(d-2)/2$ se *d* e' pari).

L'idea di utilizzare i gruppi (o gli spazi vettoriali).

Indichiamo con V l'insieme di tutte le parole di lunghezza *n*. In V posso introdurre l'operazione di somma fra parole. Se

$$\underline{u} = (a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n) \qquad a_i \in \{0,1\}$$
$$\underline{v} = (b_1,\ldots,b_i,\ldots,b_n) \qquad b_i \in \{0,1\}$$

si definisce

$$\underline{u} + \underline{v} = (a_1 + b_1,\ldots,a_i + b_i,\ldots,a_n + b_n)$$

ove la somma $a_i + b_i$, $i = 1,\ldots,n$, e' fatta modulo 2.

Ad esempio, se $\underline{u} = (1,0,0,1)$ e $\underline{v} = (1,1,0,1)$ e'

$$\underline{u} + \underline{v} = (0,1,0,0)$$

Invece di prendere come codice un qualsiasi sottoinsieme di V e' piu' conveniente (ne vedremo il motivo) prendere un sottoinsieme C di V che rispetto alla operazione sopra definita risulti *un gruppo* o, come si usa dire usualmente, un *codice lineare*.

Data una parola $\underline{u}$ di V definiamo *peso* di $\underline{u} = (a_1,\dots,a_i,\dots,a_n)$ (il peso di $\underline{u}$ si denota con $wt(\underline{u})$, ove wt e' abbreviazione della parola inglese weight, peso) il numero delle posizioni i tali che $a_i = 1$. Dato un codice C, sottoinsieme di V, definiamo il *minimo peso* di C come il minimo dei pesi delle parole non nulle di C. Ebbene, *se C e' un codice lineare allora minimo peso e minima distanza in C coincidono.*

Vedere cio' e' molto semplice. Infatti date due qualunque parole $\underline{u}$ e $\underline{v}$ in V e' $d(\underline{u},\underline{v}) = wt(\underline{u}-\underline{v})$ (la dimostrazione e' un esercizio). Se il codice C e' lineare, cioe' un sottogruppo di C, quando $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono in C, anche $\underline{u}-\underline{v}$ e' in C e quindi l'insieme delle distanze fra tutte le possibili coppie di parole di C coincide con l'insieme dei pesi di tutte le parole di C. Ovviamente anche i minimi dei due insiemi coincidono e quindi minimo peso e minima distanza di C coincidono.

Quale e' il vantaggio?. Supponiamo ad esempio che il codice C abbia 2^{10} parole. Tutte le possibili coppie di parole di C sono allora 2^{20} e quindi per calcolare la minima distanza di C occorre fare 2^{20} prove, ma per calcolare il minimo peso di C bastano 2^{10} prove!.

Come si puo' costruire un codice lineare?. L'idea piu' semplice consiste nel fissare in V un certo insieme B di parole a due a due distinte e tali che nessuna parola di B possa ottenersi come somma di altre parole di B. Le parole di C sono la parola nulla, tutte le parole di B e tutte le possibili somme di due o piu' parole di B. E' facile verificare che il codice C cosi' ottenuto e' lineare. Non e' neppure difficile provare che se B e' costituito da *k* parole, C e' costituito da 2^k parole.

Le parole di B, elencate in colonna, costituiscono una matrice, denotata spesso in letteratura con la lettera G, la quale prende in nome di *matrice dei generatori* del codice. Un esempio, che riporta un codice famoso, e' nella Tab. C (si noti che *7* indica la lunghezza delle parole, mentre *4* indica il numero delle parole che generano il codice, cioe' la cardinalita' di B).

Un altro vantaggio dell'uso dei codici lineari si ha in fase di decodifica. Ne accenneremo brevemente.

Supponiamo di costruire una tabella nel modo seguente:

- Nella prima riga poniamo in sequenza le parole del codice con la sola condizione che al primo posto vi sia la parola nulla ($\underline{0} = (0,\dots,0)$).
- Fra le parole di V non in C scegliamone una di peso minimo, sia essa $\underline{e}_1$, e creiamo la seconda riga della tabella sommando $\underline{e}_1$ a ciascuna delle parole della prima riga. Per intendersi, se in una certa posizione della prima riga si trova la parola $\underline{u}$, nella seconda riga nella stessa posizione di $\underline{u}$ (cioe' sotto $\underline{u}$) scriveremo $\underline{u} + \underline{e}_1$.
- Fra le parole di V che non compaiono nelle prime due righe scegliamone una di peso minimo, sia essa $\underline{e}_2$, e creiamo la terza riga della tabella sommando $\underline{e}_2$ a ciascuna delle parole della prima riga.
- Iteriamo il procedimento fino ad aver esaurito tutte le parole di V.

Un esempio e' fornito nella Tab. D.

La tabella appena costruita prende il nome di *tabella standard* del codice.

Nella tabella standard ogni parola di V compare una ed una sola volta. Infatti, per chi ha un minimo di confidenza con la teoria dei gruppi, le righe della tabella standard altro non sono che i laterali di C in V.

Gli elementi $\underline{e}_i$ della prima colonna della tabella standard prendono il nome di *leaders di laterale*. Si noti che il leader di laterale $\underline{e}_i$ altro non e' che l'errore, ossia la differenza, fra la parola che si trova in una data posizione nella riga i-esima e la parola del codice che sta ad essa in testa nella prima riga.

Si puo' provare che se un codice lineare C e' capace di correggere *t* errori una riga che contenga una parola di V di peso *s* con $s \leq t$ non ne contiene altre di peso $\leq t$ e quindi tale parola e' leader di laterale in quella riga.

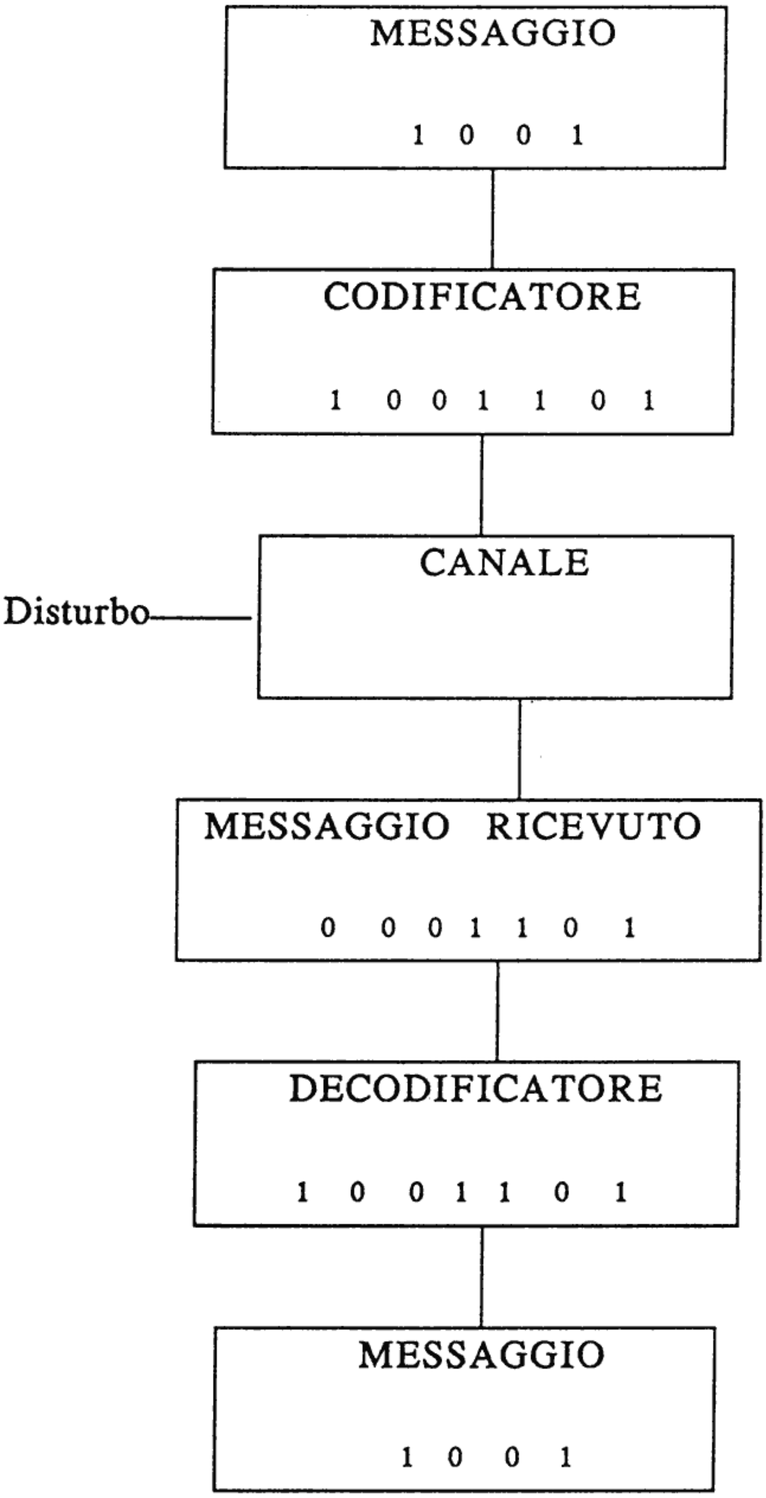
Quando si riceve una parola $\underline{v}$, tale parola puo' essere univocamente individuata nella tabella standard. Se, per caso, nella trasmissione sono stati incorporati piu' di *t* errori, ossia si e' ecceduta la capacita' di correzione del codice, non e' possibile ricostruire la parola originariamente trasmessa, ma se non sono intervenuti piu' di *t* errori la parola $\underline{v}$ cadra' necessariamente in una riga il cui leader $\underline{e}_i$ ha peso $\leq t$ e bastera' allora sottrarre $\underline{e}_i$ a $\underline{v}$ per ottenere la parola $\underline{u}$ originariamente trasmessa. In effetti, per come e' costruita la tabella standard, $\underline{u}$ e' la parola che sta in testa alla colonna in cui si trova $\underline{v}$. Si comprende come cio' sia utile per una decodifica automatica mediante un apposito apparato.

Il metodo di decodifica mediante tabella standard ha il grosso difetto di dover mettere tutte le parole di V nella memoria della macchina. In effetti sono stati elaborati sistemi di decodifica molto piu' economici e veloci, la cui trattazione esula dai limiti di questa elementare introduzione.

Un'osservazione.

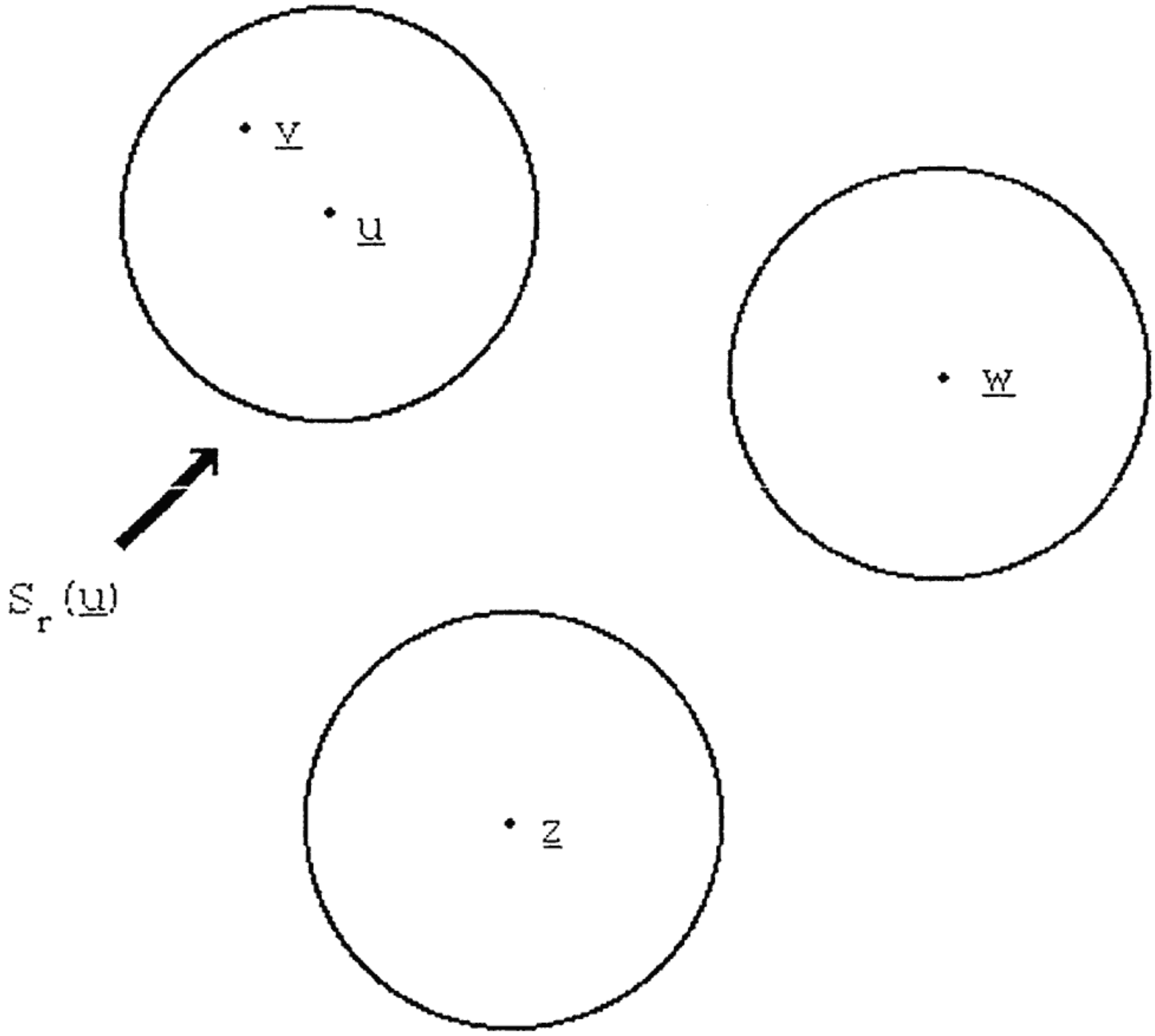
Non sempre i codici sono utilizzati per correggere gli errori, ma sovente sono utilizzati solo per individuare gli errori, pur non possedendo le capacita' per correggerli. L'esempio piu' classico consiste nell'aggiunta ad ogni sequenza di 0 e 1 che si vuole trasmettere un bit dato dalla somma modulo 2 degli elementi della sequenza. Tale bit (0 o 1) viene usualmente chiamato *bit di controllo di parita'*. Se nella sequenza si verifica un singolo errore il bit di controllo di parita' permette di accertarsi che si e' verificato l'errore, ma non di correggerlo. Due errori non vengono neppure individuati. In compenso la "coda" e' corta, un solo bit aggiuntivo!. L'aggiunta del bit di controllo di parita' e' ad esempio usata in certe fasi di elaborazione nei computers.

Diagramma di un sistema di comunicazione **Tab. A**



Tab. B

Sfere di centro una parola del codice e raggio r



Tab. C

Matrice dei generatori del (7,4) - codice di Hamming

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tab. D

Decodifica mediante la tabella standard

Matrice che definisce il codice (un (5,2)-codice)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabella standard

	Leaders			
Parole del codice	0 0 0 0 0	1 0 1 0 1	0 1 0 1 1	1 1 1 1 0
Laterali	1 0 0 0 0	0 0 1 0 1	1 1 0 1 1	0 1 1 1 0
	0 1 0 0 0	1 1 1 0 1	0 0 0 1 1	1 0 1 1 0
	0 0 1 0 0	1 0 0 0 1	0 1 1 1 1	1 1 0 1 0
	0 0 0 1 0	1 0 1 1 1	0 1 0 0 1	1 1 1 0 0
	0 0 0 0 1	1 0 1 0 0	0 1 0 1 0	1 1 1 1 1
	1 1 0 0 0	0 1 1 0 1	1 0 0 1 1	0 0 1 1 0
	1 0 0 1 0	0 0 1 1 1	1 1 0 0 1	0 1 1 0 0

PROBABILITÀ SOGGETTIVA
E
STATISTICA INFERENZIALE BAYESIANA
NELLE SCUOLE SUPERIORI

Carla Calvi Parisetti

Introduzione

"Elementi di Probabilità e di Statistica" (che indicheremo brevemente con EPS) sono argomenti dei nuovi programmi di Matematica per le Scuole Superiori. Si tratta di "elementi" che molti docenti ritengono costituire un capitolo a sè stante rispetto alla Matematica tradizionale, per lo più conosciuto da pochi volenterosi e attualmente da quei laureati in Matematica che hanno inserito nel loro piano di studio un corso di Probabilità o di Statistica matematica. Le ragioni di questo isolamento delle discipline probabilistico-statistiche dalla Matematica tradizionale risiedono principalmente nel fatto che quest'ultima ha costituito storicamente il principale supporto della Fisica per quanto attiene alla modellizzazione di fenomeni di natura deterministica o a leggi fisiche appropriate per sistemi macroscopici. L'indagine dei fenomeni microscopici che ha portato allo sviluppo di quella importante branca della Fisica che è la Meccanica quantistica, iniziata negli anni venti-trenta di questo secolo, avrebbe da tempo dovuto convincere i matematici dell'importanza dello strumento probabilistico. Ma non solo lo studio della Fisica moderna, anche quello dei fenomeni biologici, economici, sociologici richiede il supporto della Probabilità e della Statistica se si vogliono fare delle indagini realistiche. Convinta come sono del valore concettuale e strumentale di queste discipline e della conseguente opportunità che i primi elementi siano introdotti nella Scuola Secondaria, proporrò quello che a me sembra il modo più corretto e semplice di presentare gli "elementi di Probabilità e di Statistica" agli studenti delle Scuole Superiori, nella speranza che anche i docenti per varie ragioni meno preparati nelle discipline probabilistico-statistiche o meno interessati, guardino a queste almeno con curiosità. Evidentemente non potrò percorrere tutto il programma, che è abbastanza ricco di contenuti in relazione al modesto numero di ore dentro al quale dovrebbe essere svolto. Sotto la voce EPS, il programma prevede:

nel primo biennio:

a) Semplici spazi di probabilità : eventi aleatori, eventi disgiunti e "regola della somma".

b) Probabilità condizionale e applicazioni; formula di Bayes.

c) Elementi di Statistica descrittiva: rilevazione di dati, valori di sintesi, indici di variabilità, regressione e correlazione e tra gli obiettivi del programma di Matematica è segnalato quello di "matematizzare semplici situazioni problematiche, rappresentare e interpretare dati, operare con modelli deterministici e non deterministici"

nel triennio :

a) Speranza condizionata

b) Distribuzione binomiale, normale, di Poisson: teorema di J. Bernoulli

c) Nozioni fondamentali di Statistica inferenziale: teoria elementare del campione, stima delle rilevazioni statistiche, inferenza Bernoulliana ed inferenza Bayesiana e tra gli obiettivi viene ribadita "l'esigenza di abituare l'allievo ad effettuare modellizzazioni, non soltanto deterministiche di situazioni problematiche". Viene pure rilevato che "le nozioni di statistica dovranno essere inserite nel quadro più ampio del problema delle decisioni in condizioni di certezza e di incertezza. . ecc. "

Il programma di Matematica risulta ampio (e c'è chi si preoccupa della proliferazione delle tematiche proposte), in particolare forse lo è il programma di Probabilità e Statistica e un problema potrebbe essere quello di svolgerlo per intero. Ritengo però che debba essere cura di ogni docente di tentare di sviluppare una mentalità, piuttosto che impartire molte nozioni. Per esempio nello studio di alcuni fenomeni potrebbe essere segnalata la differenza tra l'approccio deterministico e quello stocastico: un analista che disponesse dei dati della pioggia negli ultimi anni, ragionando in modo deterministico cercherebbe la linea che approssima meglio quei dati secondo un criterio di minimizzazione degli errori, in modo stocastico cercherebbe di stabilire la distribuzione di probabilità relativa ai valori che ha osservato; un fisico che studia il fenomeno dell'emissione di particelle radioattive, può studiarlo pervenendo ad una legge di tipo deterministico ragionevole e realistica solo in certe condizioni, oppure può studiarlo in modo probabilistico pervenendo alla distribuzione di probabilità della variabile aleatoria che conta il numero di particelle emesse in un intervallo di tempo. Mentre in un modello deterministico si fanno determinate ipotesi dalle quali discende univocamente l'andamento futuro del fenomeno, in un modello probabilistico si usano le ipotesi per determinare la probabilità relative all'andamento futuro del fenomeno. I modelli probabilistici creano un nuovo abito mentale nel ricercatore: quello di ragionare in termini di comportamento casuale anziché deterministico, considerando la probabilità come misura della mancanza di conoscenza del reale. Dissertando della teoria della probabilità e dell'inferenza statistica come su una storia di straordinario successo filosofico, Hacking dice: "I tranquilli statistici hanno cambiato il nostro mondo, non scoprendo fatti o sviluppi tecnologici nuovi, ma cambiando il modo con cui ragioniamo, sperimentiamo, e formiamo le nostre opinioni su questo." (da C. R. Rao:*Statistics and Truth*).

Un primo commento al programma di EPS del biennio abbastanza ovvio è che la parte di Statistica descrittiva c) potrebbe precedere gli altri argomenti previsti in EPS. Questa parte della Statistica erroneamente ritenuta da alcuni la parte sostanziale della Statistica e da altri completamente ignorata, a mio parere ha una utile funzione che è quella di avvicinare gli studenti ai dati sperimentali che possono essere elaborati, rappresentati, confrontati, correlati ecc., facendo anche uso di opportuni programmi come Lotus, Statgraph ecc. Si dovrà precisare il significato ed i limiti dei metodi della Statistica descrittiva che consentono solo di identificare alcune caratteristiche di fenomeni collettivi. La Statistica inferenziale (o semplicemente la Statistica) dovrà invece seguire gli argomenti di Probabilità. Per superare un'eventuale confusione tra il metodo probabilistico e statistico vorrei dire forse in modo un po' grossolano, che con il primo si studia il comportamento di un meccanismo aleatorio supponendo questo ben definito, con il secondo, supponendo il meccanismo aleatorio sconosciuto ed osservando un certo comportamento, si tenta di ricostruire gli elementi mancanti. Per esempio, supposto che sia $\theta = \frac{1}{2}$ la probabilità dell'evento testa nel lancio di una moneta e che il modello consista di 10 lanci indipendenti, i metodi probabilistici consentono di stabilire la probabilità di un evento più complesso come quello di ottenere 2 teste e 8 croci. Qualora θ non sia noto e si siano osservate 2 teste e 8 croci in 10 lanci indipendenti, i metodi statistici inferenziali consentono di congetturare un possibile valore di θ.

Probabilità soggettiva

Venendo finalmente al tema di questa esposizione, vorrei esporre le ragioni della scelta di una definizione soggettiva della Probabilità rispetto ad altre definizioni (o ritenute tali), proponendo un esempio [Ber]. Si considerino tre esperimenti :

a) una signora che beve the con latte afferma di riconoscere se nella tazza è stato messo prima il latte o il the. Si eseguono 10 esperimenti ed in tutti essa dà la risposta corretta;

b) un musicista afferma di essere in grado di distinguere una composizione di Beethoven da una di Mozart semplicemente guardando una pagina di spartito. Si eseguono 10 esperimenti e in tutti egli dà una risposta corretta;

c) un ubriaco afferma di poter indovinare l'uscita del lancio di una moneta prima che sia caduta. Si eseguono 10 esperimenti e in tutti egli dà una risposta corretta. Basandosi solo sull'esito delle prove, dovremmo credere allo stesso modo a tutte tre le affermazioni; se invece teniamo conto delle persone e della fiducia che ad esse accordiamo, dobbiamo considerare il primo evento possibile, il secondo certo, il terzo "fortunato". . . E' chiaro che al momento di assegnare una probabilità a ciascuno dei tre eventi (che la signora riconosca se è stato messo prima il latte o il the, che il musicista riconosca dallo spartito il brano, che l'ubriaco indovini l'uscita della moneta) si debba tenere conto della fiducia che si ha nel verificarsi dell'evento considerato.

L'introduzione della Probabilità soggettiva non esclude valutazioni di probabilità come quelle classica frequentistica che sono valutazioni (e non definizioni) molto utili quando sono possibili. E' noto infatti che la prima richiede di poter distinguere casi ugualmente possibili e incompatibili, mentre la seconda richiede che si presentino condizioni di ripetibilità dell'esperimento che dà luogo all'evento considerato. Nel caso in cui si dovesse valutare la probabilità che il primo numero estratto sia multiplo di 5 su una certa ruota in un certo sabato, una valutazione classica porta facilmente a $\frac{18}{90} = 0.2$ poiché si ritengono ugualmente possibili 90 casi e favorevoli all'evento considerato 18 casi. Mentre nel caso che si dovesse valutare la probabilità che il prossimo nato sia maschio avendo osservato che in un certo periodo sono nati 485 maschi su 1000 nati, una valutazione frequentistica porterebbe a 0.485, valutando in questo modo la probabilità di un evento futuro (analogo ai precedenti) uguale alla frequenza degli eventi passati. Solo incidentalmente, vorrei far rilevare che esercizi di calcolo di probabilità eseguiti in modo "classico" forniscono l'occasione per applicazioni del calcolo combinatorio e permettono di segnalare la difficoltà di individuare casi "egualmente possibili" utilizzando un modello molto efficace della distribuzione di r oggetti in n celle. Nessuno però penserebbe di assegnare la probabilità che vinca il campionato una certa squadra eseguendo una valutazione classica o frequentistica!

Nell'approccio soggettivo, si definisce l'EVENTO come un ente descritto da una proposizione non ambigua che puo essere vera o falsa. Se è noto che essa è vera, l'evento da essa descritto è detto certo e indicato con Ω, mentre se è noto che è falsa, l'evento è detto impossibile e indicato con $\varnothing$. Quando non è noto se l'evento è vero o falso, l'evento è detto possibile. La definizione di PROBABILITÀ di un evento è fondata sul concetto di scommessa coerente. La probabilità p di un evento è misurata dalla quota che chi assegna la probabilità è disposto a pagare a un banco per ricevere 1 se l'evento si verifica e 0 se non si verifica (o pS per ricevere S). Per essere coerente la scommessa non deve assicurare un guadagno certo o una perdita certa, qualunque sia l'evento che si verifica. Deve cioè accadere che il guadagno G, espresso da

$$G = |E| - p$$

$$\text{con } |E| = \begin{cases} 0 \text{ se } E \text{ non si verifica} \\ 1 \text{ se } E \text{ si verifica} \end{cases}$$

non abbia lo stesso segno se E accade o E non accade (o se accade il suo complementare E^c). Precisamente, se

$$G = 1 - p \quad e \quad G = - p$$

sono i guadagni corrispondenti al verificarsi e al non verificarsi di E, deve risultare:

$$-p\,(1 - p) \leq 0$$

Dal principio di coerenza espresso dalla diseguaglianza precedente, seguono gli "assiomi" della probabilità. Per ogni evento E, indicata con p la probabilità P(E):

$$1)\ 0 \leq p \leq 1$$

Se è noto se E accade o non accade, cioè se si è in presenza dell'evento certo Ω dell'evento impossibile $\varnothing$, l'esito della scommessa è scontato e quindi il guadagno deve essere nullo; segue:

$$2)\ P(\Omega) = 1 \quad e \quad P(\varnothing) = 0$$

Data una partizione finita dell'evento certo (una famiglia finita di eventi incompatibili la cui unione sia l'evento certo), una combinazione di scommesse di quote $p_1, \ldots, p_n$ su $E_1, \ldots, E_n$ equivale a una scommessa su con guadagno

$$G = 1 - (p_1 + \ldots + p_n)$$

e la scommessa è coerente se :

$$3)\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

L'aspetto matematico della probabilità si può riguardare come lo studio di tutte le funzioni P sulla famiglia di eventi che soddisfa le tre proprietà precedenti, ma nell'approccio soggettivo la probabilità è la misura del grado di fiducia nel verificarsi di E. Si può osservare che:

a) L'interpretazione di P(E) come grado di fiducia conserva la generalità di una impostazione assiomatica, ma - come si è detto - dà un significato alla probabilità di E.

b) P(E) non è una caratteristica intrinseca a E, ma dipende dallo stato di informazione.

c) Le scommesse sono da considerarsi fittizie come è fittizia la definizione di campo elettrico, come la forza che agirebbe su una carica se fosse portata nel punto in cui si misura il campo. . .

Si può inoltre dimostrare che non si possono assegnare in modo coerente due distinte probabilità allo stesso evento.

A differenza dell'introduzione misuristica (o di Kolmogorov) nell'approccio soggettivo vengono definiti anche gli eventi condizionati. Precisamente, quando non è noto che l'evento H è falso, cioè se $H \neq \emptyset$

$$E \mid H = \begin{cases} \text{evento } \textit{vero} \text{ se, essendo vero H, E è vero} \\ \text{evento } \textit{falso} \text{ se, essendo vero H, E è falso} \\ \text{evento } \textit{indeterminato} \text{ se H è falso} \end{cases}$$

Si dimostra che:

$$E \mid H = E \cap H \mid H$$

e con considerazioni di coerenza, si stabilisce che :

$$P(E \mid \Omega) = P(E) \text{ per ogni E,}$$

$$P(E \mid H) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} \quad \text{se } P(H) > 0,$$

o nel caso più generale che $P(H) \geq 0$, la probabilità condizionata è definita implicitamente dalla relazione:

$$P(E \cap H) = P(E \mid H)\, P(H)$$

L'indipendenza tra due eventi viene definita dalla relazione: $P(E \mid H) = P(E)$ e $P(H \mid E) = P(H)$ e quindi, nel caso che $P(E)$ e $P(H)$ siano entrambe positive, dalla relazione:

$$P(E \cap H) = P(E)\, P(H)$$

Si può poi dare la definizione di indipendenza per n eventi o per una qualunque famiglia di eventi e segnalare le conseguenze della condizione di indipendenza. Utili applicazioni sono fornite dal modello dell'urna da cui si eseguono estrazioni con e senza rimpiazzamento, con inserimento di oggetti del colore estratto e/o del colore non estratto. Il modello si adatta a molte circostanze diverse, come il contagio di una malattia, la riduzione del numero degli incidenti dopo un grave incidente, la diffusione di due gas ecc.

A conclusione di questa parte è obbligatorio parlare del teorema di Bayes per la fondamentale importanza che esso riveste nella statistica inferenziale. L'enunciato è il seguente:

Data una partizione dell' evento certo ($H_0, \ldots, H_N$) ed una famiglia di eventi $\mathcal{E}$, dato $E \in \mathcal{E}$ (E è l'evento osservato), allora:

$$P(H_r \mid E) = \frac{P(H_r)\, P(E|H_r)}{\sum_{i=0}^{N} P(H_i)\, P(E|H_i)}$$

Osservando che quanto è scritto a denominatore non dipende dall' evento H_r e quindi si comporta come una costante, la relazione precedente esprime che la probabilità dell'evento H_r condizionatamente all'evento osservato E è proporzionale al prodotto della probabilità di H_r che si aveva a priori per le probabilità di E condizionatamente al verificarsi di H_r. Quest'ultima è detta funzione di verosimiglianza. Con questa interpretazione, il teorema di Bayes ha il ruolo di aggiornare l'informazione a priori espressa da $P(H_r)$ con l'osservazione contenuta nella verosimiglianza. Nel caso di un'urna contenente un numero N di palline di due colori, se $H_0, H_1, \ldots, H_N$ indicano le possibili composizioni incognite dell'urna e p_r indica la probabilità dell'ipotesi H_r, il teorema di Bayes esprime che la probabilità che la composizione sia H_r (r palline bianche) a condizione di aver osservato s bianche in n estrazioni è proporzionale alla probabilità $P(H_r)$ di cui si disponeva a priori sulla composizione H_r moltiplicata per la funzione di verosimiglianza che nel caso osservato è pari a

$$p(E \mid H_r) = p_r^{s}\ (1 - p_r)^{n-s}$$

Un criterio frequentemente usato nella statistica classica è quello della massima verosimiglianza, fondato sulla ricerca dell'ipotesi H che rende massima la verosimiglianza. Tale criterio applicato per stimare la composizione dell'urna precedentemente considerata, indicherebbe come più probabile la composizione costituita da $p = \frac{s}{n}$ palline bianche, ma non terrebbe conto dall'informazione iniziale sulla composizione o riterrebbe ugualmente probabili tutte le composizioni (ipotesi). Nell'inferenza statistica Bayesiana invece si tiene conto di tali informazioni e si confrontano le probabilità a posteriori. Non tener conto dell'informazione iniziale cioè della probabilità a priori e utilizzare il criterio di massima verosimiglianza può portare a conseguenze curiose, come si rileva negli esempi seguenti [SC]:

ESEMPIO 1

Paolo suddivide gli amici che non gli scrivono da oltre un anno in due categorie: quelli deceduti e quelli molto indaffarati. Si considerino gli eventi:

E = {Pietro non scrive a Paolo da oltre un anno};
H_1 = {Pietro è molto indaffarato};
H_2 = {Pietro è deceduto}.

Risulta ovviamente che $P(E \mid H_2) = 1$ e quindi se $P(E \mid H_1) = \alpha$ con $\alpha < 1$, il criterio di massima verosimiglianza porta a scegliere l'ipotesi funebre come la più probabile! Se invece si tiene conto correttamente delle probabilità a priori cioè dello stato di conoscenze sugli eventi H_1 e H_2, il risultato potrà essere meno pessimista, in quanto usando il teorema di Bayes, risulta:

$$P(H_1 \mid E) = k\,P(H_1)\,\alpha \quad \text{e} \quad P(H_2 \mid E) = kP(H_2)$$

Quindi $P(H_1 \mid E) > P(H_2 \mid E)$ se e solo se $\alpha \geq \frac{P(H_2)}{P(H_1)}$

ESEMPIO 2

Un'industria produce lotti di oggetti che garantisce al 99% nel senso che nella selezione non viene accettato più di un oggetto difettoso tra 100 e non viene scartato più di un oggetto buono tra 100. Quale significato ha l'evento

H = {il lotto è garantito al 99%},

in assenza di informazioni sulla composizione dei lotti?

Nessuna, in quanto il lotto potrebbe provenire da una produzione di oggetti tutti difettosi (ogni cento oggetti, pur inserendo solo un oggetto nel lotto, si costruirebbe un lotto di oggetti difettosi). Solo essendo a conoscenza del fatto che non più della metà della produzione è difettosa l'evento H ha significato. Infatti, anche senza eseguire il calcolo si può rilevare che se la produzione fosse di 200 pezzi dei quali 100 buoni e 100 difettosi, con una tale selezione l'evento H sarebbe verificato. A maggior ragione se il numero dei pezzi difettosi è meno della metà !

Gli esempi introdotti evidenziano quindi la necessità di fare riferimento alle informazioni iniziali.

Statistica inferenziale Bayesiana

Il teorema di Bayes costituisce il fondamento della statistica inferenziale. Con riferimento all'esempio riferito nell'introduzione, dall'osservazione di 10 lanci indipendenti di una moneta, costituenti l'ESPERIMENTO E, lo statistico cercherà di inferire il valore della probabilità θ che la moneta presenti la faccia "testa". Il tipico ragionamento Bayesiano con cui egli perviene al risultato è quello di aggiornare il suo stato di conoscenze iniziale o a priori su θ con l'osservazione del risultato sperimentale E, utilizzando il teorema di Bayes:

$$p(\theta \mid E) \propto p(\theta)\, g(E \mid \theta)$$

dove $p(\theta)$ è la densità a priori del parametro incognito θ esprimente l'informazione iniziale sulla distribuzione di θ, mentre $g(E \mid \theta)$ è la funzione di verosimiglianza che esprime la probabilità di osservare E se θ è la probabilità che venga testa. Nell'esempio in questione:

$$g(\theta \mid E) = \theta^8 (1 - \theta)^2$$

Essendo θ un numero reale compreso tra 0 e 1, la funzione densità di probabilità sarà positiva per valori in tale intervallo e nulla per valori esterni. Una famiglia di densità molto ricca, in grado di tradurre stati di conoscenze molto vari, è la densità Beta il cui grafico, al variare dei due parametri, assume molteplici forme.

La conoscenza della probabilità a posteriori di θ, dedotta dal teorema di Bayes, consente di determinare per esempio il valore di θ per cui la probabilità a posteriori è massima o di individuare un intervallo di variabilità per θ corrispondente a una regione di più alta probabilità a posteriori o altre caratteristiche di tale probabilità.

Il problema della ricerca di valori di θ che rendono massima la probabilità ha l'analogo nella Statistica classica nel problema di stima puntuale, mentre quello della ricerca di intervalli di massima probabilità ha l'analogo nel problema della stima di intervallo. Esempi del tutto simili illustrano la possibilità di determinare la distribuzione di probabilità della composizione di un'urna o della percentuale dei votanti "si" al referendum, o della percentuale dei fumatori in una popolazione di fumatori e non fumatori, ecc. Il problema evidentemente è sempre lo stesso. Gli esempi monete-palline sono ben lungi dall'essere inutili giochi intellettuali, sono importanti modelli. Il ragionamento statistico Bayesiano si differenzia da quello classico essenzialmente perche scambia il ruolo di ciò che si ritiene aleatorio con ciò che non lo è: nella Statistica classica, il risultato sperimentale è il valore noto assunto da una variabile aleatoria e il parametro θ è un ben determinato numero incognito; nella Statistica Bayesiana, il risultato sperimentale è un dato e il parametro θ è aleatorio in quanto non è completa la nostra conoscenza sul suo valore e quindi gli si attribuisce una probabilità. E sempre lo stato di conoscenza sul verificarsi o meno di un evento che genera la probabilità, come si diceva all'inizio. Nella Statistica classica si considerano tre classi di problemi che con rifemento all'esempio introdotto sopra del lancio di una moneta dieci volte, si possono riassumere nei quesiti seguenti [SM]:

1) Quale valore ha θ (probabilità di testa nel lancio di una moneta). Questo è un problema chiamato di stima puntuale o variando di poco, è un problema di stima di intervalli. Alla domanda si può rispondere in infiniti modi e il procedimento statistico classico dà una regola per congetturare un possibile valore di θ.

2) E' $\theta = \frac{1}{2}$? (la moneta è equa?) Questo è un problema chiamato test delle ipotesi. La domanda che per esempio potrebbe porsi la zecca se intendesse collaudare ogni moneta prodotta e fondere tutte quelle non eque, ha solo due risposte: si o no.

3) La moneta è equa, è favorito l'evento testa o è favorito l'evento croce? Questo può diventare un problema di teoria delle decisioni nel caso per esempio che, se la moneta non è equa, un tale scommetta con una persona ignara puntando sull'evento favorito dalla moneta. Le prime due domande hanno costituito i principali quesiti della Statistica classica e in realtà non hanno equivalenti nella inferenza Bayesiana in cui il principale obbiettivo è di determinare una probabilità a posteriori.

La terza domanda introduce invece a un aspetto che è considerato e ha un notevole ruolo anche nella Statistica Bayesiana cioè alla utilità o alla perdita connessa per esempio con $\theta > \frac{1}{2}$. Per esempio, se:

$$\theta = P\,\{\text{una data medicina è salutare}\}$$
$$1 - \theta = P\,\{\text{la stessa medicina non è salutare}\}$$

una sovrastima di θ danneggia i consumatori, una sottostima porta alla non utilizzazione della medicina. Si deve valutare il danno e determinare il danno meno pericoloso. Ciò appunto è reso possibile dalla teoria delle decisioni: introducendo una funzione di utilità (o di perdita), tale teoria stabilisce regole per pervenire a decisioni corrispondenti a una perdita media minima o ad altre decisioni con altri requisiti.

A conclusione di questa esposizione, mi accorgo di essere caduta nello stesso tranello dal quale ho cercato di mettere in guardia, cioè ho voluto dire, forse con una certa superficialità molte cose. L'ho fatto nella speranza di stimolare una certo interesse a argomenti che per una esposizione al triennio delle scuole superiori possono in fondo ridursi all'esposizione di questi due argomenti: probabilità e probabilità condizionata. Il volume di Scozzafava che segnalo in bibliografia può essere un' utile traccia per i docenti interessati ad una impostazione soggettiva; i due saggi sugli argomenti di Probabilità e Statistica pubblicati sul volume Scienze Matematiche sono due esemplari esempi di intelligente divulgazione scientifica che possono essere letti da studenti e da docenti; il volume di Piccinato e Pintacuda presenta aspetti di notevole interesse didattico, pur essendo la probabilità introdotta in modo non soggettivo.

Bibliografia

[Ber] Berger J. **Statistical decision theory and Bayesian analysis.** Springer, Heidelberg (1985).

[PP] Piccinato L. - Pintacuda N. **Probabilità e Statistica. Matematica come scoperta.** Quaderno stampato nell'ambito di un contratto C. N. R. rintracciabile presso le segreterie dei Dipartimenti di Matematica delle Università di Pavia, Pisa e Trieste. (1985).

[SC] Scozzafava R. **La probabilità soggettiva e le sue applicazioni.** Ed. Veschi, Roma (1989).

[SM] **Le scienze Matematiche.** Raccolta di saggi a cura dell'Unione Matematica Italiana. Zanichelli, Bologna (1973).

AVVIO ALLA RICORSIVITÀ ATTRAVERSO PROBLEMI *

Consolato PELLEGRINO

Dipartimento di MATEMATICA - Università di MODENA

Dopo aver accennato alle finalità del GREM (Gruppo di Ricerca sulla Educazione Matematica - Modena) descriviamo gli obiettivi (§1) e le caratteristiche (§2) delle sue proposte relative all'introduzione dell'Informatica nella didattica della Matematica. Infine (§3) illustriamo, per sommi capi, una proposta di avvio alla ricorsività per allievi di 11-14 anni (cfr. Pellegrino-Garuti 1990) che può offrire spunti interessanti anche ad insegnanti di Scuola Secondaria Superiore.

1. - LA NOSTRA IDENTITÀ

Dal 1985 opera, presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena, il GREM (Gruppo di Ricerca sulla Educazione Matematica). Il GREM, cui aderiscono vari insegnanti di Scuola Secondaria, svolge attività di ricerca finalizzata al miglioramento dell'insegnamento e dell'apprendimento della Matematica per allievi di 11-16 anni con particolare attenzione sia alle innovazioni curricolari che alla gestione del lavoro in classe da parte dell'insegnante (cfr. Malara-Pellegrino 1990). Più precisamente tale ricerca punta alla:

a) valorizzazione degli aspetti formativi e culturali della Matematica attraverso la trasmissione delle idee e dei metodi che sono alla base del *fare Matematica;*
b) introduzione *attiva* dell'Informatica nella didattica della Matematica attraverso un uso del computer come *macchina per pensare*.

Per quanto riguarda più specificatamente il precedente punto b) il GREM mira a:

- realizzare l'inserimento dell'Informatica nella didattica della Matematica attraverso esperienze che - basate su *attività o problemi opportunamente scelti* e con l'ausilio di *metodologie appositamente elaborate* - permettono un graduale trasferimento di competenze informatiche dall'insegnante agli allievi *saltando la fase di alfabetizzazione*;
- individuare difficoltà di apprendimento e strategie produttive messe in atto dagli allievi attraverso l'osservazione del loro comportamento durante attività che preludono all'uso del calcolatore o ne facciano esplicitamente uso.

In altri termini il GREM mira ad una introduzione dell'Informatica nella Scuola più come fatto culturale che come semplice avvio all'uso dei calcolatori o all'apprendimento di

* Lavoro con il contributo del CNR (contratto n°90.01147.CT01)

questo o quel linguaggio di programmazione (gli uni e gli altri sono destinati ad essere superati dalla evoluzione in atto in tali settori). Pertanto, sin dall'inizio, noi del GREM abbiamo accentrato l'attenzione non tanto sugli aspetti puramente tecnici o contigenti dell'Informatica quanto sui collegamenti e gli interscambi con le discipline tradizionali in generale e la Matematica in particolare. Coerentemente con questa scelta le nostre proposte non puntano a dare una semplice alfabetizzazione informatica agli allievi né a trasformarli in programmatori o in esperti di pacchetti applicativi, ma utilizzano il computer in attività mediante le quali essi possano raggiungere i seguenti:

Obiettivi Informatici

- familiarizzare con gli approcci metodologici tipici dell'Informatica (analisi dei problemi e loro decomposizione in sottoproblemi - strutturazione dei dati - ricorsività - ricerca, raffinamento e confronto di procedure risolutive);
- prendere coscienza delle capacità (limiti e/o potenzialità) della macchina e delle difficoltà di operare con essa.

Obiettivi Matematici

- sviluppare il *saper vedere in Matematica* (riconoscere ed utilizzare le analogie strutturali, il processo di astrazione, i ragionamenti per analogia ed i procedimenti di generalizzazione);
- consolidare, acquisire e collegare tra loro concetti e tecniche propri della Matematica;
- acquisire in modo naturale il metodo della ricerca scientifica (analizzare e simulare situazioni, congetturare, sperimentare, cercare controesempi, dimostrare proprietà);
- affinare il linguaggio e migliorare le capacità espositive ed argomentative per agevolare l'approccio alla logica formale ed ai linguaggi artificiali.

Per quanto riguarda la Scuola Media il tema Informatica non è esplicitamente presente nei vigenti programmi: nel 1979, epoca della loro entrata in vigore, il *vento dell'Informatica* non aveva ancora cominciato a soffiare fuori dagli istituti di ricerca e dai grossi centri di calcolo. Tuttavia i precedenti *obiettivi, la metodologia ed i contenuti delle nostre proposte sono, sia nello spirito che nella lettera, in perfetta sintonia con detti programmi* che tra l'altro raccomandano la seguente:

Attività sperimentale

Gli allievi saranno impegnati individualmente ed in gruppo, in momenti operativi, indagini e riflessioni opportunamente guidati ed integrati dall'insegnante, giungendo, secondo la natura del tema, a sviluppi matematici più approfonditi e generali e, rispettivamente, ad un quadro coerente di risultati sperimentali.

2. - CARATTERISTICHE DELLE PROPOSTE DEL GREM

Le unità didattiche che il GREM sta progettando e sperimentando (cfr. ad esempio Pellegrino-Garuti 1989, 1990; Iaderosa 1990) concorrono a costituire un itinerario didattico, per allievi di 11-16 anni, di approccio all'Informatica in interazione feconda con la Matematica; tuttavia esse possono essere proposte alla classe indipendentemente l'una dall'altra secondo le esigenze della classe: non è necessario svolgerle tutte, anche una sola di esse è utile per dare l'idea di *cosa è un linguaggio di programmazione strutturato, cosa è un calcolatore, che tipo di prestazioni può fornire, come bisogna rapportarsi con esso.* Dette proposte si caratterizzano per il fatto che, *pur essendo relativamente brevi* (ciascuna di esse può essere realizzata in circa 10-15 ore) *in genere non richiedono negli allievi alcun* *prerequisito di tipo informatico* e, nello stesso tempo, *permettono di utilizzare il calcolatore per creare situazioni di laboratorio che altrimenti non sarebbero possibili o avrebbero scarsa incisività.* Dette unità (tranne l'ultima, specificatamente dedicata all'analisi ed alla decomposizione dei problemi in sottoproblemi) traggono spunto da *problemi opportunamente scelti* ed utilizzano una *metodologia appositamente elaborata* dal nostro gruppo.

Nella *scelta dei problemi,* per evitare agli allievi inutili frustrazioni, abbiamo deliberatamente scartato quelli facili da capire ma di non semplice soluzione (come accade quando si vuole usare il calcolatore per decomporre un numero naturale in fattori primi, o ordinare una lista di numeri); allo stesso modo, per evitare di banalizzare le attività con il computer e dare così una immagine fuorviante e riduttiva, abbiamo scartato problemi risolvibili a mano o con il semplice ausilio di una calcolatrice tascabile (quest'ultimo strumento è utilizzato o nelle fasi preliminari o in altre occasioni). Abbiamo invece privilegiato problemi per i quali la quantità dei dati in gioco o il loro ordine di grandezza non è secondario per la costruzione dell'algoritmo da trasferire al calcolatore, in modo da condurre gli allievi a riflettere sulle strategie adottate (come accade quando si vuole calcolare per enumerazione diretta il numero dei divisori di un numero: una cosa è contare i divisori di 12, ben altro è contare i divisori di 5040).

La *metodologia da noi elaborata* coniuga la scoperta guidata (su quest'ultimo argomento cfr. Polya 1945 e Sawyer 1974) con l'uso del computer. La scoperta guidata rende più incisivo il processo di insegnamento-apprendimento infatti essa consente:
- agli allievi di *fare Matematica* (ossia di assumere, fatte le debite proporzioni, lo stesso atteggiamento che ha il matematico durante le sue attività di ricerca), consolidare conoscenze acquisite, apprendere in modo significativo nuove conoscenze;
- all'insegnante di *studiare in diretta* il comportamento degli allievi, di valutare meglio le loro capacità e di individuare le loro lacune.

L'impiego del computer, oltre a rendere più viva l'attività di scoperta guidata, consente agli allievi di effettuare esperienze che li aiutano ad acquisire conoscenze, abilità e competenze informatiche così come un tempo gli apprendisti imparavano il mestiere nelle botteghe dell'artigiano.

La nostra metodologia si esplica attraverso l'alternanza di:
- lavoro individuale su schede per indurre *scoperte* (solitamente, per dare a ciascuno il tempo di riflettere e maturare le proprie idee, le schede vengono assegnate come compito da svolgere a casa);
- discussioni collettive per la puntualizzazione, l'approfondimento e la sistemazione organica delle scoperte (accuratamente guidate dall'insegnante in modo che i risultati raggiunti siano sentiti come frutto e patrimonio di tutti);
- prove alla macchina per concretizzare discorsi ed idee o effettuare verifiche (in questo modo gli allievi, oltre a prendere confidenza con questo tipo di strumento, comprendono la necessità della precisione di linguaggio e sono portati ad accettare l'idea del rigore matematico).

3.- UN'ESPERIENZA DI AVVIO ALLA RICORSIVITÀ

L'esperienza in oggetto è stata realizzata nell'anno scolastico 1987/88 in una classe prima della Scuola Media "O. Focherini" di Carpi (MO) in complessive 18 ore di lezione. Con essa volevamo renderci conto se la ricorsività, così temuta da molti insegnanti e così usata a sproposito da altri, potesse offrire agli allievi valide occasioni di riflessione e approfondimento. L'esperienza è stata progettata con cura e seguita con molta attenzione: noi stessi avevamo qualche timore circa la sua realizzabilità in tutte le sue parti. Essa si è svolta, senza grossi problemi, utilizzando come unico prerequisito il concetto di sistema di numerazione in base K.

Considerato l'interesse destato in allievi così giovani e le valenze didattiche offerte da questa attività noi riteniamo che, con semplici adattamenti (quali ad esempio, se necessario, l'impiego del PASCAl al posto del LOGO) ed eventuali ampliamenti, essa possa essere proficuamente proposta ad allievi di classi non sperimentali del biennio della Scuola Secondaria Superiore. A questo fine riportiamo in appendice le versioni in PASCAL delle procedure realizzate.

L'esperienza si può essenzialmente dividere in una parte di avvio ed in una di approfondimento e, come previsto, ha offerto ai ragazzi un ricco ventaglio di occasioni di esplorazione, riflessione e confronto.

Nella prima parte (avvio) si è affrontata una discussione finalizzata ad evidenziare il concetto di successivo dei numeri naturali, si è costruita poi con gli allievi la procedura SUCCESSIVO (fig. 1.d) che permette di simulare il passaggio da un numero al suo successivo in un contachilimetri. Si è poi utilizzata la procedura:

```
PER KONTATORE :NUM
 STAMPA :NUM
 KONTATORE SUCCESSIVO :NUM
FINE
```

che mediante SUCCESSIVO permette di simulare il funzionamento del contachilometri (ossia permette di visualizzare il succedersi dei numeri come avviene in un contachilometri di un'auto in movimento) e si sono fatte osservazioni sulla natura ricorsiva di queste due procedure (in particolare si è fatto notare che KONTATORE una volta lanciata, senza un intervento esterno non si arresterebbe mai).

Nella seconda parte (approfondimento) si sono adattate SUCCESSIVO e KONTATORE in modo da simulare il contachilometri in base otto. Successivamente si sono portati i ragazzi a costruire le seguenti procedure:

```
PER TRASFORMATO :NUM
  SE :NUM < 8 RIPORTA :NUM
  RIPORTA (8 * TRASFORMATO MENULT :NUM) + ULT :NUM
FINE

PER INVERSO :NUM
  SE :NUM < 8 RIPORTA :NUM
  PAROLA (INVERSO QUOZIENTE :NUM 8) (RESTO :NUM 8)
FINE
```

che consentono rispettivamente di passare dalla rappresentazione di un numero in base otto alla sua rappresentazione in base dieci e viceversa.

Fig. 1.- Costruzione della procedura SUCCESSIVO: (a) tabella riassuntiva dei fatti "osservati"; (b) traduzione in LOGO dei fatii osservati; (c) descrizione delle primitive impiegate; (d) inserendo in SUCCESSIVO una opportuna istruzione, come indicato dalla freccia, si ottiene una nuova procedura che funziona anche nel caso limite che il numero sia costituito da tutti nove.

(a)

```
Per fare il successivo si un numero

  se l'ultima cifra del numero è 0
  riporta il numero che ottieni facendo seguire
  1 al numero dato privato dell'ultima cifra

  se l'ultima cifra del numero è 1
  riporta il numero che ottieni facendo seguire
  2 al numero dato privato dell'ultima cifra

          :
          :

  se l'ultima cifra del numero è 9
  riporta il numero che ottieni facendo seguire
  0 al successivo del numero dato privato dell'ultima cifra

  fine
```

(b)

```
PER SUCCESSIVO :NUM

  SE ULT :NUM = 8
  RIPORTA PAROLA
  SUCCESSIVO MENULT :NUM 1

  SE ULT :NUM = 1
  RIPORTA PAROLA
  SUCCESSIVO MENULT :NUM 2

          :
          :

  SE ULT :NUM = 9
  RIPORTA PAROLA
  SUCCESSIVO MENULT :NUM 0

FINE
```

(c)

RIPORTA	: applicata ad un *oggetto* LOGO (numero, parola o lista) interrompe l'esecuzione della procedura in corso e restituisce quell'*oggetto* (serve per definire funzioni).
PAROLA	: applicata a due sequenze di caratteri (numeri o parole) restituisce la sequenza che si ottiene «concatenando» la prima sequenza con la seconda. Es.: PAROLA 12 34 restituisce 1234 mentre PAROLA "BUON "GIORNO restituisce BUONGIORNO.
ULT	: applicata ad un oggetto LOGO restituisce l'ultima componente di quell'oggetto. Es.: ULT 123 restituisce 3, ULT "FINE restituisce E, mentre ULT [IL CANE ABBAIA] restituisce ABBAIA.
MENULT	: applicata ad un oggetto LOGO restituisce quell'oggetto privato dell'ultima componente. Es. MENULT 123 restituisce 12, MENULT "FINE restituisce FIN, mentre MENULT [IL CANE ABBAIA] restituisce IL CANE.

(d)

```
    PER SUCCESSIVO :NUM
    <------------------------SE :NUM = "9 RIPORTA "0
    SE ULT :NUM = 0  RIPORTA PAROLA MENULT :NUM 1
    SE ULT :NUM = 1  RIPORTA PAROLA MENULT :NUM 2
    SE ULT :NUM = 2  RIPORTA PAROLA MENULT :NUM 3
    SE ULT :NUM = 3  RIPORTA PAROLA MENULT :NUM 4
    SE ULT :NUM = 4  RIPORTA PAROLA MENULT :NUM 5
    SE ULT :NUM = 5  RIPORTA PAROLA MENULT :NUM 6
    SE ULT :NUM = 6  RIPORTA PAROLA MENULT :NUM 7
(*) SE ULT :NUM = 7  RIPORTA PAROLA MENULT :NUM 8
(*) SE ULT :NUM = 8  RIPORTA PAROLA MENULT :NUM 9
    SE ULT :NUM = 9  RIPORTA PAROLA SUCCESSIVO MENULT :NUM 0
    FINE
```

Più precisamente, tranne che per KONTATORE, in conformità alla nostra metodologia, il lavoro di progettazione-realizzazione-verifica-studio di ciascuna delle procedure SUCCESSIVO, TRASFORMATO e INVERSO si è svolto attraverso le seguenti *fasi* che con allievi più grandi si possono conservare nella sostanza adattando convenientemente la forma:

a) presentazione del problema mediante schede di lavoro e/o discussione collettiva (in questa fase si pone particolare attenzione a catturare e stimolare l'interesse degli allievi);
b) analisi del problema mediante opportune schede e discussione collettiva;
c) stesura di un conveniente elenco di *fatti osservati* attraverso la sistematizzazione e la riorganizzazione del lavoro compiuto nella fase precedente (vedi ad esempio fig. 1.a);
d) traduzione in un adeguato linguaggio di programmazione (in questo caso il LOGO: vedi ad esempio fig. 1.b) dei fatti osservati (soprattutto all'inizio quando gli allievi non hanno alcuna conoscenza di tipo informatico è l'insegnante che, *proponendosi come interprete tra gli allievi ed il computer*, realizza detta traduzione: questo artificio consente di ridurre la fase di alfabetizzazione informatica a poco più che qualche cenno sulle primitive necessarie (vedi ad esempio fig. 1.c), inoltre questa attività consente di posticipare e ridurre al minimo gli aspetti teorici e rende facile l'avvio alla ricorsività);
e) prove alla macchina ed eventuale rilevazione di errori (generalmente guidate mediante *schede di collaudo* in cui si invitano gli allievi a confrontare le risposte da loro attese con quelle effettivamente fornite dal computer - vedi ad esempio fig. 2);
f) analisi del funzionamento della procedura effettuato mediante una conveniente *tabella di simulazione*, detta del *come funziona* (serve a scoprire, quando è il caso, dove e perché una procedura porta a risposte errate inoltre questa attività porta gli allievi a *vedere* i singoli passi compiuti dalla macchina ed ad entrare così nel meccanismo della ricorsività - vedi ad esempio fig. 3);
g) correzione degli errori scoperti attraverso la sistemazione dei casi limite, dei difetti dovuti alla limitatezza dei numeri di macchina, ecc.;
h) discussione ed approfondimenti (questa fase che può comprendere l'eventuale raffinamento della procedura realizzata consente agli allievi di vedere la genesi di regole matematiche - vedi ad esempio fig. 4).

La prima procedura (SUCCESSIVO) ha richiesto parecchio tempo per essere realizzata e fatta propria dagli allievi, le altre invece sono state costruite via via con maggiore facilità. Ricordiamo che per la realizzazione di SUCCESSIVO l'insegnante ha svolto il ruolo di "interprete" assumendosi interamente il compito di tradurre in LOGO l'algoritmo elaborato insieme ai ragazzi ma che con il progredire dell'esperienza c'è stato un graduale trasferimento di competenze dall'una agli altri: alla fine questi ultimi hanno acquisito una certa familiarità con questo procedimento tanto che le loro soluzioni dei problemi proposti erano praticamente procedure LOGO.

Ci sembra importante sottolineare, per ciò che riguarda la metodologia, che il ricorso alle tabelle del *come funziona* si è rivelata una scelta didattica felice in quanto esse hanno reso *trasparente* agli allievi sia il *meccanismo nascosto* delle procedure realizzate, sia il funzionamento di ciascuna di esse. La spiegazione del meccanismo nascosto ha messo in luce la natura ricorsiva di dette procedure ossia ha permesso di evidenziare il fatto che: *le procedure ricorsive risolvono i problemi riconducendoli ad altri ad esso analoghi che diventano via via più semplici sino al punto da poter essere risolti immediatamente* (cfr. Roberts tr.it. 1987, pp. 17-18). Invece il funzionamento di ciascuna di esse ha permesso

Fig. 2. - Prove alla macchina e rilevazione di eventuali errori di SUCCESSIVO

(a) *Scheda di collaudo*

La procedura SUCCESSIVO, se tutto va bene, dovrebbe rispecchiare il funzionamento del contachilometri nel passaggio da un numero al suo successivo. Scrivi accanto a ciascuno dei seguenti comandi quale dovrebbe essere, secondo te, la risposta del computer.

COMANDI	RISPOSTE TUE	RISP. COMPUTER
a) STAMPA SUCCESSIVO 8785	8786	8786
b) STAMPA SUCCESSIVO 326	327	327
c) STAMPA SUCCESSIVO 7769	7770	7770
d) STAMPA SUCCESSIVO 779	780	780
e) STAMPA SUCCESSIVO 10	11	11
f) STAMPA SUCCESSIVO 0326	0327	327
g) STAMPA SUCCESSIVO 0010	0011	11
h) STAMPA SUCCESSIVO 0000	0001	1
i) STAMPA SUCCESSIVO 1234567890123	1234567890124	123456 E 12
l) STAMPA SUCCESSIVO 999	1000	M.E.
m) STAMPA SUCCESSIVO 9	10	M.E.

Dopo aver trasferito SUCCESSIVO nella macchina scrivi le risposte effettivamente date dal computer.
Qualche risultato ti sorprende perché?

(b) *Risultati del collaudo*

La traduzione LOGO dei fatti evidenziati (fig. 1.b), nella sostanza, sia pure con qualche inconveniente, è una procedura che consente al computer di similuare il contachilometri nel passaggio da un numero al suo successivo.

(c) *Inconvenienti riscontrati*

1) se il numero inizia con uno o più zeri, essi vengono eliminati nella risposta del computer;
2) se il numero è troppo "grande", esso viene espresso con notazione esponenziale (i numeri gestibili dalla macchina sono limitati);
3) nel caso limite che il numero sia composto da tutti 9, il computer dà un messaggio d'errore di non facile interpretazione.

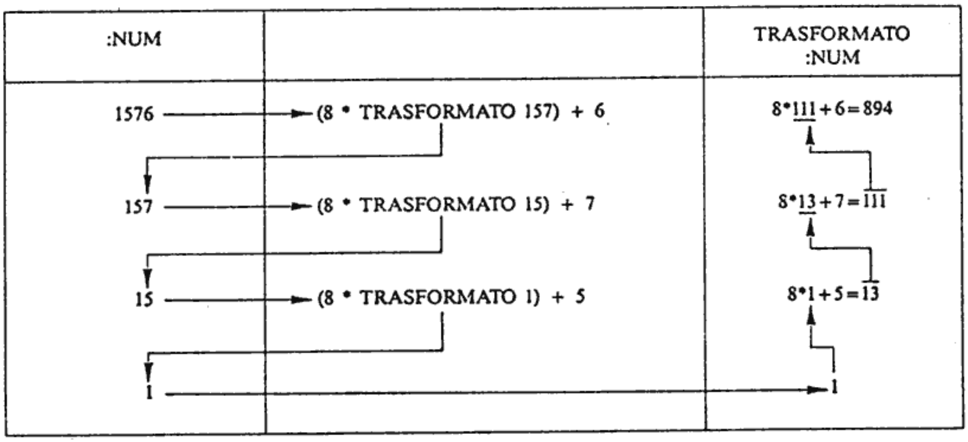
(d) *Rimedi*

- Per eliminare (1) e (2) basta aggiungere le virgolette (") davanti al numero (es.: "00327 invece di 00327). E' un esempio di correzione di errore mediante il ricorso alla *strutturazione dei dati*: le virgolette dicono al LOGO di trattare NUM come stringa, ossia come una sequenza di caratteri.
- Per eliminare (3) basta inserire, come prima riga di SUCCESSIVO, l'istruzione:

  SE :NUM = "9 RIPORTA "0

  E' un esempio di correzione di errore mediante l'aggiunta di una apposita istruzione che consenta di trattare il caso limite in cui NUM è composto da tutti 9.

Fig. 3. - Come funziona TRASFORMATO



anche di evidenziare il fatto che con *l'analisi di una procedura ricorsiva si può, anche se a volte con un certo sforzo, costruire una procedura "diretta" di soluzione ossia che specifica direttamente la sequenza di passi elementari senza mai lasciare niente in sospeso o dover tornare indietro* (cfr. Luccio 1984, p. 63). Nel caso in esame questa analisi ha consentito agli allievi di *vedere* la genesi di alcune regole matematiche quali quella derivante dall'analisi di TRASFORMATO che, come illustrato in fig. 4, ricalca il noto schema di Ruffini e consente di passare dalla rappresentazione di un numero in base otto a quella in base dieci.

Un altro aspetto da sottolineare è che durante le prove alla macchina delle procedure realizzate gli allievi hanno potuto effettuare significative attività di scoperta e correzione di errori (fig. 2) rendendosi così conto che spesso *la questione da porsi, riguardo a un programma, non è se è giusto o sbagliato, ma se lo si può sistemare* (cfr. Papert tr. it. 1980, p. 29).

Con questa esperienza abbiamo avuto modo di verificare la ricchezza di spunti di lavoro e di riflessione che situazioni di *laboratorio* come questa offrono agli allievi: senza l'uso del computer molte di queste attività sarebbero impensabili o avrebbero scarsa incisività.

Inoltre, quando gli allievi hanno acquistato un minimo di autonomia, al fine di verificare il grado di interiorizzazione del lavoro svolto e di esercitarli alla lettura ed alla comprensione di procedure elaborate da altri, sono stati proposti su scheda brevi listati di procedure con la consegna di prevederne e di descriverne gli effetti sui dati di ingresso.

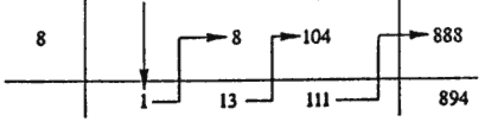


Fig.4. - Passaggio dalla rappresentazione in base otto a quella in base dieci di 1576_8

BIBLIOGRAFIA

IADEROSA R., 1990, Un'esperienza didattica di interazione tra allievi ed elaboratore per la risoluzione di problemi aritmetici, in corso di stampa su Atti Conv. Naz. *Informatica e Didattica*, Salerno 28-30 settembre 1990.

LUCCIO F., 1984, Spunti di algoritmica concreta, *Bollettino UMI* (6), 3-A, pp. 57-80.

MALARA N.A., PELLEGRINO C., 1990, "1985-1990": Cinque anni di attività del GREM, contributo al XIV Conv. Naz. UMI-CIIM *La prima Educazione Matematica*, Cala Gonone (NU) 25-27 ottobre 1990.

PAPERT S., 1980 (tr. it. 1984), *Mindstorms - Bambini, computers e creatività*, Ed. Emme, Milano.

PELLEGRINO C., GARUTI R., 1989, Dalla scoperta di regolarità numeriche all'avvio all'Informatica: descrizione di una esperienza didattica, *L'Educazione Matematica*, IV, n.1, pp. 69-81.

PELLEGRINO C., GARUTI R., 1990, Dall'avvio alla ricorsività ai cambiamenti di base nei sistemi di numerazione attraverso la simulazione in LOGO del contachilometri: descrizione di un'esperienza realizzata in una scuola media, *La Matematica e la sua Didattica*, IV, n.1, pp. 19-30.

POLYA G., 1945 (tr. it. 1967), *Come risolvere i problemi di Matematica, Logica ed euristica nel metodo matematico*, Feltrinelli, Milano, 1967.

ROBERTS E. S., 1986 (tr. it. 1987), *Il pensiero ricorsivo*, Franco Angeli Ed., Milano.

SAWYER W.W., 1964-1970 (tr. it. 1974-1978), *Guida all'insegnamento della Matematica*, 2 voll., Boringhieri, Torino.

APPENDICE: Versione PASCAL delle procedure realizzate

```
program dr;
{$S-}

type stringa=string[10];

{-----------------------------------------------------------------------------------------}
function ult (x:stringa) : char;
begin
        ult :=x [length (x)]
end; {ult}
{-----------------------------------------------------------------------------------------}
function menult (x:stringa) : stringa;
begin
        menult :=copy (x,1,length (x)-1)
end; {menult}
{-----------------------------------------------------------------------------------------}
function success (num:stringa) : stringa;
begin
        success :=num;
        if num='9' then begin success:= '0' ; exit; end;
        if ult (num)='0' then begin success:= menult(num)+'1' ; exit ; end;
        if ult (num)='1' then begin success:= menult(num)+'2' ; exit ; end;
        if ult (num)='2' then begin success:= menult(num)+'3' ; exit ; end;
        if ult (num)='3' then begin success:= menult(num)+'4' ; exit ; end;
        if ult (num)='4' then begin success:= menult(num)+'5' ; exit ; end;
        if ult (num)='5' then begin success:= menult(num)+'6' ; exit ; end;
        if ult (num)='6' then begin success:= menult(num)+'7' ; exit ; end;
        if ult (num)='7' then begin success:= menult(num)+'8' ; exit ; end;
        if ult (num)='8' then begin success:= menult(num)+'9' ; exit ; end;
        if ult (num)='9' then
           begin
             success:=success(menult(num))+'0' ;
             exit
        end;
end; {success}
{-----------------------------------------------------------------------------------------}
procedure kontatore(var num:stringa);
begin
        writeln(num);
        num:=(success(num));
        kontatore(num);
end; {kontatore}
{-----------------------------------------------------------------------------------------}
```

(continua)

```
function trasformato(num:stringa) : stringa;
var n,n1,n2,codice:integer;
begin
        trasformato:=' ';
        val(num,n,codice);
        if codice>0 then begin writeln('cifra non corretta'); exit end;
        if n<8 then
                trasformato:=num
           else
                begin
                        val ( trasformato(menult(num)) , n1 , codice ) ;
                        if codice>0 then begin writeln('cifra non corretta'); exit end;
                        val( ult(num) , n2 , codice );
                        if codice>0 then begin writeln('cifra non corretta'); exit end;
                        if n2>7 then begin writeln('cifra non corretta'); exit end;
                        str(8*n1+n2,num) ;
                end;
end; {trasformato}
{---------------------------------------------------------------------------------------------------}
function inverso(num:stringa) : stringa;
var n,codice:integer;
        num1,num2:stringa;
begin
        inverso:=' ';
        val(num,n,codice) ;
        if codice>0 then begin writeln('cifra non corretta'); exit end;
        if n<8 then
                inverso:=num
           else
                begin
                        str (n div 8,num1) ;
                        str (n mod 8,num2) ;
                        inverso:=inverso(num1)+num2;
                end;
end; {inverso}
{---------------------------------------------------------------------------------------------------}
{                               PROGRAMMA DI PROVA                                                  }

var num:stringa;

begin
        while true do
                begin
                        readln(num) ;
                        writeln(trasformato)num)) ;
                        writeln(trasformato(inverso(num))) ;
                        writeln;
                end;
end.
```

SULLA NOZIONE DI MEDIA

Silvano Holzer

1. La nozione di media, pur essendo costantemente presente nella analisi quantitativa di fenomeni sia fisici che economici o, più semplicemente, di situazioni pratiche, non riceve, come merita, sufficiente attenzione da parte dei matematici, dei fisici e degli statistici impegnati nell'insegnamento. Spesse volte infatti tale nozione viene "liquidata" riproponendo la definizione "naif" di Cauchy: " dicesi media fra più quantità date, una nuova quantità compresa fra la più piccola e la più grande delle quantità considerate", oppure, adottando un'impostazione "empirica", elencando le singole specie di medie che s'incontrano abitualmente (aritmetica, geometrica, armonica, antiarmonica, etc.). Ora, è del tutto evidente che nel primo caso si dice press'a poco nulla, mentre nel secondo, pur formalmente esatto, ci si riduce ad un mero elenco che non consente di individuare il quid comune a tutte le medie conosciute.

La situazione sopra adombrata è, a mio avviso, singolare in quanto non imputabile ad una difficoltà intrinseca alla nozione di media poichè, come osserva Oscar Chisini, "il concetto di media è così semplice e così perspicuo che basta fissarvi un poco l'attenzione per ritrovarne la vera natura e la conseguente definizione matematica"; ciò apparirà chiaro dagli esempi riportati nella Sezione 2 e dalla conseguente definizione di media, relativa ad un numero finito di grandezze, data nella Sezione 3. In detta Sezione si fa anche vedere come le usuali medie rientrino nella definizione proposta. Nella Sezione 4 invece si riporta il celebre teorema di Nagumo-Kolmogoroff, punto di partenza delle impostazioni assiomatiche della teoria delle medie. Passando poi a considerare medie di un numero infinito di grandezze, nella Sezione 5 si formalizza tale nozione e si fa vedere come le usuali medie generalizzate ne siano casi particolari. Nella Sezione 6 s'introducono alcune basilari proprietà delle medie e si riporta il ben noto teorema di rappresentazione integrale delle medie di de Finetti. Infine, nella Sezione 7, si fornisce una interessante caratterizzazione della media aritmetica generalizzata.

2. Cominciamo con un esempio dovuto al Chisini. Un'automobile noleggiata percorre 225 Km. : i primi 120 alla velocità di 60 Km/h e gli altri 105 alla velocità di 105 Km/h. Qual'è la sua *velocità media* ? Viene spontaneo rispondere che, avendo l'automobile impiegato 3 ore a percorrere 225 Km., la sua velocità media è: 225 : 3 = 75 Km/h. Cioè si considera come dato per scontato che la media di due velocità v_1, v_2, relative agli spazi s_1, s_2, si ottiene tramite la :

$$v_m = \frac{s_1 + s_2}{\dfrac{s_1}{v_1} + \dfrac{s_2}{v_2}},$$

cioè mediante la cosiddetta media armonica ponderata.

Supponiamo ora che il noleggiatore dell'automobile sia interessato, com'è del tutto naturale, al consumo di benzina. Ammettendo che il consumo di benzina C(v) per unità di spazio percorso alla velocità v sia espresso dalla formula :

$$C(v) = a + b(v - 60)^2,$$

il noleggiatore troverà che il consumo fatto per i 225 Km. *non* è quello che si sarebbe avuto se l'automobile avesse viaggiato a 75 Km/h, bensì quello corrispondente alla velocità di 80 Km/h ottenuta tramite la:

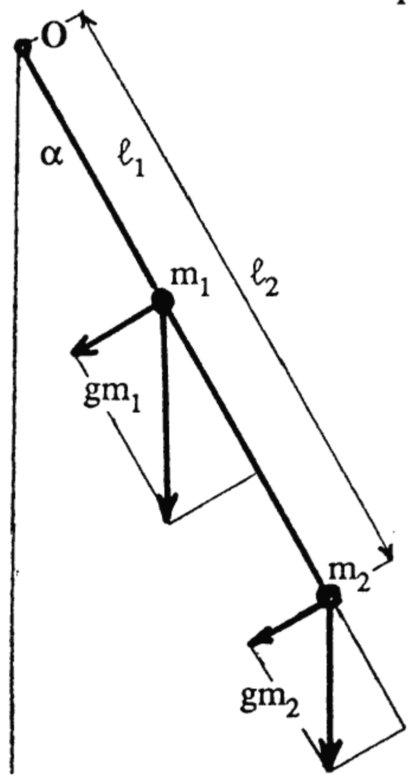
$$v_m = 60 + \left[\frac{s_1(v_1 - 60)^2 + s_2(v_2 - 60)^2}{s_1 + s_2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

cioè mediante la cosiddetta media quadratica ponderata.

Quindi l'automobilista ed il noleggiatore, essendo interessati, rispettivamente, ad un *consumo di tempo* e ad un *consumo di benzina*, sono portati a determinare una *diversa* velocità media.

Pertanto la morale dell'esempio è la seguente: la ricerca di una media ha lo scopo di *semplificare* un dato problema *sostituendo*, in esso, a più quantità date una quantità *sola* che *le sintetizzi* senza *alterare* la visione d'insieme del fenomeno in esame. *Non ha quindi senso* parlare di *media di due o più quantità* tout court, ma *ha senso* parlare di *media di esse relativamente alla valutazione sintetica di un'altra grandezza (la **circostanza**) che da esse dipende.*

Al fine di chiarire ulteriormente quanto appena affermato, consideriamo un secondo esempio. Dato un pendolo composto costituito



dalle masse m_1, m_2 poste, rispettivamente, a distanza ℓ_1, ℓ_2 dal centro di sospensione **O**, ci si chiede qual'è la lunghezza media ℓ_m del pendolo rispetto la circostanza: momento statico, momento d'inerzia, periodo delle piccole oscillazioni. Cioè, a quale distanza da **O** bisogna concentrare l'*intera* massa $m = m_1 + m_2$ per ottenere un pendolo semplice che abbia il *medesimo* valore del pendolo dato rispetto la *stessa* circostanza?

Per quanto riguarda la circostanza:

(a) <u>momento statico</u>, dalla:

$$m_1\, g\, \ell_1 \operatorname{sen}\alpha + m_2\, g\, \ell_2 \operatorname{sen}\alpha = (m_1 + m_2) g\, \ell_m \operatorname{sen}\alpha$$

otteniamo la media aritmetica ponderata:

$$\ell_m = \frac{m_1\, \ell_1 + m_2\, \ell_2}{m_1 + m_2} \quad \text{(baricentro)} ;$$

(b) momento d'inerzia, dalla:

$$m_1\, \ell_1^2 + m_2\, \ell_2^2 = (m_1 + m_2)\, \ell_m^2$$

otteniamo la media quadratica ponderata:

$$\ell_m = \left[\frac{m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}{m_1 + m_2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{(giratore)} ;$$

(c) periodo delle piccole oscillazioni , dalla:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{l_m} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \left[\frac{m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}{m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

otteniamo la media antiarmonica ponderata :

$$l_m = \frac{m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}{m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2} \quad \text{(lunghezza ridotta).}$$

3. Gli esempi e le considerazioni fatte nella precedente sezione suggeriscono la seguente formalizzazione, dovuta al Chisini (1929), del concetto di media di un numero finito di grandezze.

Definizione. Data una funzione reale

$$y = f(x_1,..,x_n),$$

di n variabili reali, il numero reale x si dirà *media* delle $x_1,..,x_n$ *rispet-*

to alla funzione f se sostituito alle $x_1,..,x_n$ dà il medesimo valore per la f che le $x_1,..,x_n$; cioè se

$$f(x,..,x) = f(x_1,..,x_n).$$

Nota. (i) Una prima immediata constatazione è che nella definizione proposta, la funzione f altro non rappresenta se non ciò che in precedenza avevamo chiamato circostanza. Conseguentemente, per fornire una valutazione sintetica (una media) di un numero finito di grandezze occorre (e basta), in questo contesto, semplicemente considerare una opportuna funzione su tali grandezze.

(ii) Ovviamente, dati $x_1,..,x_n$, la $f(x,..,x) = f(x_1,..,x_n)$, intesa come equazione in x, può avere nessuna, una o più soluzioni (si pensi ad esempio alla funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$). Onde evitare situazioni non significative si richiede che la funzione circostanza f soddisfi la seguente condizione di unicità ed esistenza della media :

> per ogni y appartenente all'immagine di f *esiste uno ed un solo* elemento x tale che $y = f(x,..,x)$.

Posto allora $g(x) = f(x,..,x)$, la funzione g riesce invertibile; possiamo pertanto ottenere l' espressione *esplicita* della media di $x_1,..,x_n$:

$$m(x_1,.., x_n) = g^{-1}(f(x_1,..,x_n)).$$

(iii) Riesce agevole verificare che una funzione reale $m(x_1,.., x_n)$, di n variabili reali, è una media rispetto a qualche circostanza se e solo se $m(x,..,x) = x$ per ogni $(x,..,x)$ del dominio di m.

Al fine di chiarire ulteriormente la portata della definizione proposta e di mostrare come essa bene si adatti ai casi concreti, elenchiamo le diverse funzioni f che consentono di ottenere le usuali medie ponderate.

<u>media ponderata</u>	<u>funzione circostanza</u>
aritmetica: $x_m = \dfrac{a_1x_1+...+a_nx_n}{a_1+...+a_n}$	$a_1x_1+...+a_nx_n$
quadratica: $x_m = \left[\dfrac{a_1x_1^2+....+a_nx_n^2}{a_1+...+a_n}\right]^{\frac{1}{2}}$	$a_1x_1^2+...+a_nx_n^2$
geometrica: $x_m = \left[x_1^{a_1}\cdot...\cdot x_n^{a_n}\right]^{\frac{1}{a_1+..+a_n}}$	$x_1^{a_1}\cdot...\cdot x_n^{a_n}$
armonica: $x_m = \dfrac{a_1+...+a_n}{\frac{a_1}{x_1}+...+\frac{a_n}{x_n}}$	$\dfrac{a_1}{x_1}+...+\dfrac{a_n}{x_n}$
antiarmonica: $x_m = \dfrac{a_1x_1^2+....+a_nx_n^2}{a_1x_1+....+a_nx_n}$	$\dfrac{a_1x_1^2+....+a_nx_n^2}{a_1x_1+....+a_nx_n}$
esponenziale: $x_m = \dfrac{1}{\lambda}\ln\left[\dfrac{e^{\lambda x_1}+...+e^{\lambda x_n}}{n}\right]$	$e^{\lambda x_1}+...+e^{\lambda x_n}$.

4. E' facile rendersi conto che, ad eccezione della media antiarmonica, le medie sopra riportate, con $a_1 = .. = a_n = 1$, sono *trasformate* della media aritmetica ; cioè si ottengono da quest'ultima tramite una trasformazione continua e crescente nel senso che, indicata con m la media considerata, risulta per qualche funzione reale ϕ continua e crescente:

$$m(x_1,..,x_n) = \phi^{-1}\left[\frac{\phi(x_1)+...+\phi(x_n)}{n}\right],$$

per ogni $x_1,..,x_n$ del dominio di m (ad esempio, per le medie ponderate geometrica e armonica riesce, rispettivamente, $g(x) = \ln x$ e $g(x) = x^{-1}$). Ci si può allora chiedere quali siano le medie che sono trasformate della media aritmetica nel senso sopra precisato. La risposta a tale questito è fornita dal seguente notevole teorema:

Teorema (M.Nagumo - A.Kolmogoroff, 1930). Data una successione di funzioni reali $m_n(x_1,..,x_n)$, le seguenti due proposizioni sono equivalenti:

(a) la successione (m_n) verifica le proprietà di :
consistenza : $m_n(x,..,x) = x$;
monotonia : m_n è crescente rispetto ad ogni variabile ;
associatività : $m_n(x_1,..,x_n)$ non cambia se sostituiamo h degli $x_1,..,x_n$ con il valore ad essi associato da m_h ;
simmetria : m_n è una funzione simmetrica ;

(b) m_n è una trasformata della media aritmetica.

5. La definizione del Chisini riguarda medie di un numero finito di grandezze. Per comprendere come si possa estenderla al caso di un numero infinito di grandezze, consideriamo, ad esempio, un pendolo fisico costituito da una barra di lunghezza ℓ incernierata ad un estremo **O** e di massa complessiva unitaria. Indicata con M(x) la *funzione di distribuzione* della massa, cioè la funzione che per ogni $x \leq \ell$ fornisce la massa complessiva depositata sulla barra di estremi il punto **O** ed il punto **P** distante x da **O**, è noto che il momento statico del pendolo fisico è dato dalla:

$$\int_0^\ell x \, dM(x).$$

Ora, per determinare la *lunghezza media* ℓ_m rispetto al momento statico basta, evidentemente, determinare a quale distanza da **O** deve essere posta l'intera massa unitaria per ottenere un pendolo semplice avente il *medesimo* momento statico di quello fisico. Riesce:

(*) $$\ell_m = \int_0^{\ell} x \, dM(x).$$

Per mettere in luce la stretta analogia esistente tra questo caso continuo e quelli discreti prima considerati, introduciamo la funzione di distribuzione ε_x che *concentra* nel punto **P** distante x da **O** l'intera massa unitaria :

$$\varepsilon_x(t) = 0, \quad \text{se } t < x,$$
$$= 1, \quad \text{se } t \geq x.$$

Allora la (*) può scriversi :

$$\int_0^{\ell} x \, d\varepsilon_{\ell_m}(x) = \int_0^{\ell} x \, dM(x)$$

che consente di interpretare la lunghezza media del pendolo nel seguente modo: considerato il *funzionale reale* (la *circostanza*):

$$\mathcal{F}(M') = \int_0^{\ell} x \, dM'(x),$$

definito su tutte le possibili funzioni di distribuzione M' della massa unitaria sulla barra di lunghezza ℓ data, il numero reale x è la lunghezza media del pendolo fisico di distribuzione M, se sostituita la funzione di distribuzione ε_x alla M, essa dà il *medesimo* valore per $\mathcal{F}$ che M. Pertanto il ruolo svolto dalle $x_1,..,x_n$, dalla f e dalla x nella definizione del Chisini viene qui, rispettivamente, svolto dalla funzione di distribuzione M, dal funzionale $\mathcal{F}$ e dalla funzione di distribuzione ε_x.

Quanto appena esposto suggerisce, in modo del tutto naturale, la seguente definizione generale di media, dovuta a Bruno de Finetti (1931), riguardante le funzioni di ripartizione unidimensionali che, in questo contesto, sono utilmente interpretabili come distribuzioni di massa unitaria sulla retta.

Definizione. Considerato:
- un insieme Δ di *funzioni di ripartizione* (cioè funzioni F non decrescenti, continue a destra e tali che $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$) ;
- un funzionale reale $\mathcal{F}$ definito su Δ ,

il numero reale x si dirà *media* di $F \in \Delta$ *all'effetto della valutazione* di $\mathcal{F}$ se soddisfa l'uguaglianza :

$$\mathcal{F}(\varepsilon_x) = \mathcal{F}(F).$$

Nota. Ovviamente, come nel caso finito, si assume che sussista la seguente condizione di unicità e di esistenza della media:

per ogni $F \in \Delta$ esiste ed è unico un x tale che $\mathcal{F}(\varepsilon_x) = \mathcal{F}(F)$.

Posto allora $g(x) = \mathcal{F}(\varepsilon_x)$, la funzione g risulta invertibile; possiamo pertanto ottenere l' espressione *esplicita* della media di F :

$$M(F) = g^{-1}(\mathcal{F}(F)).$$

Poichè, come è facile verificare, un funzionale reale M definito su Δ è una media rispetto a qualche circostanza se e solo se $M(\varepsilon_x) = x$ per ogni $\varepsilon_x \in \Delta$, la definizione proposta può essere utilmente sostituita dalla seguente che non fa riferimento esplicito al funzionale circostanza.

Definizione. Considerato un insieme Δ di funzioni di ripartizione, un funzionale reale M definito su Δ si dirà una *media* su Δ se risulta

$$M(\varepsilon_x) = x$$

per ogni $\varepsilon_x \in \Delta$.

Analogamente a quanto fatto nella Sezione 3 per le medie di un numero finito di grandezze, elenchiamo i diversi funzionali $\mathcal{F}$ che consentono di ottenere le usuali medie generalizzate.

<u>media generalizzata</u>	<u>funzionale circostanza</u>
aritmetica: $x_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x)$
quadratica: $x_m = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dF(x) \right]^{\frac{1}{2}}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dF(x)$
geometrica: $x_m = e^{\int_{0}^{+\infty} \ln x \, dF(x)}$	$\int_{0}^{+\infty} \ln x \, dF(x)$
armonica: $x_m = \dfrac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \, dF(x)}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \, dF(x)$
antiarmonica: $x_m = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dF(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x)}$	$\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dF(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x)}$
esponenziale: $x_m = \frac{1}{\lambda} \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} \, dF(x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} \, dF(x).$

6 . Il teorema di Nagumo-Kolmogoroff, visto nella Sezione 4, mette in luce, tra l'altro, come si possano caratterizzare usuali medie tramite alcune loro proprietà *qualitative* (monotonia, associatività, etc.). Al fine di ottenere anche per le medie di funzioni di ripartizione un teorema analogo a quello appena citato, introduciamo le seguenti *proprietà qualitative* :

monotonia : $M(F) > M(G)$ ogniqualvolta $F < G$, ove $F < G$ significa che $F(x) \leq G(x)$ per ogni x e che $F(x') < G(x')$ per qualche x'. A parole: la media cresce se la massa unitaria viene spostata a destra.

associatività : $M[\alpha F + (1 - \alpha)G] = M[\alpha H + (1 - \alpha)G]$ ogniqualvolta $M(H) = M(F)$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. A parole: la media non cambia se parte della massa unitaria viene ridistribuita in modo tale da conservarne la media.

continuità : $M(F_n) \to M(F)$ ogniqualvolta $F_n(x) \to F(x)$ in ogni punto di continuità di F. A parole: le medie, di distribuzioni di masse unitarie convergenti ad una distribuzione di massa, convergono alla media della distribuzione limite.

Il prossimo teorema estende al contesto più generale nel quale ci siamo messi il teorema di Nagumo-Kolmogoroff; rileviamo che l'equivalenza tra le proposizioni (a) e (c) è dovuta al de Finetti (1931).

Teorema. Sia M una media definita sull'insieme $\Delta_{[a,b]}$ delle funzioni di ripartizione aventi supporto incluso in [a,b] (cioè tali che $F(x) = 0$ per ogni $x < a$ e $F(x) = 1$ per ogni $x \geq b$). Allora le seguenti tre proposizioni sono equivalenti :

(a) M è associativa e monotona ;

(b) M è associativa e continua ;

(c) M è una trasformata della media aritmetica generalizzata; cioè esiste una funzione reale ϕ continua e crescente tale che :

$$M(F) = \phi^{-1}\left[\int_a^b \phi \, dF \right]$$

per ogni $F \in \Delta_{[a,b]}$.

7. Al fine di enunciare una interessante caratterizzazione della media aritmetica generalizzata introduciamo le seguenti due ulteriori proprietà qualitative :

omogeneità : $M(F_k) = k\, M(F)$, ove $F_k(x) = F(\frac{x}{k})$. A parole: la media viene moltiplicata per k qualora l'intera massa venga ridistribuita tramite una omotetia di fattore k.

traslatività : $M(F_k) = k + M(F)$, ove $F_k(x) = F(x - k)$. A parole: la media aumenta di k qualora l'intera massa unitaria venga traslata di k.

Il seguente teorema, conseguenza del precedente, fornisce la preannunciata caratterizzazione.

Teorema. L'unica media definita sull'insieme $\Delta_{[a,b]}$ che sia associativa, monotona, continua, omogenea e traslativa è la media aritmetica generalizzata.

Dipartimento di Matematica applicata alle
Scienze economiche, statistiche e attuariali "B. de Finetti"
Università degli Studi
Trieste.

CHE COSA RESTA E CHE COSA DOVREBBE RESTARE DELLA MATEMATICA QUANDO SI E` DIMENTICATA LA MATEMATICA

FULVIA FURINGHETTI

SOMMARIO. *In questa nota si considerano alcuni aspetti dell'immagine della matematica al di fuori della comunità dei matematici. In particolare, si considerano due elementi da cui questa immagine trae origine: la divulgazione e la formazione scolastica.*

Su quest'ultimo punto si fissa l'attenzione al fine di offrire agli insegnanti spunti di riflessione sull'immagine che essi stessi hanno della disciplina che insegnano e sui meccanismi cognitivi attraverso cui questa si trasmette agli alunni.

INTRODUZIONE

In questa nota cerco di individuare qualche elemento che permetta di configurare quale sia l'*immagine della matematica* (*ciò che resta della matematica quando si è dimenticata la matematica*) al di fuori della comunità dei matematici. Per fare ciò ho preferito alla tradizionale forma dell'intervista in un conveniente campione di "gente comune", un'analisi di alcune testimonianze indirette, o meglio inconsce, offerte da aspetti della cultura dei nostri giorni che mi sembrano significativi per lo scopo che mi sono proposta.

Non mi soffermo su che cosa si intenda con il termine "immagine", che uso nella accezione che ad esso si dà attualmente con frequenza (talvolta persino fastidiosa) nel linguaggio colloquiale. Mi pare opportuno, al fine di non creare aspettative che non saranno soddisfatte, far osservare esplicitamente che non tratterò il tema della pervasività della matematica - "la nostra cultura invisibile" di Hammond (1978) - nei vari aspetti del mondo reale, tema che pure reputo centrale nella pratica dell'insegnamento e nella formazione degli insegnanti.

L'immagine della matematica tra la "gente comune" concerne soprattutto l'età adulta ed è molto difficile da modificare poiché ha remota origine nell'apprendimento scolastico. I meccanismi che intervengono nel processo della sua formazione sono tuttora oggetto di studio e di riflessione da parte dei ricercatori in educazione matematica. Il mio contributo alla discussione su questo punto deriva da studi condotti soprattutto da scienziati del nord America e di Israele e da mie ulteriori riflessioni che mi hanno portato ad elaborare una teoria della "credenze preesistenti". Le "credenze preesistenti" sono per me quelle idee che ho riscontrato preesistere nella mente degli studenti al momento in cui si insegnano determinati argomenti.

Queste riflessioni possono essere uno spunto iniziale (non certo una ricetta!) per cominciare una discussione, ben lungi dall'essere conclusa, su quello che *dovrebbe restare della matematica quando si è dimenticata la matematica.*

QUALCHE OSSERVAZIONE PRELIMINARE SULL'IMMAGINE DELLA MATEMATICA TRA I MATEMATICI

Periodicamente i matematici discutono la natura della matematica e la mentalità che caratterizza la ricerca in questo campo. Mi pare si possa dire che ciò è accaduto in particolare proprio nell'era moderna, dopo che essa si è assestata come disciplina a sé stante, nettamente separata da fisica, filosofia ecc. e che, d'altra parte, la crisi dei fondamenti della fine dell'Ottocento ed il rinnovato interesse per la filosofia della matematica abbiano stimolato questo tipo di discussione.

Un'eco di questa ricerca "esistenziale" dei matematici si coglie frequentemente negli articoli della rivista *The Mathematical Intelligencer*. Si vedano, per esempio, su questo tema Borel (1983) e Dehn (1983) che, seppur datati in alcuni passi, offrono buoni spunti di riflessione. Nel primo è adombrato, tra gli altri, uno dei temi centrali della discussione, cioè la dualità tra matematica come disciplina a sé stante con una sua interna valenza e bellezza - la «aesthetics of mathematical thought» di Dreyfus e Eisenberg (1984) - e la matematica come strumento per le applicazioni in altri ambiti disciplinari.

L'analisi storica dello sviluppo delle teorie matematiche sembra provare che in passato questa dualità fu accettata serenamente come parte della natura della matematica e dei suoi rapporti con le altre scienze - la matematica «regina e ancella delle scienze» di Bell (1951) -, mentre attualmente ci pare che essa sia vissuta da alcuni in maniera un po' schizofrenica nel senso che l'accettare uno di questi due aspetti - l'applicativo o il teorico - sembra escludere tassativamente l'altro, quando non addirittura portare a disprezzarlo. Questa dualità si ritrova nella discussione sui problemi educazionali connessi all'insegnamento della matematica e su di essa, esasperata e banalizzata (l'arido far di conto contro il ragionamento rigoroso, ma fine a sé stesso come un gioco) è, come vedremo, spesso costruita l'immagine della matematica al di fuori della comunità dei matematici.

Indubbiamente posizioni filosofiche quali il neoidealismo (su cui si sono formate molte generazioni di insegnanti di matematica), attribuendo alla scienza valore solo pratico e non conoscitivo, hanno propiziato la schizofrenia indotta da questa dualità. A ciò si aggiunga che lo sviluppo di teorie di filosofia della matematica, quali il neoempirismo e fallibilismo, ha messo ulteriormente in crisi l'immagine della matematica dal punto di vista della perdita della certezza. Si veda per approfondimenti su questo punto Hanna (1983) e Borga (1990). I ricercatori in educazione matematica stanno diventando sensibili ai legami di questi problemi di filosofia della matematica con i problemi dell'insegnamento/apprendimento della matematica e cercano di studiare le relazioni tra le diverse concezioni della matematica e i problemi educazionali. Si veda per approfondimenti su questo punto Hanna (1983) e Lerman (1989).

L'immagine della matematica tra i matematici è dunque tormentata e controversa, quindi non sorprende che sia motivo di dubbi tra gli insegnanti il decidere quale immagine trasmettere agli allievi.

Legata alla discussione sulla natura della matematica è la discussione sulla figura del matematico e su che cosa sia la creatività - e di conseguenza la ricerca - in matematica. Alcune classiche opere, per esempio Hadamard (1945) e Newman (1956), illustrano questo tema. Inoltre scritti come quelli di Halmos (1968), (1981), (1985) e quello di Hardy (1989) costituiscono un buon materiale di studio.

Direi invero che, in generale, la piú suggestiva ed esaustiva fonte su questo tema siano proprio le biografie stesse dei grandi matematici. Come ho già avuto modo di sottolineare in Furinghetti (1988) esse offrono eccezionali suggerimenti non solo sulla natura delle varie branche della matematica e sulle varie scoperte, ma su che cosa significa essere un matematico o, piú in generale, uno scienziato impegnato nella ricerca. Nella mia esperienza di ricercatore in educazione matematica ho sperimentato che, per quanto concerne gli studenti, la biografia (una buona biografia) getta piú luce sulla natura misteriosa (per gli studenti) della disciplina che non spiegazioni mirate sul tema. Per portare fin d'ora il discorso su un punto che mi sta a cuore (come si vedrà in seguito) osservo che, ovviamente, in una società multimediale come la nostra, la trasmissione della biografia e piú in generale di ogni conoscenza, può avvenire anche con mezzi diversi dai libri. Per esempio, recentemente ho visto a Leicester (U.K.), durante i lavori dell'interessante convegno HIMED 90, organizzato dalla British Society for the History of Mathematics, il film svedese sulla vita della matematica russa Sofya Kovalevskaya, intitolato *The hill on the dark side of the moon* (1983), efficacemente presentato dal famoso storico della matematica Ivor Grattan-Guinness. Una buona sceneggiatura, accettabilmente fedele alla realtà storica ed una buona regia hanno dato efficaci spunti per capire qualcosa sulla creatività matematica e sulla figura del matematico professionista. Del resto l'idea del cinema come mezzo per raccontare biografie non è nuova. In passato la televisione italiana ha trasmesso le biografie di Descartes e di Pascal curate da Roberto Rossellini.

MATEMATICA E MATEMATICI PER I NON MATEMATICI: IMMAGINE E STEREOTIPI

La matematica è una disciplina che gode di una singolare proprietà: essa è amata, odiata, capita, non capita, ma nella mente di tutti esiste una certa immagine di essa. Ciò dipende dal fatto che essa si configura come uno degli assi portanti della formazione scolastica di un individuo e costituisce il principale elemento unificante nell'educazione nelle diverse culture, poichè ha una sua intrinsecità dovuta al fatto che a differenza delle altre materie scolastiche quali letteratura, storia ecc. essa è abbastanza indipendente dal contesto culturale e da fattori territoriali. In particolare la lingua (non il linguaggio) incide sulla sua trasmissione meno che per altre discipline.

A proposito della matematica nelle varie culture, segnalo che in Bishop, Damerow, Gerdes e Keitel (1988) ci sono una panoramica dei recenti sviluppi del filone della ricerca in educazione matematica detto *etnomatematica* e cenni su studi di storia della matematica che stanno sviluppandosi da alcuni anni intorno alle culture non europee (su queste ultime si possono avere ulteriori notizie nelle riviste di storia della matematica).

Questa intrinsecità, da una parte conferma le mie affermazioni sul fatto che la matematica è uno degli assi portanti nella formazione dell'individuo, dall'altra fa riflettere su quanto l'apprendimento (virtuale o effettivo) della matematica sia un'esperienza scolastica che segna la persona dal punto di vista culturale.

Questa immagine della matematica (e la conseguente immagine della figura del matematico che risulta da essa condizionata) presente, secondo me, in ogni individuo con un minimo di scolarizzazione, è soggetta a stereotipi (termine che qui usiamo con connotazione non necessariamente negativa) che cerco di analizzare brevemente nel seguito.

Mi sembra utile a tale proposito citare alcuni passi letterari che ci possono ricondurre ad alcuni di questi stereotipi.

Comincio dal poeta inglese Samuel Taylor Coleridge (1772-1834), che, ragazzo diciasettenne al Christ's Hospital, scrive al fratello (cito nella mia traduzione, poiché non ho trovato una traduzione italiana ufficiale):

«Sono stato spesso sorpreso che la Matematica, la quintessenza del Vero, abbia trovato cosí pochi e tiepidi ammiratori. Un'assidua riflessione ed un'analisi minuziosa hanno alla fine rivelato la causa; mentre la Ragione è lussureggiante nel suo proprio Paradiso, l'Immaginazione viaggia stancamente in un arido deserto. Assistere la Ragione con lo stimolo dell'Immaginazione è il progetto della seguente opera [l'opera a cui allude è un problema di Euclide espresso in versi].».

In questo passo Coleridge dà una veste poetica (come, invero, è ovvio attendersi da un poeta) ad uno stereotipo dell'immagine della matematica al di fuori della comunità dei matematici: la matematica è per definizione la verità, ma, purtroppo, è una disciplina arida, fondata su un ragionamento privo di fantasia.

Chi si è cimentato nella ricerca matematica può valutare la scarsa rispondenza di questa immagine alla reale natura della disciplina.

Addirittura, è opinione di molti che se si considerassero in una gara sulla quantità di fantasia impiegata tutte le attività che implicano creatività, quindi non solo le scienze, ma anche le arti e la tecnologia, si dovrebbe concludere che musica e matematica sono in testa, poiché i risultati che si ottengono in queste attività creative sono un intrinseco prodotto dello spirito, nel senso che essi non sono una scoperta di qualcosa già presente in natura (vedere la fisica) o qualcosa che parte, con tutta la trasfigurazione intermedia dovuta all'artista, dalla natura (vedere le arti figurative) o che ha un obiettivo pilotato dalla funzionalità (vedere la tecnologia e l'architettura).

Piú positiva è l'opinione riportata dallo scrittore italiano Umberto Eco, il quale scrive ne *Il nome della rosa*, Bompiani, Milano, 1980, pagine 218-219:

«"Solo nelle scienze matematiche, come dice Averroè, si identificano le cose note per noi e quelle note in modo assoluto." [...] "Le conoscenze matematiche sono proposizioni costruite dal nostro intelletto in modo da funzionare sempre come vere, o perché sono innate o perché la matematica è stata inventata prime delle altre scienze. E la biblioteca matematica [quella in cui è ambientata la vicenda] è stata costruita da una mente umana che pensava in modo matematico, perché senza matematica non fai labirinti."».

Lo stereotipo a cui ci si può qui ricondurre è quello della matematica come attività di ragionamento perfetto e quindi per traslato come sinonimo di verità e certezza. Tale stereotipo si ritrova in molti modi dire ed espressioni del linguaggio comune («la matematica non è un'opinione»). In questo brano risulta sottolineata l'importanza della modellizzazione del problema da risolvere come mezzo efficiente per arrivare alla soluzione.

L'idea della modellizzazione, anzi della matematica come una della chiavi di lettura della realtà fisica è molto ben espressa nel seguente brano dello scrittore tedesco Heinrich Böll (1917-1985), il quale scrive in *Foto di gruppo con signora*, traduzione di Italo Alighiero Chiusano, Einaudi, Torino, 1972, pagina 26:

«Molto sfortunata fu Leni invece con due materie strettamente apparentate: la religione e l'aritmetica (piú tardi la matematica). Se anche a uno solo dei suoi maestri o delle sue maestre fosse venuta l'idea di far capire già alla piccola Leni, quando aveva sei anni, che il cielo stellato, ch'essa amava tanto, offre delle possibilità di avvicinamento fisico e matematico, essa non avrebbe opposto resistenza né all'abbaco, né alla tavola pitagorica, di cui aveva lo stesso orrore che altre persone hanno per i ragni.».

Questo brano in maniera semanticamente piú corretta di quanto abbia fatto il giovane Coleridge introduce un sapore poetico nel discorso matematico e mi piace perché in maniera concisa, ma pregnante, illustra certe potenzialità educative e un corretto approccio didattico per quanto concerne l'apprendimento della matematica.

Non è questo l'unico autore che dimostra un'inconscia sensibilità verso problemi di apprendimento della matematica. Il poeta italiano Giacomo Leopardi (1798-1837) scrive nello *Zibaldone* alcune pagine sulla matematica, in particolare una dissertazione su numeri ordinali e cardinali che vale la pena di leggere (come tutto Leopardi). In essa il poeta ipotizza l'opportunità di un'introduzione dei primi che preceda i secondi, sulla base di ipotesi sul loro uso da parte degli uomini primitivi. Si deve considerare a proposito di questo brano che esso è stato scritto molti decenni prima della discussione sui numeri e i fondamenti dell'aritmetica nell'ambito logico-matematico.

Naturalmente, a proposito del buon approccio didattico alla matematica offerto da letterati non si può non pensare alle opere di Lewis Carroll, che non solo sono pervase di matematica, ma anche sono ricche di spunti didattici (specialmente per l'introduzione della logica) come ho già osservato in Furinghetti (1988). Un libro recentemente uscito, forse non ancora tradotto in italiano al momento in cui scrivo, sviluppa questi spunti in maniera adattabile a vari livelli scolari. D'altra parte il pastore Carroll (Charles Lutwidge Dodgson, 1832-1898) era un educatore e insegnante di matematica e quindi questo lato della sua produzione letteraria non sorprende certo.

Nella letteratura il tema dell'esperienza scolastica che condiziona l'immagine della matematica è espresso in maniera molto efficace anche da altri autori, oltre il già citato Böll.

L'austriaco Robert Musil (1880-1942) nel celebre romanzo *L'uomo senza qualità* dedica alcune pagine alla discussione sulla natura della matematica e alla sua immagine nella società, con una certa cognizione di causa data la sua formazione di ingegnere (un altro ingegnere grande scrittore come Carlo Emilio Gadda).

Riporto il seguente brano nella traduzione di Anita Rho dall'edizione di Einaudi, Torino, 1957, pagine 44-45 del volume 1.
«Non occorre davvero dilungarsi troppo sull'argomento, giacché quasi tutti gli uomini oggi si rendono ben conto che la matematica è entrata come un demone in tutte le applicazioni della vita. Forse non tutti credono alla storia del diavolo a cui si può vendere l'anima, ma quelli che di anima devono

intendersene, perché in qualità di preti, storici e artisti ne traggono lauti guadagni, attestano che essa è stata rovinata dalla matematica, e che la matematica è l'origine di un perfido raziocinio che fa, sí, dell'uomo il padrone del mondo, ma lo schiavo della macchina. L'intima sterilità, il mostruoso miscuglio di rigore nelle minuzie e di indifferenza per l'insieme, la desolata solitudine dell'uomo in un groviglio di particolari, la sua inquietudine, la malvagità, la spaventosa aridità di cuore, la sete di denaro, la freddezza e la violenza, che contraddistinguono il nostro tempo, sarebbero secondo questi giudizi unicamente e semplicemente conseguenze del danno che un ragionare logico e rigoroso arreca all'anima! E cosí anche allora, quando Ulrich divenne matematico, v'erano persone che predicevano il crollo della cultura europea perché l'uomo non albergava piú in cuore né fede né amore, né innocenza né bontà; ed è significativo notare che tutti costoro da ragazzi e scolari erano cattivi matematici. Con ciò essi ritennero piú tardi per dimostrato che la matematica, madre delle scienze esatte, nonna della tecnica, fosse anche la matrice di quello spirito che ha poi prodotto i gas asfissianti e gli aeroplani da bombardamento.».

L'immagine che emerge anche da altri passi della stessa opera è molto complessa e tormentata: essa si può riferire allo stereotipo della matematica come scienza arida, con l'aggiunta di un fondo di acredine nei confronti della disciplina il quale, a mio parere, non è cosí diffuso in questa forma esasperata (se non fra gli ingegneri che hanno molto sofferto la parte propedeutica di matematica loro somministrata nel biennio).

Ancora da Musil è quest'altra citazione, un po' piú serena, da *Il giovane Törless* che mi è stata riferita testualmente, ma su cui non ho altre informazioni: «La matematica è tutto un mondo a sé e bisogna esserci vissuti dentro un bel po' per sentire tutto quello che, in essa, è necessario».

Il seguente brano di Stendhal (Marie-Henry Beyle, 1783-1842) fissa in maniera molto pregnante l'attenzione sull'educazione matematica e sull'esperienza scolastica come fondamentale nella formazione dell'individuo:

«...Amavo tanto più la matematica quanto più disprezzavo i miei insegnanti, i signori Dupuy e Chabert. Malgrado la grandiloquenza e cortesia, la soave e solenne aria che il signor Dupuy assumeva quando parlava a qualcuno, avevo abbastanza acume da intuire che egli era infinitamente più ignorante del signor Chabert. Il signor Chabert, che nella gerarchia sociale della borghesia di Grenoble stava così sotto il signor Dupuy, qualche volta nelle mattine di domenica o giovedì prendeva un volume di Eulero o ... e risolutamente affrontava le difficoltà.

Egli aveva ciò nonostante sempre l'aria d'un farmacista che sa la buona ricetta, ma niente mostrava come queste *ricette* nascano le une dalle altre, nessuna *logica*, nessuna filosofia in quella testa; per non so quale meccanismo d'educazione di vanità, forse per religione il buon M. Chabert dimenticava persino il nome di queste cose.

Il mio entusiasmo per la matematica può aver avuto come sua base principale la mia ripugnanza per l'ipocrisia [...].

Dal mio punto di vista, l'ipocrisia era impossibile in matematica e, nella mia semplicità giovanile, pensavo che doveva essere così in tutte le scienze a cui, come mi era stato detto, era applicata. Che stupore per me scoprire che nessuno poteva spiegarmi come accadeva che: meno moltiplicato meno fa più (- x - = +)! (Questa è una delle tesi fondamentali per la scienza nota come *algebra*).

Non solo nessuno mi spiegava questa difficoltà (ed è sicuramente spiegabile perchè conduce a verità), ma, ciò che era peggio, essi la spiegavano su ragioni che erano evidentemente lontane dall'esser chiare a loro stessi.

Il signor Chabert, quando lo incalzavo, diventava confuso, ripetendo la sua *lezione*, proprio quella lezione contro la quale avevo sollevato le mie obiezioni, ed infine sembrava dirmi "Ma è l'usanza; ognuno accetta questa spiegazione. Eulero e Lagrange, che presumibilmente erano bravi quanto voi, l'hanno accettata!"».

Mi pare che tutti gli stereotipi sugli insegnanti di matematica e la loro (presunta) freddezza, sulla matematica come *non sense* intellettuale (si pensi a questo proposito anche alla commedia *La lezione* di Jonesco) siano qui ben adombrati e spiegati. Forse il brano, cosí come le altre pagine sull'esperienza scolastica del protagonista del romanzo, andrebbe proposto ai futuri insegnanti per farli riflettere sulle aspettative culturali degli alunni e su come il deludere tali aspettative segni intellettualmente l'individuo, specialmente se esso è sensibile.

Mi piace confrontare questa immagine che emerge dalla letteratura con una immagine che emerge da un'altra forma d'arte che, come ho già accennato sopra, io considero molto efficace e attuale e che amo molto, cioè il cinema. Mi sembra che piú spesso di quanto si faccia esso andrebbe considerato non solo come momento ludico, ma come espressione di cultura e come veicolo di informazioni sulla società. Per esempio, nel caso specifico dell'indagine sull'immagine della matematica tra la cosiddetta "gente comune", esso offre molti inaspettati spunti.

Può sorprendere, considerando le prime risultanze sull'immagine della matematica emerse precedentemente che qualcosa concernente tale disciplina sia presente, si badi bene non come oggetto di narrazione, come nel caso descritto in Emmer (1983), ma come espediente narrativo, in una forma di comunicazione in generale ritenuta piú di intrattenimento. In realtà ciò è giustificato da fatti oggettivi concreti. In primo luogo, come si è precedentemente osservato, una certa immagine della matematica è presente in ognuno di noi ed è spiegabile che piú o meno inconsciamente affiori in determinate circostanze. Inoltre la caratteristica della matematica di essere elemento unificante delle varie culture, cosí come il fatto che iconograficamente essa permetta rapidi e chiari cenni narrativi, gioca un ruolo fondamentale in una forma di comunicazione, quale è il cinema, che deve avvalersi di espedienti di trasmissione diversi dalla scrittura del romanzo e della narrazione orale.

Va inoltre aggiunto a quanto precedentemente detto che c'è un rilevante interesse del cinema per il mondo della scuola. Un regista che citerò fra poco, Weir, ha diretto recentemente un bel film sul mondo della scuola (*L'attimo fuggente*, *Dead poets society*, 1989). Il regista Ramon Menendez ha tratto da un romanzo di successo il film *Alzati e fatti valere* (*Stand and deliver*, 1988) sulla vicenda realmente accaduta dell'insegnante di matematica Jame Escalante che per mezzo della matematica recupera socialmente alcuni giovani della parte piú modesta della periferia di Los Angeles, mettendoli in grado di essere ammessi in alcune prestigiose università americane (si veda sulla vicenda l'articolo di Furio Colombo su *La Stampa* (1/7/1988, 122, n. 138). Il film ha suscitato interesse nel mondo della scuola (a questo proposito si vedano, per esempio, le "Notices" su *Mathematics Teaching*, n. 129 (1989), 44).

Le citazioni che potrei fare sono veramente molte e prese da varie tipologie di film. Comincio anche qui con la poesia. Ne *Il Mago di Oz* (*The Wizard of Oz*, Victor Fleming, 1939) c'è una scena in cui l'uomo di paglia, uno dei tre amici della bambina protagonista del racconto, ricevuto dal mago il cervello, per provarne l'efficenza enuncia una specie di teorema di Pitagora (forse senza troppe preoccupazioni di correttezza da parte dello sceneggiatore). Questo è un caso di citazione della matematica come sinonimo del corretto ragionare.

In due film del tutto diversi, accomunati da una citazione della matematica molto simile, troviamo invece lo stereotipo della matematica come estraneità e astrazione dalla vita e, per traslato, come purezza. Nella scena de *Il dottor Zivago* (*Doctor Zivago*, David Lean, 1965) in cui la protagonista, una studentessa adolescente e ignara, sta per essere sedotta, il regista per dare un'idea della lontananza di Lara da ciò che sta per accaderle, inquadra in dettaglio con la macchina da presa il libro che ella sta studiando: è un libro di geometria euclidea. Lo stesso espediente narrativo è usato in *Picnic ad Hanging Rock* (*Picnic at Hanging Rock* , Peter Weir, 1980) quando il regista vuole dare un'idea di come gli insegnanti e gli allievi siano lontani da quanto sta loro per accadere. A questo proposito aggiungerò che in entrambi questi casi la geometria interviene come paradigma di perfezione e astrazione, stereotipo presente in molte situazioni (si pensi alla frase di Dante ne *Il convivio* «La geometria è senza macula d'errore e certissima per sé»).

Il ruolo positivo della matematica, sinonimo di vero, integrità e giustizia, emerge ripetutamente nel film *Il sipario strappato* (*The torn curtain*, Alfred Hitchcock, regista con un passato di studi in ingegneria, 1966). Per esempio è significativo che π sia scelto come simbolo del gruppo di personaggi "buoni" che aiutano il protagonista della vicenda. Nel corso del film c'è un tentativo di spiegazione (grosso modo) del significato di questo simbolo.

Associata all'immagine della matematica che abbiamo rilevato precedentemente, la figura del matematico è quella di un uomo mite (finché non si ribella alle angherie e ingiustizie), distratto, timido, ingenuo e sostanzialmente aggirabile, ma anche dotato di precise (talvolta rigide) idee etiche e morali. Queste caratteristiche compaiono nel personaggio del professore universitario protagonista di *Cane di paglia* (*Dog of straw*, Sam

Peckinpah, 1971) e nell'insegnante di matematica di scuola secondaria in *Bianca* (Nanni Moretti, 1985).

Un altro luogo comune relativo ai matematici (femminilità e matematica incompatibili) si trova nel film *Un tram che si chiama Desiderio* (*A streetcar named Desire*, Elia Kazan, 1951) tratto da un lavoro teatrale di Tennessee Williams (1914-1989). La protagonista Blanche per darsi una rispettabilità mente sul suo passato e dice al suo corteggiatore di essere un'insegnante, ma quando le si chiede se insegna matematica, nega sdegnata come se si trattasse di un attentato alla sua femminilità.

Dei tanti cenni narrativi che fanno pensare ad un cattivo rapporto scolastico con la matematica ricordo un Woody Allen insolitamente banale, che in *Radio days* (1987), per far capire che un suo compagno di scuola è antipatico, gli fa snocciolare formule matematiche durante un incontro casuale al Luna Park.

LA DIVULGAZIONE MATEMATICA: TENTATIVI E LIMITI

Mi pare si possa dire che le varie immagini della matematica che si ritrovano negli adulti hanno origine prevalentemente nelle esperienze scolastiche. L'atteggiamento nei confronti della matematica da parte degli adulti con infelici esperienze scolastiche alle spalle è di due tipi: i pochi che sono stati in grado di meditare autonomamente sulla sua reale natura rimpiangono il cattivo approccio loro impartito, gli altri maturano una repulsione e un rifiuto per essa. Pare certo che sia molto difficile a livello adulto intervenire a modificare questa immagine, se non ricorrendo a un programma mirato a costruirla ex novo, come quello descritto in Burton (1987). La matematica è non solo nozioni e concetti, ma anche e soprattutto metodo, educazione e addestramento. Parafrasando la celebre frase attribuita a Euclide (non esistono vie regie alla geometria) si può dire: non esistono vie regie alla matematica.

Per quanto concerne la modifica dell'immagine, molti ripongono speranze nella divulgazione. Su questo punto si accentra l'interesse anche degli educatori matematici, per esempio nel 1989 l'annuale convegno I.C.M.I. (commissione internazionale per l'istruzione matematica) svoltosi a Leeds (U.K) è stato dedicato al tema della divulgazione matematica. La discussione preparatoria ai lavori, apparsa in Howson, Kahane e Pollak (1988), è un interessante punto di riferimento.

D'altra parte è ben noto che la divulgazione scientifica presenta oggettive difficoltà e che, in particolar modo, è difficoltoso divulgare la matematica. Il dibattito su questo punto è abbastanza vivace, come provano le periodiche considerazioni che appaiono come accompagnamento delle recensioni dei libri di divulgazione scientifica sugli inserti culturali dei giornali (specialmente *Tutto libri* de *La Stampa* e *Mercurio* de *La Repubblica*). Recentemente Giorgio Israel e Enrico Bellone recensendo su *Mercurio* libri di divulgazione matematica e fisica, hanno avuto modo di scrivere su questo tema; un intero numero de *Il Manifesto* (1/12/1988, 18, n. 281) è stato dedicato alla divulgazione. In esso Gianfranco Bangone ne analizza alcuni aspetti e Tullio Regge, scienziato attivo anche nel campo della divulgazione, in un'intervista mette in evidenza alcune difficoltà del divulgare anche per scienziati illustri (per esempio quella di divulgare senza, nello stesso tempo, essere criticato dai colleghi per l'inevitabile approssimazione dell'esposizione).

A queste difficoltà di carattere generale se ne aggiungono alcune piú locali, inerenti il mondo culturale italiano. Prima di tutto bisogna osservare che i grandi matematici italiani del nostro secolo, mentre hanno dimostrato un buon interesse per i problemi della didattica della matematica (un nome per tutti, Enriques), hanno dimostrato uno scarso interesse per la divulgazione, in questo differenziandosi dai loro colleghi fisici, biologi ecc. che sono sempre stati piú attenti all'immagine.

Infine in Italia il problema delle due culture, la fortuna del neoidealismo di cui si è detto precedentemente, la propensione degli intellettuali italiani e dei politici hanno avuto le conseguenze ben note non solo nella scuola, ma anche in altri aspetti della vita. Per esempio, per quello che qui ci concerne, fino a non molti anni fa' in Italia c'era una tradizione modesta nella pubblicazione di libri e riviste di divulgazione scientifica.

Ora la situazione sta cambiando e in primo luogo si sta modificando l'atteggiamento degli editori che possono condizionare notevolmente gli orientamenti culturali: si pubblica un discreto numero di opere nel campo della divulgazione scientifica (persino matematica!), pur restando sempre lontani dalla situazione anglosassone, a proposito della quale si può osservare che quasi tutte le pubblicazioni italiane di divulgazione scientifica (e ancora in particolare matematica) sono traduzioni dall'inglese. Ritengo che in questo cambiamento, per quello che riguarda la matematica, intervenga (ancora una volta!) la diffusione dei personal computer, la quale ha contribuito a convogliare, anche se spesso (purtroppo) forse solo superficialmente, l'interesse della gente su situazioni vicine alla matematica.

Mi pare comunque che sussistano sempre le perplessità di fondo prima accennate e riprese ancora recentemente da Emmer (1990), per cui penso che l'analisi sul problema della divulgazione scientifica, a suo tempo opportunamente promossa dal C.O.A.S.S.I., darebbe ora risultati numerici e conclusioni un po' diversi da quelli esposti in Bianca, Rigutti e Santaniello (1986), fermo restando che la matematica continuerebbe ad occupare uno degli ultimi posti nella classifica concernente il numero di pubblicazioni di divulgazione.

Un elemento che invece considero di grande interesse dal punto di vista didattico e del miglioramento dell'immagine della matematica è quello delle mostre e dei musei sulla matematica.

Su questo tema non avrei saputo a priori fare previsioni, avrei anzi espresso un certo scetticismo; ora le esperienze che ho fatto mi stanno convincendo che le varie forme di iconografia riferite alla matematica, se ben gestite, possono risultare efficaci per l'educazione e per la divulgazione matematica. Si veda su questo tema Brown e Porter (1990).

Ho visto sezioni di musei dedicate alla matematica molto belle (quello di Los Angeles contiguo a un McDonald's), confuse e mal gestite (La Villette a Parigi: si veda per notizie sul suo allestimento Strichartz (1983)), ma sempre interessanti e stimolanti. Lo stesso discorso vale per le mostre. Le ultime due che ho visitato, *L'occhio di Horus. Inerari nell'immaginario matematico* a Bologna e *Les Mathématiques en Méditerranée* a Marsiglia hanno avuto un grosso successo di pubblico e costituiscono senz'altro un gradevole approccio alla matematica.

ALCUNI ESEMPI DI TENTATIVI DI MIGLIORAMENTO DELL'IMMAGINE DELLA MATEMATICA ATTRAVERSO INIZIATIVE ALTERNATIVE ALL'INSEGNAMENTO TRADIZIONALE

L'immagine della matematica si forma a scuola ed è dunque a scuola che bisogna agire se si vuole modificare questa immagine in maniera piú aderente alla realtà e, alla lunga, piú fruttuosa per l'educazione dell'individuo.

Le azioni che si possono attuare sono di due tipi (che non si escludono a vicenda, ma possono essere complementari): la prima consiste ovviamente in un insegnamento consapevole dei problemi educazionali che si stanno affrontando, la seconda consiste in *interventi alternativi* all'insegnamento di routine effettuati dall'insegnante stesso o dall'esterno.

Chiaramente, da ricercatore in educazione matematica, vedo con maggior favore il primo tipo di azione, ma mi sembra qui opportuno discutere anche il secondo, poiché avendo esaminato esperienze mie o di altri ricercatori ho tratto la conclusione che esso ha delle potenzialità (ma anche dei pericoli), soprattutto se attuato in situazioni particolari, per esempio nei due casi opposti di studenti dotati o studenti demotivati.

L'obiettivo di questi *interventi alternativi* è, in prima istanza, come dicono Zeeman e Stewart (1985), quello di incoraggiare gli studenti nell'arte e nella pratica della matematica. Esso può essere perseguito:

• scegliendo argomenti caratterizzanti importanti branche della matematica e sottolineando gli elementi di sorpresa ed eleganza
• dando agli studenti l'opportunità di risolvere e calcolare.

Questo è ciò che hanno fatto i due studiosi citati in un'esperienza condotta con studenti particolarmente interessati alla matematica della fascia d'età 12-13 anni. Questa esperienza consiste in una serie di lezioni supplementari da loro tenute fuori dell'orario scolastico su:

Geometria e prospettiva
Algoritmi euclidei e frazioni continue
Geometria piana e geometria solida
Equazioni diofantee
Probabilità
Ingranaggi
Giroscopi
Nodi
Teoria delle catastrofi.

I lavori sono organizzati in modo che ci sia un continuo coinvolgimento attivo degli studenti e quindi un controllo (anche se senza valutazione) dell'apprendimento.

Chi conosca l'interesse umano, la versalità e la disponibilità di Christopher Zeeman, il creatore con René Thom della "teoria delle catastrofi", non si stupisce che uno scienziato di tale fama si sia impegnato in questa attività per lui insolita. E del resto non è egli il solo matematico di valore che si impegna su questo piano. Anche Serge Lang ha fatto una esperienza analoga, discussa in Adda (1987) e Lang (1986), consistente in seminari rivolti a studenti pre-universitari, quindi piú orietata alla ricerca avanzata.

Nell'ottica di queste attività si colloca anche un'esperienza condotta su iniziativa del Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova proprio con lo scopo di migliorare l'immagine "esterna" della matematica. Un gruppo di docenti del Dipartimento (tra cui me stessa per le geometrie non euclidee) ha preparato una serie di conferenze con questi titoli (altri titoli sono stati proposti nelle successive tornate dell'attività):

Topologia, grafi, informatica
I numeri naturali e il paradosso di Russell
Logica e fondamenti della matematica
Problemi aperti in teoria dei numeri
Dalla geometria classica alle geometrie non euclidee
Classificazioni delle superficie
Relatività speciale: evidenze sperimentali e fondamenti
Spazi vettoriali di dimensione infinita e applicazioni
Topologia delle curve e delle superficie
Applicazioni della statistica.

Un pacchetto predisposto dal Dipartimento, costituito da tre seminari scelti tra i precedenti è stato offerto nelle scuole secondarie superiori della provincia di Genova che hanno aderito all'iniziativa. Purtroppo l'esperienza è stata progettata in modo che la partecipazione attiva degli insegnanti delle scuole è risultata limitata (di ciò si sono giustamente rammaricati alcuni insegnanti): essa si è ridotta solo all'adesione all'iniziativa e eventualmente a orientare gli studenti sull'opportunità di partecipare, a seconda delle loro basi matematiche. Questo fatto ha influito sulla ricaduta dell'iniziativa tra gli studenti coinvolti. Infatti le esperienze fatte senza la partecipazione attiva degli insegnanti e talvolta anzi, come nel caso della nostra, condotte come lezioni ex cattedra con poco coinvolgimento dei ragazzi e senza controllo sull'apprendimento, hanno limiti educativi. Cosí, anche se questa attività non è stata inutile, ma anzi abbiamo avuto qualche buon riscontro, non mi sembra si possa dire che essa sia la via migliore per intervenire sull'immagine della matematica nella globalità della popolazione studentesca. Le iniziative descritte sono, in sostanza, dirette a studenti particolari (i piú motivati) e non alla globalità di una classe.

Io con il mio gruppo di lavoro ho fatto un'esperienza analoga alla precedente, mirata però all'introduzione di elementi di informatica in corsi di matematica della scuola secondaria superiore. In questa esperienza, descritta in Bottino, Forcheri, Furinghetti e Molfino (1986) sono stati coinvolti in ogni fase della preparazione anche gli insegnanti degli alunni cui l'esperienza era diretta: i risultati ci sono sembrati soddisfacenti, anche per merito di questo elemento.

Sulla base delle precedenti considerazioni e delle esperienze già fatte, ho fiducia che l'*intervento alternativo* da me proposto con il volumetto Furinghetti (1988) possa avere buone ricadute didattiche. In breve rammento che tale intervento consiste nel proporre agli studenti una lettura opportunamente guidata di testi di argomento matematico (non manuali scolastici) e il volumetto raccoglie alcune schede per gli insegnanti che possono orientare nella scelta dei testi da proporre. Si può non essere d'accordo né sui titoli dei testi da noi proposti, né sullo stile, che per scelta nostra non è mai troppo critico, ma la filosofia di fondo, esposta diffusamente in Furinghetti (1987) mi sembra condivisibile e fruttuosa sia per studenti cosiddetti bravi, sia per studenti "tiepidi" verso la matematica.

Poiché il lavoro di introdurre nell'attività scolastica letture alternative è stato sperimentato in un certo numero di classi, so che esso richiede molto impegno da parte degli insegnanti, ma che vale la pena di impegnarvisi, poiché si ha un effettivo guadagno riguardo al problema di creare negli studenti una immagine della matematica più ricca.

COME E PERCHÉ SI FORMA A SCUOLA UNA CERTA IMMAGINE DELLA MATEMATICA: UN TENTATIVO DI SPIEGAZIONE OFFERTO DA RICERCHE IN EDUCAZIONE MATEMATICA

Sulla base della convinzione che l'immagine della matematica è condizionata (purtroppo spesso in negativo) dall'esperienza scolastica dell'individuo in maniera piú radicale di quanto accade per le altre discipline scolastiche, mi sembra sensato concludere la discussione sull'immagine della matematica con alcuni cenni sulle teorie dell'apprendimento che possono aiutare a spiegare la genesi di tale immagine.

In primo luogo osservo che proprio per la sua natura proteiforme, la matematica ha un'immagine che non è univoca neppure per l'insegnante, il quale ha una sua inconscia concezione della disciplina e inconsciamente la trasmette all'allievo, come è discusso in Chiarugi e Furinghetti (1990), Gonzales Thompson (1984). Per inciso, aggiungo che certi studi che sto conducendo con Bottino sembrano provare che qualcosa di analogo accade per un'altra materia proteiforme (l'informatica), che è anch'essa oggetto di diverse concezioni da parte degli utenti (insegnanti compresi). Ovviamente data la maggior limitatezza del contesto culturale in cui si forma, l'immagine della matematica elaborata dall'allievo è piú povera di quella che gli è trasmessa dall'insegnante.

Il problema di fondo è che la matematica non tollera (o almeno non ha una tradizione di) un apprendimento globale. L'apprendimento nella matematica si sviluppa secondo fasi non in successione, ma intersecantisi, che a seconda del contesto (livello scolare, tipo di scuola,...) hanno diversi sviluppi cosí schematizzabili:

- una fase, per cosí dire, istituzionale e propedeutica in cui si introducono nozioni e concetti. Tale fase purtroppo spesso finisce per constare soprattutto di esercizi di routine per l'acquisizione di manualità su certe tecniche.
- una fase di applicazione di tecniche, nozioni e concetti visti precedentemente
- una fase di formalizzazione, generalizzazione e astrazione.

Un'immagine della disciplina rispondente al reale nasce da *un equilibrio di queste tre fasi*, ottenuto calibrando i tempi e l'impegno a seconda delle età degli alunni e degli obiettivi del corso di studi in oggetto.

Nella pratica scolastica si osserva talvolta un prevalere della prima fase (che è francamente la meno gratificante da tutti i punti di vista, sia per l'insegnante che per lo studente) e su di essa si concentrano l'attenzione e gli sforzi dello studente, anche perchè spesso su di essa è effettuata la valutazione dell'apprendimento. In questa prima fase si forma l'immagine della matematica che poi abbiamo ritrovato in altri contesti. Purtroppo mi pare anche di poter dire che questo orientamento nello spingersi verso un formalismo e meccanicismo fini a sé stessi si accentua con il crescere del livello scolare: si parte dalle situazioni relativamente concrete delle scuole elementari, si passa attraverso le espressioni delle medie ed il calcolo letterale del biennio per arrivare allo studio meccanico del grafico di una funzione del liceo scientifico o, peggio, all'anno di trigonometria che conclude la formazione scientifica negli studi classici.

Cosí chi arriva a fare quello che può essere un legittimo e doveroso punto di arrivo della formazione matematica - ovvero un tentativo di astrazione e generalizzazione - si innesta in un contesto di scetticismo e di rifiuto aprioristico e le nozioni introdotte diventano sempre piú estranee all'aspettativa dello studente.

La fase di applicazione si riduce spesso a sole applicazioni all'interno della disciplina sviluppate ancora in maniera piuttosto meccanica. Ciò deve essere motivo di disappunto perché questa fase ha un interesse non solo per arricchire l'immagine della matematica nella concezione dello studente, ma anche per arricchire l'insegnamento di una poliedricità culturale funzionale alla formazione globale dello studente (a prescindere dallo specifico della matematica). Per questo tipo di potenzialità e la relativa discussione si veda ad esempio Gaskell e Klamkin (1974), Guerraggio (1989).

Se si considera come l'apprendimento della matematica avviene, si può concludere che ha ragione Von Foerster (1985) quando dice che gli studenti vivono l'esperienza scolastica come una violenza sul loro modo di essere. Per molti di essi è realtà quanto Jonathan Swift ha immaginato accadere nei paesi fantastici da lui visitati (*I viaggi di Gulliver*, traduzione di Carlo Formichi, A. Mondadori, Milano, 1982, pagina 399):

«Visitai, infine, la scuola di matematiche, dove il maestro impartiva il suo insegnamento con un metodo che in Europa si stenterebbe persino a immaginare. Teorema e dimostrazione venivano nitidamente scritti sopra un'ostia sottile con inchiostro composto d'una essenza cefalica. Lo studente era tenuto a ingoiarla a stomaco vuoto, e, per tre giorni successivi, a mangiare soltanto pane e acqua. Via via che l'ostia era digerita, la essenza saliva al cervello portando seco il teorema. L'esito, però, non era stato fino allora conforme all'aspettativa, sia per causa di qualche sbaglio nelle dosi della composizione, sia per la birberia dei ragazzi, i quali, avendo a schifo quel bolo, di solito vanno a nascondersi e lo vomitano prima che possa fare effetto. Nessuno, inoltre, è riuscito ancora a persuaderli di praticare rigorosamente la lunga astinenza che la prescrizione richiede.».

Per fornire qualche spunto di riflessione sull'apprendimento della matematica nella pratica scolastica riprendo alcuni concetti della psicologia dell'educazione matematica che mi sembrano particolarmente attinenti alle problematiche che stiamo trattando. Vinner (1983), nell'ambito di una teoria già precedentemente illustrata in Vinner e Hershkowitz (1980) e applicata in altri lavori, dà queste definizioni che traduco *verbatim*:

• chiamiamo "concetto immagine" ("concept image") l'insieme delle proprietà associate ad un certo concetto e la loro rappresentazione mentale

• chiamiamo "concetto definizione" ("concept definition") una definizione verbale che spiega accuratamente il concetto in maniera non circolare.

Ai vari livelli scolari la costruzione dei concetti avviene secondo questo schema:

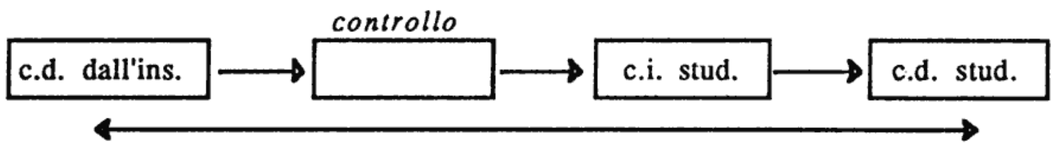


figura 1

Questo schema presuppone vuota la casella in cui si costruirà il c.i. dello studente, con possibilità da parte dell'insegnante di controllare il processo di formazione dei concetti. In realtà numerosi casi di studio provano che tale casella non è vuota, ma contiene c.i. preesistenti degli studenti e la formazione del concetto avviene secondo questo schema:

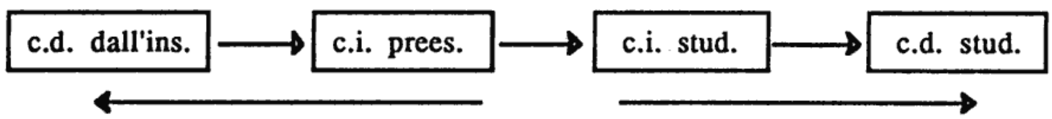


figura 2

Il passaggio dal c.d. dell'insegnante al c.i. dello studente non è sempre controllato dall'insegnante, poiché i c.i. preesistenti degli studenti talvolta ostacolano l'apprendimento: il risultato è che i c.d. dell'insegnante e i c.d. dello studente non sono collegati (nella figura 2 manca il collegamento che nella figura 1 indica la rispondenza dei c.d. di insegnanti e studenti).

Per illustrare le precedenti osservazioni riporto qui di seguito alcuni esempi di false credenze preesistenti nelle menti degli studenti su un certo concetto al momento in cui questo concetto sta per essere introdotto. Fornisco anche alcuni cenni di spiegazioni e rimando per i dettagli ai lavori sul tema citati.

Mi è piú stato piú facile trovare esempi riferiti a concetti abbastanza avanzati non solo a causa della mia maggiore pratica della fascia d'età 14-19 anni, ma anche per il fatto che i concetti preesistenti sono tanto piú numerosi col passare degli anni, poiché uno dei fattori che li propizia è l'esperienza scolastica che può propiziare l'accumularsi nozioni in forma non corretta, come è discusso in Furinghetti e Paola (1988a), Furinghetti e Paola (1988b).

Esempi

1. *Falsa credenza*:
L'operazione di moltiplicare due numeri dà sempre un numero maggiore dei due fattori.
Cause:
• nel linguaggio comune moltiplicare è associato ad aumentare
• gli esempi usualmente proposti inducono a inferire che...

2. *Falsa credenza*:
Nello stesso ordine di idee: la radice quadrata di un numero è minore di quel numero.

3. *Falsa credenza*:
L'altezza di un triangolo cade internamente al triangolo.
Cause:
• gli stereotipi indotti dalla visualizzazione creano la convinzione che...

4. *Falsa credenza*:
La proprietà di linearità vale per tutti gli operatori che si incontrano. Allora $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, $\sqrt{(a + b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\text{sen}(a + b) = \text{sen}\,a + \text{sen}\,b$ e cosí via.
Cause:
• un uso troppo "audace" della generalizzazione di situazioni note, come discusso anche in Fischbein (1990).

5. *Falsa credenza*:
Dato il grafico della funzione $f(x) = x$, se $x \geq 0$ e $f(x) = 0$, se $x<0$, esso non può essere grafico di una funzione continua. Per una discussione su questo punto si veda Tall e Vinner (1981).
Cause:
• nel linguaggio comune continuo può anche significare che non ci sono cambiamenti delle proprietà e quindi se si fissa l'attenzione su una certa proprietà...
6. *Falsa credenza*:
$|a| = a$, studiata in Chiarugi, Fracassina e Furinghetti (1990).
Cause:
• apprendimento precedente non corretto su casi mistificanti, per cui a è positivo se non è preceduto da segno
• difficoltà epistemologiche sul concetto di variabile.

CHE COSA DOVREBBE RESTARE DELLA MATEMATICA QUANDO SI È DIMENTICATA LA MATEMATICA

Mi sembra opportuno fissare l'attenzione degli insegnanti sul fatto che bisogna tener conto dell'esistenza degli schemi mentali preesistenti nella mente degli studenti, se si vuole dare efficacia all'insegnamento prevenendo il formarsi di quelle idee scorrette, su cui poi si costruisce un sapere "violento" che origina le squallide immagini della matematica che abbiamo visto sopra.

Considero la consapevolezza su questo fatto un buon punto di partenza per la discussione su ciò che dovrebbe restare della matematica quando si è dimenticata la matematica. Quanto a fornire un elenco preciso di contenuti o abilità, mi limito a dare alcune idee generali, che vanno discusse e sviluppate in rapporto all'età degli studenti, l'ambito culturale e tutti gli altri fattori ambientali inerenti l'insegnamento.

In primo luogo è opportuno che l'insegnante, pur nella limitatezza del suo contesto, e senza illusioni, si configuri con precisione l'obiettivo culturale matematico a cui vuole informare il suo insegnamento e lo persegua con quell'equilibrio tra manualità, astrazione e applicazione di cui ho detto sopra.

Mi sembra un buon traguardo, in riferimento sia ad un proseguimento degli studi all'università, sia alla formazione per il lavoro e, naturalmente, per la vita, che dell'insegnamento matematico restino questi elementi:

• le tecniche di base sulle operazioni rapportate alla presenza di strumenti di calcolo, ma non necessariamente superate da questa. Mi sembra opportuno che esse siano associate ai concetti di approssimazione e di ordine di grandezza, che permettono la previsione e la valutazione dei risultati (si vedano le sciocchezze dette nei telegiornali sui bilanci degli stati ecc. in cui milioni e miliardi sono termini intercambiabili);

• il concetto di sistema assiomatico, eventualmente anche al livello semiintuitivo di regola del gioco

• l'uso univoco, non ambiguo del linguaggio (anche quello naturale)

• l'abitudine al ragionamento deduttivo, almeno nel senso più elementare di "buon ragionamento"

• il concetto di modellizzazione di un problema.

Si usa il termine concetto, laddove si intende che possono mancare le tecniche, ma non l'idea generale che sta alla base.

Ciò premesso, da parte sua l'insegnante deve abbandonare alcune illusioni e essere disposto a una notevole tolleranza intellettuale. In Davis e Hersh (1988) è detto che «non c'è nessuna legge di natura, Dio o governo per cui tutti debbano conoscere la formula quadratica. La matematica è interessante e importante, ma anche arte, religione, letteratura, e molte altre cose lo sono.». Anche se non si condivide la filosofia della matematica che c'è alla base dell'opera degli autori, non si può non riflettere su questa affermazione e accettare che si può vivere felici o infelici indipendentemente dal rapporto con la matematica.

Su queste basi penso che si possa offrire agli studenti l'opportunità di elaborare un'immagine che chiamerò "ecologica" della matematica, intendendo con ciò un'immagine rispondente alla natura e rispettosa delle peculiarità di questa disciplina.

Dedico questo lavoro a mia madre Teresa Arvigo che mi ha molto incoraggiato quando ero studentessa di matematica e a mio padre Augusto (1913-1982), che quando avevo molto studiato ci accompagnava al cinema.

BIBLIOGRAFIA

Cito i dati che ho potuto desumere dalle edizioni che ho avuto la possibilità di consultare.

• Adda J.: 1987, "Review of the book of Serge Lang *Des jeunes et des maths. Un chercheur rencontre des collègiens*". Éditions Belin", *Educational Studies in Mathematics*, 18, 209-212.

• Bell E. T.: 1951, *Mathematics, queen and servant of science*, MacGraw-Hill, New York-Toronto-London.

• Bianca M., M. Rigutti e M. Santaniello: 1986, *Divulgazione scientifica e didattica delle scienze*, Le Monnier, Firenze.

• Bishop A. J., P. Damerow, P. Gerdes e C. Keitel: 1988, "Mathematics education and society (MES)", in A. Hirst and K. Hirst (editors.) *Proceedings of the Sixth International Congress on Mathematical Education*, J. Bolyai Mathematical Society, Budapest, Hungary. Esiste anche una raccolta dei lavori più significativi di questa sessione pubblicata dall'U.N.E.S.C.O.: C. Keitel, P.

Damerow, A. Bishop and P. Gerdes (editors) *Mathematics, Education and society*, Document Series N. 35, UNESCO, Paris.

• Borel A.: 1983, "Mathematics: art and science", *The Mathematical Intelligencer*, 5, n. 3, 9-17.

• Borga M.: 1990, "Logica matematica, fondamenti e filosofia della matematica oggi", in F. Furinghetti (a cura di), *Matematica oggi. Dalle idee alla scuola*, B. Mondadori, Milano, 181-186.

• Bottino R. M., P. Forcheri, F. Furinghetti e M.T. Molfino: 1987, "An attempt to integrate Mathematics and Computer Science in High School", in P. Bowie (editor) *Proceedings of the 38th CIEAEM*'s *meeting*, Southampton, U.K., (*Mathematics for those between 14 and 17, is it really necessary?*), The Cotswold Press Eynsham, Oxford, 115-120.

• Brown R. e T. Porter, "Making a mathematical exhibition", in *Proceedings I.C.M.I. Seminar 1989*, Leeds, (in corso di stampa).

• Burton L.: 1987, "From failure to success: changing the experience of adult learners of mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, 18, 305-316.

• Chiarugi I., G. Fracassina e F. Furinghetti: 1990, "Learning difficulties behind the notion of absolute value", in G. Booker, P. Cobb and T. N. De Mendicuti (editors) *Proceedings of the P.M.E. 14*, Oaxtepec (Mexico), 3, pp. 231-238.

• Chiarugi I. e F. Furinghetti: 1990, "La matematica nei bienni: nuovi programmi e vecchi problemi. Presentazione di un questionario di indagine", in F. Furinghetti (a cura di), *Matematica oggi. Dalle idee alla scuola*, B. Mondadori, Milano, 36-46.

• Davis P. J. e R. Hersh: 1988, *Il sogno di Cartesio*, Edizioni Comunità, Milano; trad. it. di *Descartes' dream*, Harvester Press Limited, Brighton, 1986.

• Dehn M.: 1983, "The mentality of the mathematician: a characterization", *The Mathematical Intelligencer*, 5, n. 2, 18-26.

• Dreyfus T. e T. Eisenberg: 1984, "On the aesthetics of mathematical thought", *For the Learning of Mathematics*, 6, n. 1, 2-10.

• Emmer M.: 1983, "Un esperimento di matematica visiva: i film della serie «arte e matematica»", in F. Furinghetti (a cura di), *Il ruolo della geometria nella cultura e nella scuola*, Tilgher, Genova, 93-108.

• Emmer M.: 1990, "Esiste una divulgazione matematica oggi in Italia?", comunicazione presentata al convegno *Il pensiero matematico nella cultura e nella società italiana degli anni '90*, Milano, 29-30 marzo 1990.

• Fischbein E.: 1990, "Intuition and information processing in mathematical activity", *International Journal of Educational Research*, 14, n. 1, 31- 50.

• Furinghetti F.: 1987, "Ipotesi per una biblioteca di area matematica", *N.U.M.I.*, 14, supplemento al n. 11, 45-52.

• Furinghetti F. (a cura di): 1988, *Ipotesi per una biblioteca di area matematica per studenti della scuola secondaria superiore*, Ecig, Genova.

• Furinghetti F. e D. Paola: 1988, "Wrong beliefs and misunderstandings about basic concepts of Calculus (age 16-19)", in *Proceedings of the 39th CIEAEM's meeting*, Sherbrooke, Québec, (*The role errors play in the learning and teaching of Mathematics*), Les Éditions de l'Université de Sherbrooke, 173-177.

• Furinghetti F. e D. Paola: 1988b, "Students' concept images on the concepts of infinity, infinitesimal, limit, continuity, $\varepsilon - \delta$", *manoscritto*.

• Gaskell R. E. e M. S. Klamkin: 1974, "The industrial mathematician views his profession: a report of the committee on corporate members", *American Mathematical Monthly*, n. 81, 699-716.

• Gonzales Thompson A.: 1984, "A relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice", *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.

• Guerraggio A.: 1989, "Matematica, modelli e società", *Rivista IBM*, 25, n. 4, 16-25.

• Hadamard J.: 1945, *The psychology of invention in the mathematical field*, Princeton University Press, Princeton.

• Halmos P. R.: 1968, "Mathematics as a creative art", *American scientist*, 56, 375-389.

• Halmos P. R.: 1981, "The heart of mathematics", *American Mathematical Monthly*, 87, 519-524.

• Halmos P. R.: 1985, *I want to be a mathematician: an automathography*, Springer Verlag, New York.

• Hammond A. L.: 1978, "Mathematics - Our invisible culture", in L.A. Steen, *Mathematics today. Twelve informal essays*, Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin,134. Si vedano gli altri articoli contenuti in questo volume e le relative bibliografie.

• Hanna, G.: 1983, *Rigorous proof in mathematics education*, OISE Press, Toronto.

• Hardy G. H.: 1989, *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano; trad. it. di *A mathematician's apology*, rev. ed. Cambridge University Press, New York, 1969 (orig. 1940).

• Howson A. G., P. Kahane e H. Pollak: 1988, " The popularization of mathematics", I.C.M.I. study n. 4, *Bulletin n. 24 of ICMI*, 1-10.

• Lang S.: 1986, *Encounters with Maths*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

• Lerman S.: 1989, "Constructivism, mathematics and mathematics education", *Educational Studies in Mathematics*, 20, 211-223.

• Newman J. R. (editor): 1956, *The world of mathematics*, Simon and Schuster, New York, settima edizione.

• Strichartz R. S.: 1983, "Mathematics on display", *The Mathematical Intelligencer*, 5, n. 2, 37-40.

• Tall D. O. e S. Vinner: 1981, "Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity", *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

• Vinner S.: 1983, "Concept definition, concept image and the notion of function", *International Journal for mathematical Education in Science and Technology*, 14, n. 3, 293-305.

• Vinner S. e R. Hershkowitz: 1980, "Concept image and some common cognitive paths in the development of simple geometric concepts", in *Proceedings of the P.M.E. 10*, Berkeley, 177-184.

• Von Foerster A.: 1985, "Cibernetica ed epistemologia: storia e prospettive" in G. Bocchi e M. Ceruti (a cura di), *La sfida della complessità*, Feltrinelli, Milano.

• Zeeman C. e I. Stewart: 1985, "Mathematics for young people: the Royal Institution Masterclass", *The Mathematical Intelligencer*, 7, n. 3, 59-64.

Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova
Via L.B.Alberti 4
I 16132 Genova
Italia

INDICE

Presentazione 3

E. Barone *Somme infinite o serie numeriche* 6

E. Barone *La radice quadrata nella scuola media* 16

F. Speranza *Riflessioni sul dilemma finito/infinito* 26

M. Biliotti *Codici correttori d'errori* 42

C. Calvi Parisetti *Probabilità soggettiva e statistica inferenziale bayesiana nelle scuole superiori* 52

C. Pellegrino *Avvio alla ricorsività attraverso problemi* 63

S. Holzer *Sulla nozione di media* 74

F. Furinghetti *Che cosa resta e che cosa dovrebbe restare della Matematica quando si è dimenticata la Matematica* 86