INTERAZIONE TRA
RAPPRESENTAZIONI E LINGUAGGI
IN MATEMATICA - ASPETTI DIDATTICI (*)

ALBA IACOMELLA (**)

INTRODUZIONE

Si rispetta la presenza culturale e formativa della matematica nella scuola, se si fa cogliere la sua forza, in corrispondenza del livello scolastico degli alunni, dalla comprensione di ció che è *"dietro"* e *"dentro"* lo sforzo di interpretazione e di costruzione del suo pensiero.

L'esperienza di tanti insegnanti e le ricerche sul campo evidenziano che la fonte di molte difficoltá di comprensione del messaggio risiedono proprio nei codici linguistici e rappresentativi (naturali e matematici) che si presentano diversi e talvolta dissonanti.

L'insegnante di matematica fa molto uso di *rappresentazioni*, forse non sempre con la dovuta attenzione agli aspetti epistemologici che entrano in gioco nell'interazione tra esse, il linguaggio naturale ed i linguaggi dei vari rami della Matematica (l'algebrico, il geometrico, l'insiemistico, il logico,...). E', questo, un argomento abbastanza ampio e diversificato. Sono connesse complesse questioni (logico - linguistiche, teoriche, applicative, didattiche, storiche culturali), senza dimenticare gli aspetti percettivi e psicologici legati alle cosiddette rappresentazioni esterne (disegni, tabelle, frecce, schemi, ...).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Progetto Pluriennale di Ricerca su "Collaborazione tra Universitá e Scuola Secondaria Superiore" e nell'ambito delle attivitá del Nucleo di Ricerca su "Ricerca di Matematica ed Informatica per la Didattica" (Progetto Nazionale MURST 40%) presso il Dipartimento di Matematica dell'Universitá di Lecce.

(**) P.zza A. Moro, n. 18, - 73024 - Maglie (Le).

I nuovi programmi di matematica della scuola italiana, a partire dalla elementare, sottolineano l'integrazione epistemologica fra i vari temi come *campi di problemi* e lasciano individuarne un altro cui sarei tentata di dare anche un nome: *"Interazione tra rappresentazioni e linguaggi in matematica"*. Penso ad un campo di problemi capace di contribuire ad un apprendimento critico della matematica con particolare attenzione agli aspetti sintattici e semantici presenti da sempre nella matematica. Penso ad un tronco culturale che recupera unitá intrinseca al sapere scientifico rispettando la specificitá dei suoi rami. Ció è in accordo con i suggerimenti metodologici di tutti i programmi della scuola italiana.

E' mio intendimento muovermi in una tale direzione, sollevando solo spunti critici durante la risoluzione di tre semplici problemi. L'intenzione è di cogliere spunti epistemologici significativi nell'interazione tra rappresentazione e linguaggi, al di lá della particolare situazione proposta. Penso opportuno che nella didattica si debbano cogliere spunti, ovviamente non esaustivi, data la complessitá teorica delle questioni in gioco.
"Giova riflettere su esempi, e a modificarli o costruirsene di nuovi, e riuscire così sempre meglio a capire e scoprire ció che occorre saper vedere per dominare un problema" ([4], p. 1).
I problemi "L'albero di Natale" e "I cuccioli" che presenteró sono stati oggetto di sperimentazione in una quinta classe della Scuola Elementare di Muro Leccese, coinvolta nella mia esperienza di ricerca - sperimentazione nell'a. sc. 1990/91 conclusasi con il Convegno di studi su "La ricerca comincia con i problemi" promosso dal Provveditorato agli Studi di Lecce (Maglie, 22 Giugno 1991) [14]. Da tale attivitá (con problemi diversi in sei Scuole elementari della provincia di Lecce), traggo spunto in questo mio scritto, confortata anche da un confronto (sugli stessi problemi sopra nominati), vissuta coi docenti di Scienze della Scuola Media Giovanni XXIII di Galatina (Le). Il terzo problema "Euclide" trova le radici nella mia esperienza didattica presso le classi sperimentali del Liceo Ginnasio "F. Capece" di Maglie (Le).

PROBLEMA "L'albero di Natale" (1)

"Nel periodo di Natale molti alberi sono decorati con lampadine. Un albero è decorato con lampadine rosse, bianche, gialle e verdi. Dieci sono rosse e altrettante sono bianche; le verdi sono il doppio delle rosse e le gialle sono tre meno delle rosse. Sono non meno numerose le lampadine bianche o quelle gialle?"

Il testo offre diverse informazioni. Fra esse "l'attenzione della matematica è quasi l'attenzione del notaio che registra come stanno le cose..." [7]. L'itinerario didattico vuol progredire per tappe a diversi livelli di astrazione. Ogni tappa vuol essere una esplicitazione di fatti matematici palesi o nascosti nel problema proposto, finalizzati a cogliere fatti indipendenti dalla particolaritá della situazione considerata, pur restando a livello descrittivo ed intuitivo.

1) *Aspetti qualitativi (logico - linguistici).*

1.a) La particella "e", congiunzione per la lingua naturale, è presente nel testo più volte ed esprime il verificarsi contemporaneamente di relazioni;

1.b) La particella *"o"*, disgiunzione della lingua italiana, ha significato di connettivo di disgiunzione. Sull'interpretazione faró una riflessione in un momento successivo.

2) *Aspetti quantitativi:*

2.1) *Dati* numerici*:* 10, 3.

2.2) *Relazioni:*

2.2.a) ...altrettante sono bianche (... = ...)

2.2.b)...sono il doppio delle...(... x 2 = ...)

2.2.c)...sono non meno numerose delle...(... ≥ ...)

2) *Aspetti quantitativi.*

2.1) *Dati* numerici*:* 10, 3

2.2) *Relazioni:*

2.2.a) ...altrettante sono bianche (... = ...)

---

(1) Il problema, come il successivo, puó essere avviato nel secondo ciclo della scuola elementare e riproposto nella scuola media con proiezioni anche nella scuola superiore.

2.2.b) ...sono il doppio delle... (... x 2 = ...)

2.2.c) ...sono non meno numerose delle... (... ≥ ...)

Una rappresentazione col cosiddetto *linguaggio delle freccie* (fig.1) è adeguata al problema proposto:

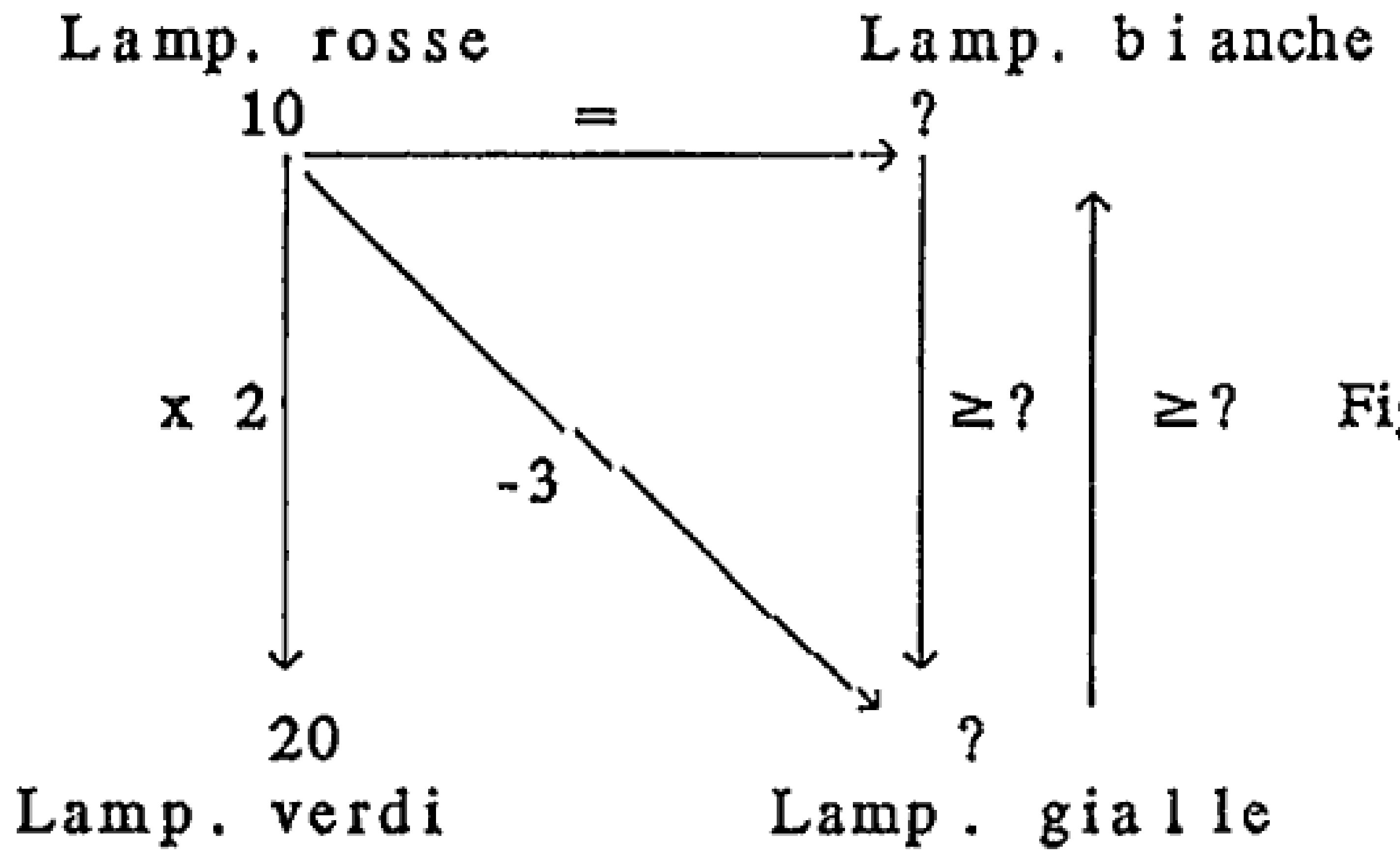

Fig.1

Lo schema, privilegiando gli aspetti *relazionali,* offre immediatamente la soluzione. Non meno numerose sono le lampadine bianche essendo 10 > 7.

Emerge il non intervento del dato "20" nella risoluzione. E', questa, un'occasione di stimolo per modificare il problema, ad esempio, nei dati numerici e non nelle relazioni. Lo schema, di conseguenza, non muta perchè rappresenta relazioni indipendenti dai dati e favorisce lo spostamento verso un ragionamento intuitivo con le variabili, giá a livello di scuola elementare.

Nella formulazione del problema proposto è *nascosto* l'impiego della *indeterminata* e della *variabile,* questa non in senso *formale* ma *operativo.* Il linguaggio dell'algebra, dunque, soggiace implicitamente nel problema che si presenta allora come un caso di particolarizzazione. La *generalizzazione* scatta quando si vuol *far vedere qualche regolaritá*, come si vedrá nelle fasi successive. L'uso intuitivo e critico di *simboli* la favorisce.

Con la *rappresentazione simbolica* si transita da un tipo di rappresentazione *ideografica,* (nel caso considerato con frecce), ad una *ideografia simbolica* che, una volta concettualizzata da parte del discente, puó divenire il punto di partenza per la *rappresentazione simbolica* usuale in matematica. Il linguaggio, da *strumento verbale,* diventa uno strumento di *descrizione* *concettuale.* L'allievo, avvicinandosi gradualmente all'aspetto *formale* della matematica, va via via conquistando anche un atteggiamento fondamentale della matematica che è il processo di *astrazione.* (Ritorneró sul linguaggio algebrico nel problema "Euclide").

Con tale obiettivo, confortata anche dall'esperienza vissuta sul campo, propongo tre domande che vanno viste in modo non rigido. (E' sempre la classe il laboratorio di ricerca, fonte di idee e di percorsi da seguire nella risoluzione di un problema).

- E' possibile allontanarsi dal particolare *sensibile* (bambini col grembiule, ad esempio, al posto dell'albero con le lampadine)? (J1).
- E' possibile distaccarsi dai dati *quantitativi particolari* presenti nel problema, conservando le *relazioni*? (J2).
- E' possibile distaccarsi dal *particolare contesto* del problema, conservando, ad esempio, il tipo (la *linearitá*) delle relazioni? (J3).

E' in gioco la liberazione della mente dal *particolare* ("realtá" del problema) che funziona come fonte di ispirazione per *nuovi concetti* e la scoperta di *relazioni formali.* Si apre la via, a livello di scuola elementare per un *intuitivo ragionamento con le variabili.* L'itinerario didattico che propongo considera cinque graduali passaggi formali di diverso livello da considerare in modo duttile, perchè la presentazione in classe di una situazione - problema crea sempre uno stato di tensione dell'intelletto e di instabilitá (il pensiero si pone alla ricerca della soluzione, si accendono "curiositá", si ferma l'attenzione su certi fatti piuttosto che su altri, si separano alcuni, si modificano progetti risolutivi)...

a) *Primo passaggio formale: ...verso un sistema di equazioni* e *di disequazioni* (2).

a1) *Simbolizzazione:*

□ numero delle lampadine rosse

▯ " " " gialle

⬯ " " " bianche

a2) *Formalizzazione delle relazioni* con un simbolo ausiliario, la *parentesi graffa*, che sostituisce la congiunzione delle relazioni individuate in 2). Da questa formalizzazione opportunamente guidata dall'insegnante, inizia un percorso di astrazione e di generalizzazione sviluppato nei successivi passaggi.

$$\begin{cases} \square = 10 \\ \square = \bigcirc \\ \square - 3 = \Box \\ \bigcirc \geq \Box \end{cases}$$

Mi sembra opportuna un'osservazione sulla scelta dell'ultima relazione del sistema. Il sistema è soddisfacibe *solo se* le lampadine bianche non sono meno numerose di quelle gialle. Pertanto è corretta la scelta dell'ultima relazione che associa la soddisfacibilitá del sistema alla "non minore numerositá delle lampadine bianche". D'altra parte il problema poteva essere formalizzato sostituendo l'ultima relazione del sistema con la relazione "$\leq$", tenendo presente che, in tal caso, la soddisfacibilitá del sistema corrisponde alla non minore numerositá delle lampadine gialle. La domanda del problema proposto, menzionando prima le lampadine bianche, sembra privilegiarle in qualche modo a quelle gialle, spingendo, così, ad una interpretazione non commutativa della "o". I passi che seguono conservano tale scelta.

b) *Secondo passaggio formale* con l'impiego delle variabili: un *sistema* di *equazioni* e *disequazioni.*

b1) *Simbolizzazione:*

- le *indeterminate* "r", "g" e "b" al posto della simbolizzazione

(2) Non spaventi questo termine tecnico, se pensato riferito ad un problema dichiarato per la scuola elementare: anche nei primi anni di scuola si impostano e si risolvono equazioni algebriche, pur senza fare riferimento ad esse. Si pensi, ad esempio, ad un problema che richieda una sottrazione.

a1) (la scelta intuitiva dei simboli trova radici, in questa prima fase, nel "concreto" del problema. Tuttavia comincia a distaccarsene con un ruolo epistemologico anticipatorio del passo successivo);

b2) La *formalizzazione seguente* è immediata tanto più se la classe ha fatto in precedenza esperienza con le *sostituzioni* [19]:

$$\begin{cases} r = 10 \\ b = r \\ r - 3 = g \\ b \geq g \end{cases}$$

b3) *Interpretazione delle variabili* r, b, g *:* l'insieme dei naturali.

b4) *Soluzione: sostituzione delle variabili con costanti* ed uso delle operazioni dell'aritmetica:

"E' facile: $r = 10$, $g = 7$ e anche $10 > 7$. Importanti sono le relazioni che abbiamo trovato. Stanno bene insieme". (Sono le parole dei bambini della quinta di Muro).

Ipotizzando una classe capace di un tale discorso matematico, la (J2) apre la via ai prossimi passaggi, pensabili in una scuola media o nel biennio di scuola superiore con una maggiore attenzione ai concetti di sistema e di soddisfacilitá:

d) *Terzo passaggio formale*: l'impiego dei *parametri* al posto de*i dati numerici* (distacco dai dati numerici presenti nel problema, ma non dall'universo di interpretazione); un *sistema di equazioni parametriche.*

d1) *Simbolizzazione*

a	sostiuisce	10	$a \in \mathbb{N}$
c	"	3	$c \in \mathbb{N}$ $c \leq r$

d2) *Formalizzazione*:

$$\begin{cases} r = a \\ b = r \\ r - c = g \\ b \geq r \\ c \leq r \end{cases}$$

Accenno agli altri passaggi formali.

e) *Quarto passaggio formale*: l'impiego di nuovi nomi alle variabili "r", "b" e "g". Tale passaggio permette un distacco dal *"concreto oggetti"* del problema, preparando all'*interpretazione dei simboli in un arbitrario modello* in un livello scolastico successivo. E' questo un momento molto importante per un significativo livello di astrazione; come tale va fatto vivere e gustare intensamente dall'allievo, eventualmente con diverse situazioni problematiche per poter favorire, a livello di scuola superiore, l'intuizione del successivo passaggio formale.

f) Quinto passaggio formale: distacco dal *" particolare concreto"* del problema, ma non dalla *linearitá*, ad esempio, delle relazioni: verso un *generico sistema lineare di equazioni...*

In una tale direzione di lavoro didattico *anticipatorio* per la scuola superiore si puó far gustare all'allievo del biennio delle superiori, man mano che si arricchisce la sua esperienza matematica, la fecondità di precisazione di *concetti* (si pensi, ad esempio, alle nozioni di *variabile*, di *sostituzione* [20]).

Sono ben note, a qualunque livello scolastico, le difficoltá dell'allievo nel familiarizzare con le variabili (a livello di scuola elementare, ad esempio, nel sostituire valori assegnati (costanti) nella formule di aree o perimetri o volumi). Sono comprensibili, in quanto sono coinvolti *aspetti* linguistici di tipo *grammaticale, sintattico e semantico*. La precisazione nelle superiori, (al di lá dell'Informatica), consente allo studente di superare consapevolmente le ben note difficoltá, ad esempio, di fronte alla cosiddetta "verifica di una soluzione trovata" o alla sostituzione di un numero al posto della variabile nella scrittura di una funzione...E va anche chiarita la distinzione tra *soddisfacibilitá* (*veritá* relativa ad una data interpretazione) e *validitá* (veritá in tutte le interpretazioni, per esempio "a = a"). L'uguaglianza "3 • a = 7", ad esempio, è soddisfatta per a = 7/3 , vera, cioè, se "a" *si sostituisce con la costante* 7/3, falsa se "a" *si sostituisce con la costante* 3.

A partire da una situazione problema, anche semplice come quella presentata, importante è lasciare *sempre* spazio ad un possibile approfondimento a spirale, per cogliere, registrare ed approfondire certi fatti *matematici* con dialettica tra *intuizione* e *rigore*, tra *concreto* ed *astratto*, tra *astratto* e *formale*, tra *rappresentazione* e *linguaggi*, tra *applicazione* e *teoria*.

PROBLEMA "I cuccioli"
"In un canile ci sono 10 cuccioli. Fra questi 6 sono distesi; 7 mangiano. Quanti cuccioli potrebbero contemporaneamente essere distesi e mangiare?"

Il piano risolutivo, in analogia al precedente, progredisce per tappe a diversi livelli, finalizzate ad un'organizzazione razionale delle informazioni, sempre restando a livello descrittivo ed intuitivo nella scuola elementare.

a) *Aspetti qualitativi.*

a1) logico - linguistici:

- i cuccioli possono essere distesi *e* mangiare;
- " " " " " *e non* mangiare;
- " " " mangiare *e non* essere distesi;
- *alcuni* cuccioli mangiano;
- " " sono distesi;
- " " " " *e* mangiano;
- *non* si precisa se *ogni* cucciolo che è nel canile soddisfa *almeno* ad una delle due condizioni "mangiare" "essere disteso";
- possono esserci, dunque, nel canile, cuccioli che *non* sono distesi *e non* mangiano.

Determinanti per un piano risolutivo del problema sono i termini *logici* "tutti", "alcuni", le espressioni linguistiche del tipo "Tutti i cuccioli di tipo X sono cuccioli di tipo Y ", "Nessuno cucciolo di tipo X è di tipo Y", "Alcuni cuccioli di tipo X sono cuccioli di tipo Y", "Alcuni cuccioli di tipo X non sono cuccioli di tipo Y"...(alcune sono nascoste nel problema) ([1], [18]).

a2) strutturali del discorso :

la congiunzione "e", la negazione "non", la disgiunzione non esclusiva "o". Ad ecccezione della "e", gli altri connettivi sono nascosti.

b) *Aspetti quantitativi:*

b1) dati numerici: 6, 7, 10;

b2) *relazioni*:

- *tutti* i cuccioli distesi possono mangiare (il dato 6 è minore del dato 7; al *massimo* 6 possono fare contemporaneamente le due azioni);
- i cuccioli che mangiano *non* possono essere *tutti* distesi (il dato 7 è maggiore del dato 6);
- *alcuni* cuccioli distesi mangiano (il dato 10 è minore della somma 13 = 6 + 7; al *minimo* 3 possono fare contemporaneamente le due azioni).

Sono nascoste locuzioni del tipo " Se i cuccioli di tipo X sono in numero di ...allora i cuccioli di tipo Y sono in numero di..."

c) *Aspetti del piano risolutivo.*

Il problema ha più soluzioni*:* le diverse soluzioni si hanno considerando i casi *possibili* di cuccioli distesi che possono mangiare.

Tutte le soluzioni possibili devono soddisfare le seguenti *tre* condizioni:

c1) il numero totale dei cuccioli deve essere 10 ;

c2) " " " " " che sono distesi deve essere 6;

c3) " " " " " " mangiano deve essere 7.

d) *Gli insiemi nascosti.*

A livello di scuola media si possono esplicitare gli insiemi "nascosti" nel contesto del problema con la seguente simbolizzazione:

U	Insieme dei cuccioli nel canile	
A	" " " " "	che sono distesi
B	" " " " "	" mangiano
A ∩ B	" " " " "	" sono distesi e mangiano
A - B	" " " " "	" sono distesi e non mangiano

B - A	Insieme dei cuccioli nel canile che mangiano e	non sono distesi
A ∪ B	" " " " " "	mangiano o sono distesi
U - (A ∪ B)	" " " " " "	non sono distesi e non mangiano (5)

e) *Rappresentazione.*

I *diagrammi* di Venn rendono visibili gli aspetti esaminati. E' intuitiva per un allievo di qualunque livello scolastico, la scelta del *linguaggio* degli insiemi (non della *teoria* degli insiemi con cui viene confuso e, ció che forse è ancora peggio, talvolta identificato anche con la *logica matematica* [7], [22], [23], in certi testi scolastici.

"L'utilitá di un modello consiste essenzialmente nel suo valore euristico: esso facilita la risoluzione di un problema inizialmente posto nei termini dell'originale. Questo è possibile soltanto se, tra l'originale e il modello, sussiste un certo isomorfismo" ([11], p.14]. "Il vantaggio di un modello deriva anche dal fatto - essenziale per il pensiero - che usando modelli si esprime la stessa struttura concettuale in differenti forme sensibili...(si tratta di modelli figurativi)" ([11], p.26].

f) *numerositá* e *simbolizzazione*:

10	numerositá di U	$10 = n(U)$
6	" " A	$6 = n(A)$
7	" " B	$7 = n(B)$
?	" " A ∩ B	$x = n(A \cap B)$

g) *Relazioni.*

Tutti i cuccioli distesi possono mangiare essendo il dato 6 minore del dato 7; al massimo 6 possono fare contemporaneamente le due azioni:

$$n(A \cap B) \leq 6$$

Alcuni cuccioli distesi mangiano poichè il dato 10 è minore della somma $13 = 6 + 7$; almeno 3 eseguono le due azioni:

$$3 \leq n(A \cap B)$$

In definitiva:

(1) $$3 \leq n(A \cap B) \leq 6$$

Vie risolutive.

1) Fatta propria la relazione (1), la soluzione è immediata: i cuccioli richiesti dal problema potrebbero essere 3 o 4 o 5 o 6.

2) La scelta della rappresentazione insiemistica guida l'allievo nel cogliere più facilmente un'interazione *intuitiva* tra il linguaggio naturale e diversi linguaggi matematici (il logico, l'insiemistico, l'aritmetico).

CASO I: 6 cuccioli che sono distesi mangiano.

$$n(A \cap B) = 6$$

Rappresentazione insiemistica

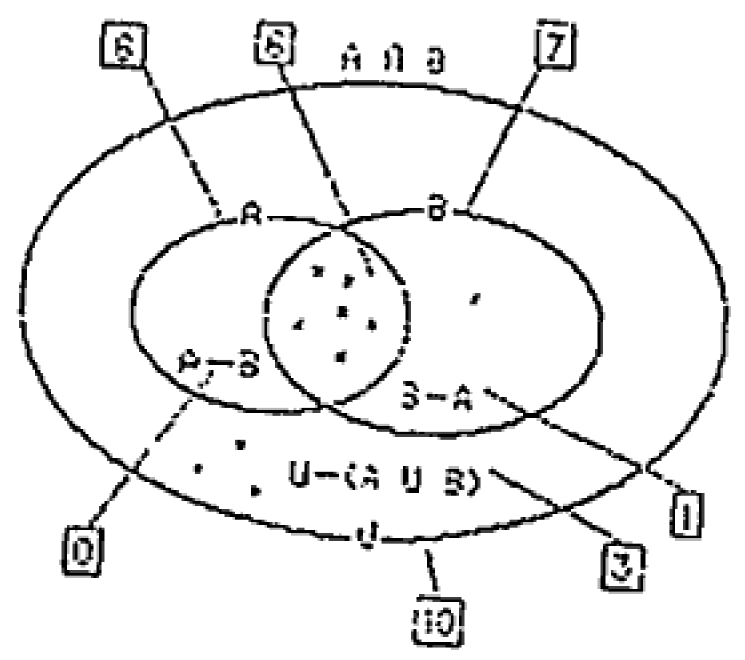

Fig. 2

La rappresentazione suggerisce e sostiene, ad esempio, il passaggio inverso dal linguaggio *grafico* a quello *verbale*, quale il seguente:

Se tutti i cuccioli che sono distesi mangiano

allora 1 cucciolo *mangia e non* è disteso

3 cuccioli nel canile nè mangiano nè sono distesi

CASO II : 5 cuccioli che sono distesi mangiano

$$n(A \cap B) = 5$$

Rappresentazione insiemistica

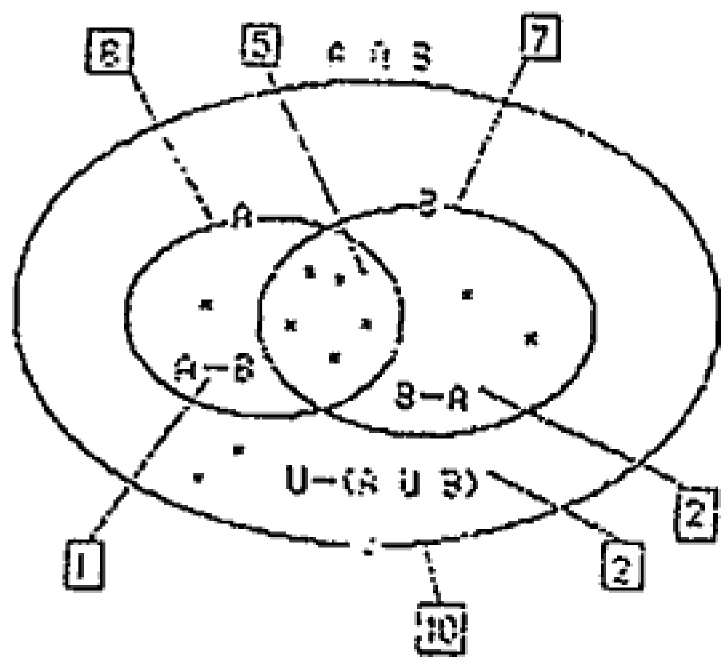

Fig. 3

La presenza di più situazioni rinforza il rapporto tra la *rappresentazione* e il *discorso matematico*:

Se 5 cuccioli che sono distesi mangiano

allora 2 cuccioli *mangiano e non* sono distesi

2 cuccioli nel canile né mangiano né sono distesi

Accenno agli altri possibili casi.

CASO III: 4 cuccioli che sono distesi mangiano

$$n(A \cap B) = 4$$

Di conseguenza 3 cuccioli *mangiano e non* sono distesi,

1 cucciolo nel canile *non* mangia *e non* è disteso.

CASO IV : 3 cuccioli distesi mangiano

$$n(A \cap B) = 3$$

Se 3 cuccioli che sono distesi mangiano

allora 4 cuccioli *mangiano e non* sono distesi

0 cuccioli nel canile *non* mangiano *e non* sono distesi.

Il calcolo delle proposizioni ed il calcolo dei predicati intervengono, a livello intuitivo, nella trattazione del problema (con ovvia esigenza di precisazioni nella scuola superiore senza decadere in *tavolite e predicatite*). L'alunno non si deve trovare di fronte a "montagne" di prerequisiti da affrontare. Il docente consapevole di tutte le connessioni dell'argomento oggetto di un problema, sa fargli cogliere quelle indispensabili per affrontarlo.

Ma il discorso si puó spingere ancora, nella direzione della *dimostrazione in matematica*, su cui ritorneró nel terzo problema.

Congettura

Non è possibile che sia $n(A \cap B) < 3$.

Giustificazione della congettura

Per evitare che la mente di chi apprende rimanga *prigioniera* del "concreto" costituito dalla rappresentazione di un singolo caso, oso proporre l'"esperimento mentale" di visualizzazione delle situazioni in gioco nella congettura. Un tale atteggiamento della mente deve essere continuamente motivato, ovviamente in modo graduale, in tutto il corso scolastico di un allievo a partire dalla scuola elementare, per ovviare a uno studio limitato e banale e ad un blocco della fantasia.

Ipotesi: 2 cuccioli *mangino distesi*

Se 2 cuccioli distesi mangiassero

allora 4 cuccioli sarebbero solo distesi

5 cuccioli mangerebbero solamente

I cuccioli nel canile sarebbero, dunque, $11 = 2 + 4 + 5$. Ció è in contraddizione (" in contrasto" è la parola dei bambini di Muro!) col dato "10" del problema, vincolo di ogni soluzione del problema posto. Dunque la numerositá di A $\cap$ B non puó essere 2; analogamente nè 1, nè 0. La congettura, dunque, non solo resta giustificata, ma anche dimostrata in quanto sono stati considerati tutti i casi possibili, essendo, questi, nel caso del nostra situazione - problema, in numero finito.

Forse la classe in cui ho svolto la sperimentazione dei due problemi era eccezionale per aver vissuto, sin dalla prima elementare, un insegnamento - apprendimento per problemi attento per un verso all'interazione epistemologica tra le rappresentazioni ed i vari linguaggi, per un altro alla ricerca di strategie risolutive con *gioia* della *scoperta e gusto del sapere*. Ma quel che proporró trae origine ancora dall'esperienza vissuta. Potrebbero forse essere tante le critiche del lettore a questo punto, ma credo negli insegnanti guidati dai *perch*è significativi di chi apprende.

Se i passi didattici proposti durante la risoluzione del problema precedente o di analoghi sono stati conquistati dall'allievo, forse non è poi tanto ambiziosa, farlo cimentare con la seguente domanda:

- E' possibile una rappresentazione con simboli e relazioni tra simboli?

Nella scuola elementare, sia pur a livello intuitivo, *il passaggio* è facilitato se il linguaggio verbale continua a sostenere la sostituzione della locuzione, ad esempio, "numero dei cuccioli che sono distesi e non mangiano" con "x", e così via...

$x = n(A - B)$

$y = n(B - A)$

$z = n(A \cap B)$

$t = n(U - (A \cup B))$

In ogni caso, a livello di scuola d'obbligo, la scelta della rappresentazione insiemistica non va vista privilegiata rispetto ad altre, anzi confrontata con altre ed osservata con occhio critico nelle superiori. Se l'insegnante non è semplicemente un trasmettitore statico di un sapere sistemato, ma vive il ruolo di organizzatore di processi di apprendimento matematico, allora saprá cogliere significativamente i passaggi attraverso linguaggi diversi. In analogia con l'itinerario didattico presentato per il problema precedente, si puó far conquistare il seguente sistema, che si presenta, al primo sguardo, complesso, se si dimentica che l'insieme di interpretazione delle variabili è l'insieme dei naturali.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 10 & (1^*) \\ x + z = 7 & (2^*) \\ z + y = 6 & (3^*) \\ 3 \leq z \leq 6 & (4^*) \end{cases}$$

Le relazioni traducono il discorso matematico nel testo del problema considerato.

Il semplice contare, familiare a livello di scuola elementare, ma che viene dimenticato (purtroppo!) man mano che si va a livelli scolastici superiori, consente la risoluzione - oso dire immediata - del sistema ottenuto.

Semplicemente *contando*, ecco le soluzioni dei bambini della quinta di Muro:

a) se $z = 3$ per $2^*)$ $x = 4$
" $3^*)$ $y = 3$
" $1^*)$ $t = 0$

b) se $z = 4$ per $2^*)$ $x = 3$
" $3^*)$ $y = 2$
" $1^*)$ $t = 1$

c) se $z = 5$ per $2^*)$ $x = 2$
" $3^*)$ $y = 1$
" $1^*)$ $t = 2$

d) se $z = 6$ per $2^*)$ $x = 1$
" $3^*)$ $y = 0$
" $1^*)$ $t = 3$

Sarebbe forse una bella sfida proporre il sistema a livello di scuola superiore.

PROBLEMA "Euclide"

"Siano A (1,2), B (1,3),C (4,3), D (4,2). Verificare che il quadrilatero A B C D è un rettangolo. Quale la natura del quadrilatero che si ottiene congiungendo i punti medi dei lati del quadrilatero A B C D ?"

Il problema è di prassi scolastica nell'insegnamento della geometria analitica ed è davvero banale, una volta accettati tutti i concetti e il fondamento di un sistema di coordinate cartesiane. E' proprio qui il problema (ragione del nome, forse molto pretenzioso, che ho dato al problema).

In particolare in un problema di geometria analitica è presupposto il famoso postulato delle parallele di Euclide "di cui non è affatto ovvia "la veritá"" ([3], p. 329) e sono coinvolti, in modo determinante per la risoluzione, aspetti sintattici e semantici. E se si vuol guardare alla geometria con un occhio critico attento a questioni di fondo, sarebbe auspicabile avvicinare l'allievo, nell'ultimo anno della scuola superiore, al problema della crisi dei fondamenti, mettendo in discussione, ad esempio, il ruolo fondazionale del postulato euclideo nel metodo delle coordinate cartesiane.

...Così la possibilitá delle geometrie non - euclidee ([2], [5], [6]) potrebbe essere un punto di riferimento significativo per un approccio dello studente al cambiamento di atteggiamento della geometria nel rapporto *spazio geometrico*, *spazio fisico* e *intuizione sensibile* e una iniziale conquista dell'idea di un fondamento assiomatico della "geometria". Sono in gioco complessi problemi connessi fra loro di natura *logica*, *epistemologico - didattica* ([26], [27], [28], [29]). Emergono in particolare due questioni di fondo:

- la possibilitá di costruzione di *modelli* alla luce dei risultati della logica matematica;
- lo scontro tra idee nuove e idee vecchie intorno al binomio *veritá - dimostrazione* ([30]).

Oseró presentare, in una tale direzione di pensiero, sia pur a livello descrittivo per punti essenziali, un itinerario didattico, perchè convinta di un insegnamento della matematica capace di "insegnare ai giovani a PENSARE" ([25], II, p. 359). Seguiró anche per quest'ultimo problema lo schema espositivo utilizzato nei casi precedenti. Continueró a porre l'attenzione, come sopra, sugli aspetti logico - linguistici che, correlati con le rappresentazioni logiche (i *modelli* (20]), consentono varie attivitá didatticamente interessanti ed efficaci. Sono infatti ottimo spunto per innescare una discussione di carattere storico e concettuale, sia pur a primo livello come è consentito nel tipo di scuola, sulle *rivoluzioni matematiche*, sull'*evoluzione storica* dell'*indagine matematica*.

A tal fine mi sembra individuare nel problema almeno due livelli di riflessione epistemologica: uno (proponibile a partire dal biennio) di analisi delle rappresentazione legate al passaggio dal linguaggio *geometrico* a quello *algebrico* (e viceversa); l'altro (nel triennio) coinvolgente l'intreccio epistemologico delle evoluzioni della matematica e della filosofia, correlati tra loro perchè l'allievo comprenda meglio il "modo di pensare matematico". Si tratta ora di questioni didattiche e teoriche molto sottili. Per avvicinarsi ad esse c'è necessitá di adeguati stimoli. "ma è proprio di stimoli ... che c'è bisogno (e che in genere mancano) per evitare che tutto (e in ispecie la matematica) si degradi, nell'insegnamento, a passiva e sterile ripetizione." ([4], p. 69).

1) *Primo livello.*

Le fasi didattiche che propongo si staccano dagli aspetti algoritmici e puntano su quelli grammaticali, sintattici e semantici da sempre presenti nella matematica.

d1) *Aspetti grammaticali (Simbolizzazione)*:

- i simboli per le *variabili* ("x", "y");
- il simbolo di *uguaglianza*;
- le parentesi;
- le *costanti* (i numeri reali).

d2) *Scritture sintattiche*:

- i polinomi del tipo a x + b y + c con *a*, *b* e c *costanti* [15] ;

d3) *Interpretazioni semantiche* (legame tra il linguaggio algebrico e quello geometrico):

d3.1) - l'universo "inteso" di interpretazione (l'insieme R);

d3.2) - la funzione dalle coppie ordinate di valori nell'universo di interpretazione scelto in *"vero"*, *"falso"*: precisamente quella che associa *"vero"* ad una coppia ordinata se i suoi elementi *verificano* un'equazione del tipo $a\ x + b\ y + c = 0$ (2)

d3.3) - Se la funzione che interpreta la formula associa *"vero" ad una coppia ordinata fissata*, ció significherá, nel piano cartesiano, che quel punto con quelle coordinate *appartiene* alla retta associata all'equazione di tipo 2).

d3.4) - la condizione *"allineamento di due punti"* che definisce la retta in *linguaggio geometrico* si esprime in *linguaggio algebrico* mediante l'*equazione di primo grado in due variabili* e viceversa;

d4) R*appresentazione grafica* col metodo delle coordinate (Fig.4):

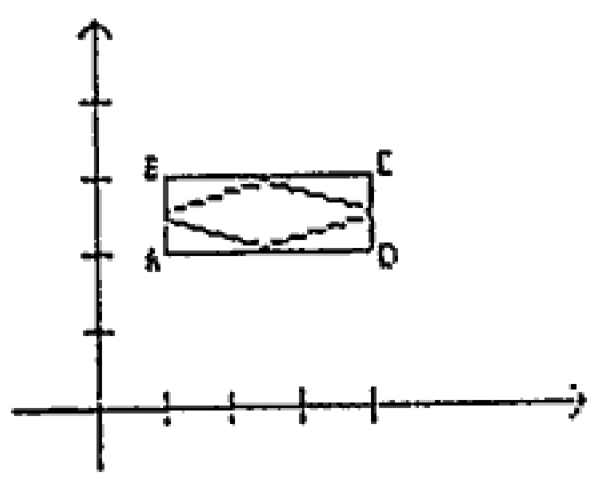

Fig. 4

d5) - *Alcuni aspetti del piano risolutivo.*

Durante la risoluzione di un problema di geometria analitica la mente dell'allievo mette a confronto due canoni della geometria esprimibili in due linguaggi differenti ma strettamente connessi tra di loro (primo livello). L'interazione tra la rappresentazione cartesiana e l'immagine geometrica guida e aiuta la mente dell'allievo nell'individuare quello che occorre saper vedere con occhio geometrico per saper vedere con occhio algebrico (e viceversa). Importante è, quindi, sul piano didattico, che lo studente si renda conto che usando opportune regole algebriche coglie certi legami tra enti geometrici e viceversa . L'aspetto meccanico proprio di ogni calcolo lo imprigiona se vede il calcolo come un'ingiustificata "ricetta" imposta e non lo guarda come un "utile" strumento quando ne comprenda la portata e i significati.

Il problema proposto esige nella prima parte (verifica di "rettangolo") una dimostrazione nel linguaggio dell'algebra (i punti A, B, C, D sono individuati da coordinate cartesiane). La seconda questione (natura di "rombo" del quadrilatero richiesto), puó essere affrontata anche col metodo cosiddetto *sintetico,* auspicabile perchè l'allievo colga aspetti *logici* della dimostrazione nei due linguaggi con attenzione ai significati dei termini e alla portata delle affermazioni che si presuppongono (il postulato delle parallele presupposto nella rappresentazione cartesiana di un punto). D'altra parte coglie anche la significativitá di una integrazione tra i due metodi per facilitarsi il cammino verso la soluzione (sono note le difficoltá degli studenti poveri di esperienza geometrica col metodo sintetico di fronte a certi problemi di geometria analitica assegnati agli esami di maturitá!).

2) *Secondo livello.*

A differenza dei problemi precedenti, vi è, dunque, un salto di qualitá del ruolo e del significato dell'interazione tra rappresentazioni e linguaggi in matematica, salto che esige un'attenzione dell'insegnante ai concetti logici di *modello* e di *dimostrazione.* Se si vuole, dunque, spingere il discorso matematico a livelli più alti coinvolgendo particolari aspetti critici, propongo due domande:

- Cosa vuol dire *verificare*?
- Quale la diversitá del linguaggio geometrico da quello delle coordinate?

Molte e sottili le questioni connesse. Mi sforzeró di individuare in tre *fasi* alcuni spunti di riflessione didattica che penso significativi nella scuola superiore. Procederó con l'idea di *problemi entro problemi,* a partire dalla seconda domanda.

Prima fase.

Va esaltato nell'insegnamento il vantaggio metodologico dell'uso dell'algebra per certi aspetti risolutivi (si pensi al progresso della matematica basato sul metodo delle coordinate); d'altra parte la lettura algebrica di un problema geometrico permette di notare più facilmente vie di generalizzazione (si pensi ad uno *spazio* a più di tre dimensioni). Questo è un aspetto del problema.

Non va sacrificata l'occasione didattica di una riflessione storica sul significato e sulle possibilitá dei vari aspetti della geometria [27] che vanno, sul piano didattico, dalla acquisizione di strumenti importanti di lavoro non solo per la matematica (aspetto *strumentale*), alla riflessione sulla organizzazione logica delle idee sullo spazio (aspetto *logico*). L'attenzione si sposta (con elevato ruolo formativo), alla struttura interna della geometria (precisazione di concetti, necessitá delle *dimostrazioni* (seconda *fase*), significato della scelta di un assioma piuttosto che di un altro (terza *fase*) [28], [29]).

Quel che conta, a mio parere, nell'insegnamento, non è aumentare i contenuti con l'idea di una completezza che non c'è se si tien conto di possibili sviluppi, quanto il riflettere su pochi contenuti, per evitare che l'insegnamento degradi in un ammasso di nozioni da trasmettere, a volte spesso ripetute con gli stessi metodi senza che avvenga quel salto di qualitá che si richiede nella scuola superiore. (Geometria e aritmetica sono temi che l'allievo incontra giá sin dalla scuola elementare!). Di fronte ad un problema di geometria analitica, se non lo si vuol ridurre ad una fredda ed arida applicazione di formule, occorre far cogliere che le *scelte* operate nell'individuare lo spazio geometrico in cui lavora sono determinanti (terza *fase*).

Seconda fase.

Il significato del termine "verificare" nel contesto del problema chiama in gioco il concetto di *dimostrazione*, concetto che è "la prima vera grande rivoluzione...nella Grecia antica..." [26]. A tal proposito è in uso in non pochi testi scolastici *moderni* di matematica, anteporre, generalmente alla trattazione della geometria, un capitolo di *logica matematica* spesso presentata in modo discutibile. Ma vi è di più: c'è il rischio che questo importante contenuto possa promuovere e favorire nello studente uno scorretto atteggiamento matematico per due motivi fondamentali.

a) Non vengono colti nel loro ruolo i connettivi proposizionali ed i quantificatori, ruolo che non è quello di fondarne il significato, ma di precisare una scelta convenzionale del loro uso in ambienti specifici (i connettivi servono a costruire descrizioni più complesse a partire da descrizioni più semplici). In particolare "se...allora" non ha alcuna intenzione di esprimere causalitá, inferenza, giustificazione, o altro; sul suo significato c'è, in non pochi testi scolastici, la confusione tra *implicazione*, *deduzione* e *conseguenza logica*, con confusione tra aspetti sintattici e aspetti semantici. Uno dei ruoli significativi, a livello didattico, della logica, è un controllo linguistico, con attenzione, in particolare, all'uso dei connettivi e dei quantificatori [1] e ai passi di una dimostrazione [20] .

b) Non si colgono certi aspetti e le esigenze della *dimostrazione* in Matematica. Nel caso particolare della geometria, (a differenza, ad esempio, dell'algebra), vi è un'ulteriore difficoltá nella rappresentazione visiva che presentando una situazione particolare che coinvolge il soggetto, nasconde l'esigenza di dimostrare che la *tesi* è *indipendente* dalle particolaritá della situazione considerata. Basta pensare all'atteggiamento *psicologico* di non pochi studenti di non ritenere necessarie certe dimostrazioni geometriche, perchè vedono giá nel *disegno* la *veritá* delle richieste di un certo problema geometrico. Si esprimono spesso con frasi del tipo "è evidente", "è ovvio che la figura geometrica è un rettangolo" o si pongono la domanda "che cosa devo dimostrare?".

In queste loro affermazioni traspare il problema di fondo: una rappresentazione è un *modello*, in cui tutto puó "funzionare" per bene, mentre la dimostrazione richiede di stabilire rapporti tra gli enti che valgono per *tutti* i modelli, anche per quelli critici, in cui il "funzionamento" non è altrettanto egregio.

Ritornando alla questione posta, diversi sono i concetti di dimostrazione in matematica: vanno dal tentativo di *"convincimento" "oltre ogni dubbio"* alla *formale* dimostrazione studiata dalla logica matematica. In certi casi la dimostrazione matematica è la dimostrazione logica e garantisce l'indipendenza dal caso particolare. Nella usuale dimostrazione in matematica sono in gioco aspetti *semantici* che non vanno confusi con aspetti *sintattici*: la dimostrazione tiene conto, infatti, dei *significati* dei termini presenti nell'enunciato oggetto di dimostrazione (significato, ad esempio, di "rette parallele", "rette perpndicolari", di equazione, ...) e consiste in una successione *finita* di affermazioni che tengono conto, via via, dei fatti matematici *supposti* (*ipotesi*) e termina con la constatazione dell'affermazione desiderata (*tesi*).

"Anzitutto è necessario far capire la necessitá di assumere alcuni termini primitivi e alcuni assiomi: per evitare circoli viziosi e rinvii all'infinito, bisogna prendere qualche termine senza averlo definito e qualche affermazione senza averla dimostrata" ([28], p.72). L'allievo eviterá affermazioni senza senso, talora prive anche di "senso comune".

"E' facile constatare sui libri di testo che è data una diversa rilevanza didattica tra gli assiomi o postulati della Geometria e le cosiddette *proprietá formali* dell'Aritmetica e dell'Algebra. Quest'ultime non vengono neppure "etichettate" con il nome di assioma e la trattazione dell'Aritmetica e dell'Algebra che segue, di solito, non presenta una corretta e completa derivazione dei vari risultati dalle proprietá...A sostegno della geometria c'è forse la possibilitá di una fonte dell'intuizione spaziale, per alcuni più immediata, avente riscontro nel mondo visibile. Tuttavia chi sostiene questa posizione, si deve rendere conto che l'intuizione forse rende facili le *argomentazioni*, presentate a sostegno della scelta dei postulati, ma non rende più semplice ed intuitivo il procedimento dimostrativo. Ne fa fede il fatto che le cosiddette dimostrazioni sintetiche sono spesso meno praticate" ([21], pp.131 - 133).

Terza fase.

Se l'attenzione allo *spazio euclideo* viene maturata sottolineando la portata delle scelte fondazionali, si determina per l'insegnante un momento significativo sul piano didattico per operare esplicitamente scelte diverse introducendo, ad esempio, ad un primo livello, il problema delle geometrie non euclidee.

Una tale scelta contenutistica sarebbe utile per la formazione di una mentalitá critica nel giovane non accontentandosi delle usuali asettiche presentazioni della geometria.

Una domanda *chiave* in tale direzione potrebbe essere formulata in modi diversi. Dipende dal discorso matematico oggetto di discussione della classe. Ne propongo quattro.

- E' possibile oltrepassare l'esperienza sensibile?
- Come mostrare che il quinto postulato di Euclide puó essere negato?
- Come mostrare che sono possibili geometrie diverse da quella euclidea?
- Se si oltrepassa l'esperienza sensibile, chi ci garantisce la coerenza di una teoria della geometria?

C'è una via didattica? Forse la via dei *contro - modelli* è da favorire, perchè le proprietá di oggetti matematici non siano presentate "come se si trattasse di cose ovvie e scontate". Il modello di "piano" non euclideo di Klein (Fig. 5) e il modello di "superficie curva nello spazio" di Riemann, non necessariamente una sfera (Fig. 6) nell'ambito della geometria euclidea, offrono un'interazione tra *rappresentazione* e *linguaggio geometrico* e *teoria*. E' neccessario un atteggiamento problematico ([3], pp. 324-342, [26]) di rapportarsi con i *fondamenti* della matematica, altamente formativo per portare a livelli più alti lo spirito *critico di uno studente delle superiori.*

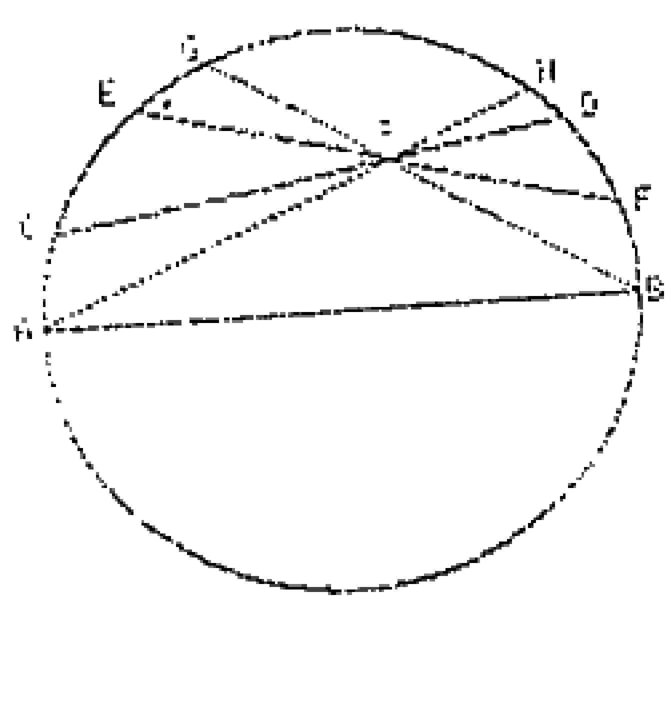

Fig.5

"Punti" sono i punti del cerchio euclideo privato della circonferenza. "Rette" sono le corde. Data una "retta", per un punto non appartenente ad essa passa piu' di una parallela. Il postulato dell'unicita' della parallela non vale nel modello di Klein.

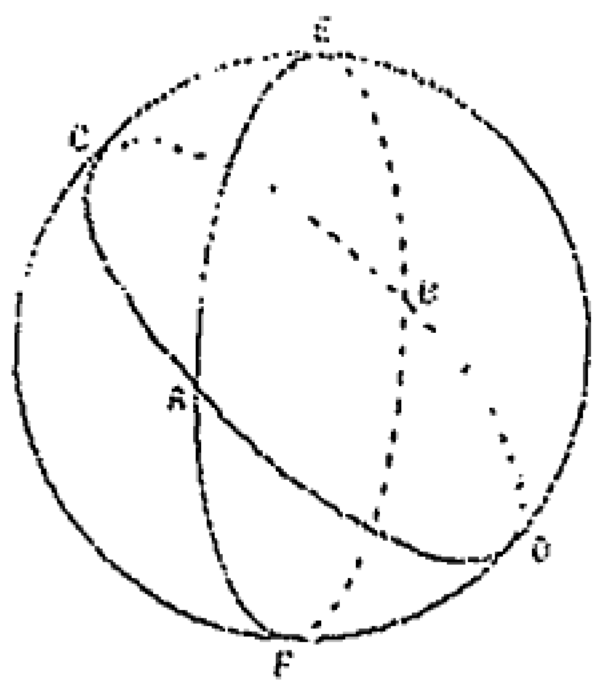

Fig. 6

"Punti" sono coppie di punti diametralmente opposti della superficie sferica euclidea. "Rette" sono l'insieme delle coppie di punti diametralmente opposti che giacciono su una circonferenza massima. Data una "retta" ed un "punto" che non le appartiene, non esistono "rette" parallele ad essa: ogni coppia di "rette" ha in comune un "punto". Non esistono "rette" parallele nel modello di Riemann.

Di fronte a tale situazione in cui l'intuizione non è abbandonata, l'allievo vive momenti di stupore e sorpresa e si pone tante domande, bellissime per una mente che *pensa* e che *non ripete* :

- Le *rette* non sono più quelle che conoscevo?
- Gli angoli non sono più coi lati *rettilinei?*
- La somma degli angoli interni di un triangolo *sulla sfera non* è più 180 gradi! *Vedo una somma maggiore,* se penso al reticolato geografico dei meridiani e dei paralleli! Come verificarlo col modello? E nel "piano" cosa accade? Sará minore? Come verificarlo?
- Se considero il modello della sfera, è possibile verificare l'assioma dell'unicitá della retta per due punti?
- Quale la Geometria valida per lo *spazio fisico*?
- La Terra si puó approssimare ad una sfera. Forse puó essere più conveniente una geometria diversa da quella euclidea?...

..."l'assoluta fede in Euclide e nell'intuizione spaziale è costretta a ritirarsi dal sensibile visivo ad un campo più astratto,... e in buona parte è sostituita dal rigore delle dimostrazioni...Per accertare l'ammissibilitá di diverse geometrie si fa ricorso a rappresentazioni, o modelli, in cui si vedono concretati i postulati...Una teoria è accettata (3) non tanto per quel che descrive, quanto perchè esiste qualcosa in cui puó essere interpretata, e quindi non è contraddittoria" ([25]. E' rotto il secolare rapporto geometria - spazio sensibile. La costruzione di *modelli* interpretativi delle geometrie non - euclidee segna la crisi dell'*evidenza* nei processi di matematizzazione (su questi insistono i nuovi programmi della scuola italiana).

E' in gioco la *libertá* di fare geometria con sacrificio dell'intuizione geometrica euclidea. Importante è non fare scelte acriticamente imposte o non espresse, perchè imprigionano la mente di chi criticamente vuol apprendere.

L'obiettivo: "Un mito da sfatare è la totale certezza, chiarezza e staticitá dei concetti matematici, il cui corollario è una affidabilitá che prevede discussioni" ([26]).

Alcune riflessioni conclusive.

Nei tre itinerari didattici si è insinuata la logica con un ruolo trasversale finalizzato ad un apprendimento critico della matematica con attenzione ai linguaggi, agli atteggiamenti propri del pensiero matematico (quali l'astrazione, la generalizzazione) e all'organizzazione logica delle conoscenze. Giocano un forte ruolo la sensibilitá culturale dell'insegnante e la sua capacitá didattica nel far cogliere, in modo adeguato al livello scolastico dell'allievo, aspetti critici nei contenuti oggetto di insegnamento, per evitare una visione distorta della matematica fatta di aride formule e di dimostrazioni da imparare a memoria senza un significato e senza comprensione. Occorre allora il superamento di una *trasmissione sistemata* e *definitiva* di contenuti con una scelta pedagogico - didattica di *smontaggio, critica, reinvenzione del fatto culturale.* Di conseguenza l'attivitá didattica rimane centrata sulla successione "problema

---

(3) Il termine "accettare" vuol significare "non è da rifiutare"; ben altro è il problema di quale teoria scegliere.

- concetti - modelli - teorie - applicazioni - metodi di ricerca" con attenzione alla sostanza del discorso e alla esigenza di cautela nelle precisazioni. E questo comporta per prima cosa nell'insegnante una presa di coscienza dell'idea della matematica che vuole insegnare con conseguente scelta didattica. Se guarderá alla matematica come modello di pensiero, mezzo di indagine della realtá, in una visione non definitiva e non assoluta, risponderá allo scopo di formazione critica dei giovani, in collaborazione con le altre discipline e in misura non diversa.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Bernardi, La logica matematica: metodo e contenuti, Notiziario UMI., Novembre 1987, Supplemento al n.11, pp.22 - 29.

[2] R. Bonola, La geometria non - euclidea. Esposizione storico - critica del suo sviluppo, Zanichelli, 1975.

[3] R. Courant e H. Robbins, Che cos'è la matematica, Boringhieri, 1950.

[4] B. De Finetti, Saper vedere in matematica, Loescher, 1988.

[5] F. Enriques - G. De Santillana, Compendio di storia del pensiero scientifico dall'antichitá fino ai tempi moderni, Zanichelli, 1936.

[6] F. Enriques, Le matematiche nella storia e nella cultura, Zanichelli, 1982.

[7] R. Ferro, La didattica della teoria degli insiemi, in questo Quaderno.

[8]* R. Ferro, Alcune osservazioni per l'insegnamento della logica nel programma di matematica, Intervento I.R.R.S.A.E. Veneto.

[9]* R. Ferro, Iniziazione alla logica matematica, Intervento al Convegno CIIM di Grosseto, ottobre 1992.

[10]* R. Ferro, Definire, argomentare, dimostrare: il ruolo della logica, Atti Internuclei Scuola Superiore, Genova 1991.

[11] E. Fischbein, Il ruolo dei modelli intuitivi nell'apprendimento della matematica, Processi cognitivi e

apprendimento della matematica nella scuola elementare, a cura di Giovanni Prodi, La Scuola, 1987, pp.26 - 33.

[12] E. Fischbein, I concetti di accettazione intuitiva e di modello, Numeri e operazioni nella scuola di base, a cura di Liliana Artusi Chini, Zanichelli, 1985, pp.14 - 17.

[13] A. Iacomella, Valori culturali della Matematica nella formazione del futuro diplomato della Scuola Secondaria Superiore, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 12, n. 2, (Febb. 1989), 427-431.

[14] A. Iacomella, Questione di metodo, in La vita Scolastica, giugno 1992, n. 18.

[15] A. Letizia, I Polinomi e gli interi relativi, in questo quaderno.

[16] Lobacevskij N., Nuovi principi della geometria, Boringhieri, 1978.

[17] S. Maracchia, La matematica come sistema ipotetico - deduttivo, Le Monnier, 1975.

[18] C. Marchini, Problematiche dell'insegnamento della logica nella scuola elementare, Intervento al Seminario IRRSAE - Puglia per la formazione di Esperti in matematica, Gallipoli (Le) 26/02/87 e 13/03/87.

[19] C. Marchini, Le sostituzioni e la didattica della matematica, Bollettino U. M. I. (7) 4 A (1990), 145 - 153.

[20] C. Marchini, Modelli e Logica, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 12, n. 2, (Febb. 1989), 187-192).

[21] C. Marchini, Argomentazione e dimostrazione. Alcune riflessioni sugli aspetti didattici, in L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 1o, n. 2, (Febb. 1987), 121-140).

[22] C. Marchini, Dall'"insiemistica " alla teoria degli insiemi. 1. (Introduzione alla teoria di Zermelo e Fraenkel), la Matematica e la sua didattica, Anno II, n. 3, 1988, pp. 6-13).

[23] C. Marchini, Dall'"insiemistica " alla teoria degli insiemi. II. (I naturali di Von Neumann), la Matematica e la sua didattica, Anno III, n. 1, 1989, pp. 22-28).

[24] G. Polya, Come risolvere i problemi di matematica, Feltrinelli, 1967.

[25] G. Polya, La scoperta matematica, voll. 1/2, Feltrinelli, Mi, 1983.

[26] G. Sambin, Alla ricerca della certezza perduta. Forma - contenuto nei fondamenti della matematica, Atti del Convegno sul tema "Forma, rappresentazione, struttura", organizzato dall'Istituto Italiano per gli Studi Filosofici e dall'Universitá degli Studi di Padova, Padova, 3 - 6 Dicembre 1986.

[27] F. Speranza, Nuove prospettive per la Geometria nelle Scuole Superiori. 1, Nuova Secondaria, n. 8 (15 aprile 1990), pp.73 - 75.

[28] F. Speranza, Nuove prospettive per la Geometria nelle Scuole Superiori. 2, Nuova Secondaria, n. 9 (15 maggio 1990), pp. 65 - 67.

[29] F. Speranza, La razionalizzazione della geometria, lavoro eseguito nell'ambito delle attivitá finanziate dal M. P. I. (Progetto "Ricerche teoriche e sperimentali sull'insegnasmento della Matematica") e dal Comitato per le Scienze Matematiche del C. N. R. (contr. n. 8800297.01).

[30] A. Tarski, Veritá e dimostrazione, Le Scienze, Numero 50, Ottobre 1972, pp.70 - 79.

---

* Gli articoli [8]*, [9]*, [10]*, pubblicati o resi disponibili tra la presentazione di questo lavoro e la pubblicazione del Quaderno, sono stati citati data la forte pertinenza al tema.