Introduzione.

Questo è il terzo Quaderno che raccoglie alcuni degli interventi tenuti a Lecce nell'A.A. 1990-91, nel contesto del progetto di ricerca pluriennale su **Collaborazione tra Università e Scuola Secondaria Superiore. Problemi culturali e didattici nei Nuovi Programmi di Matematica ed Informatica per la Scuola Secondaria Superiore.**

L'attività si è basata sostanzialmente su incontri di (145) docenti salentini con ricercatori, allo scopo ambizioso di porre a contatto gli insegnanti delle Scuole Superiori con i temi della ricerca in Didattica della Matematica, senza dimenticare argomenti di carattere pedagogico e psicologico di notevole impatto per la loro formazione.

Accanto a questa attività, abbiamo promosso il lavoro di gruppi più piccoli, su proposte effettive di ricerca. I temi individuati sono stati i numeri reali e l'analisi dell'eguaglianza e delle sue proprietà, argomento questo che ha portato i proff. A. Barnaba, M. Barnaba, A. Peluso, G. Russo ad elaborare una breve nota sui *Problemi didattici del concetto di eguaglianza* in pubblicazione su L'Educazione Matematica.

Il calendario degli incontri svoltisi nell'A.A. 1990-91 è stato il seguente:

22 novembre 1990 - A. Letizia: *La ricchezza di $\mathbb{Z}$, oggetto di riflessione.*

29 novembre 1990 - A. Letizia: *I polinomi, questi sconosciuti..*

6 dicembre 1990 - R. Scozzafava: *Problematiche dell'insegnamento di probabilità e statistica nella scuola secondaria.*

17 gennaio 1991 - R. Ferro: *Il videodisco interattivo e l'insegnamento della Teoria degli Insiemi.*

21 febbraio 1991 - D. Lenzi: *Problematiche sull'Aritmetica modulare.*

21 marzo 1991 - N. Malara: *Dall'analisi del testo di un problema al ragionamento ipotetico.*

11 aprile 1991 - R. Ferro: *Problemi didattici della Teoria degli Insiemi.*

16 aprile 1991 - C. Mammana: *Geometria nella Scuola Secondaria, alcune riflessioni.*

2 maggio 1991 - A. Iacomella: *Interazione tra rappresentazione matematica e linguaggio.*

9 maggio 1991 - B. Scimemi: *Algebra e Geometria piegando la carta.*

23 maggio 1991 - P. Margiotta: *Il ruolo delle sostituzioni nell'insegnamento-apprendimento.*

30 maggio 1991 - F. Priore: *La valutazione: fondamenti storici, epistemologici e giuridici.*

6 giugno 1991 - G. Papy: *I ponti di Königsberg.*

Come si può cogliere scorrendo l'elenco degli incontri, si è cercato di portare voci diverse, alternando quelle locali ad invitati di altre sedi. Gli argomenti trattati hanno spaziato in vari ambiti contribuendo sia ad approfondire tematiche delicate, sia ad analizzare aspetti più propriamente didattici.

Come curatore di questo Quaderno ho avuto difficoltà a convincere molti dei relatori a lasciare traccia per iscritto dei loro interventi. Chiedo scusa ai lettori interessati se il panorama risulta in questo modo incompleto. Evidentemente ho avuto più fortuna con i colleghi di Lecce, i quali oltre a collaborare fattivamente all'organizzazione degli incontri, hanno cercato di tradurre in scritti. Sono anche confortato dall'attenzione con cui i precedenti numeri dei Quaderni di Lecce sono stati accolti negli altri nuclei di ricerca. Ora che per motivi familiari ho lasciato la sede di Lecce per quella di Parma, vorrei concludere la mia partecipazione alle attività didattiche che ho contribuito ad organizzare con un saluto ed un augurio. Il saluto è rappresentato dal testo di un seminario tenuto nell'A.A. 1991/92 e che appare qui, anche se non relativo all'anno accademico sopra indicato. L'augurio è che gli incontri con i docenti di Scuola Superiore ed anche di altri ordini, continuino e siano proficui, in modo che l'entusiasmo che ho incontrato e la disponibilità che mi aveva stupito, non vengano a mancare.

Lecce 12 marzo 1992

Carlo Marchini

SUGLI INTERI RELATIVI ED I POLINOMI

A.Letizia
Dipartimento di matematica. Universita' di Lecce.

Introduzione.

I proponenti del progetto pluriennale di ricerca "**Collaborazione tra Universita' e Scuola Secondaria Superiore. Problemi culturali e didattici nei nuovi Programmi di Matematica ed Informatica per la Scuola Secondaria Superiore**" mi hanno invitato a presentare alcune riflessioni riguardanti gli interi relativi ed i polinomi.

Cio' e' venuto spontaneo partendo dalla considerazione che l'estrema ricchezza del dominio degli interi e la dimestichezza che si ha con essi, con le loro operazioni e con alcune proprieta' di tale dominio, spesso portano, da una parte a non comprendere a pieno il ruolo di queste proprieta' e gli eventuali legami esistenti tra loro, dall'altra ad un uso "disinvolto" delle stesse.

Scopo di questa esposizione e' cercare di chiarire tali questioni, anche per giungere ad una migliore comprensione del mondo dei polinomi (...una volta detto cosa si intenda per polinomio!).

A tal fine e' sembrato opportuno cominciare annotando quanto sembra ben noto sugli interi, evidenziando via via i dubbi e le curiosita', per fare di questi la molla che spingera' ad una visione piu' consapevole di tutta una serie di fatti che, per essere tanti ed estremamente familiari, si finisce per non considerare piu' con la dovuta attenzione.

Ha collaborato al lavoro, con numerosi suggerimenti derivanti dalla sua lunga esperienza nella scuola secondaria superiore, la professoressa S. Leone.

1. LA RICCHEZZA DI $\mathbb{Z}$: RIFLESSIONI.

Indicato con $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi relativi, posto cioe' $\mathbb{Z}=\{....,-2,-1,0,1,2,...\}$, iniziamo col fare qualche "pettegolezzo" sugli interi al fine di costruirci un "inventario ragionato" dei fatti piu' noti di $\mathbb{Z}$, inventario che articoleremo in una successione di punti.

Punto 1. OPERAZIONI E PROPRIETA'.

Sappiamo che su $\mathbb{Z}$ sono definite due operazioni, cioe' due applicazioni

$+:\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ e $:\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$

dette rispettivamente addizione e moltiplicazione.

Ne scaturisce subito che somma di interi a,b e' l'immagine, indicata con $a+b$ (al posto di $+[(a,b)]$), che l'applicazione addizione fa corrispondere alla coppia (a,b); quindi somma di interi e' un intero.

Analogamente prodotto di interi a,b e' un intero indicato con $a\cdot b$ o piu' semplicemente con ab.

Quanto sottolineato non ci meraviglia e d'altronde cio' non e' una caratteristica di $\mathbb{Z}$. Ben sappiamo, per esempio, che somme e prodotti di razionali sono razionali, che somme e prodotti di numeri complessi sono numeri complessi, che somme e prodotti di matrici sono matrici, che somme e prodotti di polinomi sono polinomi... ecc. ecc..

Riflettendo pero' su quanto detto viene spontaneo chiedersi: possiamo allora parlare di somma di monomi visto che in generale, come sappiamo, essa non e' un monomio?

Gia' un dubbio si fa strada...non scacciamolo, anche se in questo momento ci sembra di non poterlo chiarire; piuttosto annotiamo la domanda (sara' la prima di una serie..) e proseguiamo la nostra indagine ripromettendoci di ritornare in seguito su questo.

Alcune proprieta' dell'addizione e della moltiplicazione in $\mathbb{Z}$ sono (o meglio dovrebbero essere!) ben note. Per completezza le riportiamo in uno schema riassuntivo:

(I) L'addizione e' associativa e commutativa. Inoltre valgono le seguenti proprieta':

$\forall a \in \mathbb{Z}$: $a+0=0+a=a$

$\forall a \in \mathbb{Z}$ $\exists b \in \mathbb{Z}$ $(a+b=b+a=0)$

(II) La moltiplicazione e' associativa e commutativa. Inoltre vale la proprieta':

$\forall a \in \mathbb{Z}$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

(III) La moltiplicazione e' distributiva rispetto all'addizione.

Inoltre sussiste una proprieta' che e' un tipico esempio di proprieta' "occulta", nel senso che viene usata senza comprendere che la sua mancanza porterebbe al crollo di un'ala del castello di nozioni che riteniamo acquisite. Tale proprieta', nota come <u>legge di annullamento del prodotto</u>, dice che

(IV) $\forall a,b \in \mathbb{Z}$: $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ oppure $b=0$.

Il sussistere di (I) viene espresso dicendo che $(\mathbb{Z},+)$ e' un gruppo commutativo con elemento neutro 0.

La (II) viene riassunta dicendo che $(\mathbb{Z},\cdot)$ e' un monoide commutativo con elemento neutro 1.

Il sussistere contemporaneo di (I),(II),(III) viene espresso affermando che $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ e' un anello commutativo unitario. Si conviene infatti chiamare *anello commutativo unitario* ogni terna $(A,+,\cdot,)$ con A insieme non vuoto, $+,\cdot$, applicazioni da AxA in A (cioe' operazioni binarie in A) tali che:

(i) $\forall a,b \in A$: $a+b=b+a$; $\forall a,b,c \in A$: $a+(b+c)=(a+b)+c$;

$\exists z \in A \forall a \in A$ $(a+z=z+a=a)$ (si dimostra che tale z e' unico, viene indicato con 0 ed e' detto elemento neutro rispetto all'addizione); $\forall a \in A \exists b \in A$ $(a+b=b+a=0)$.

(ii) $\forall a,b \in A$: $a \cdot b = b \cdot a$; $\forall a,b,c \in A$: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

$\exists e \in A$ $(a \cdot e = e \cdot a = a)$.

(Analogamente a quanto visto per 0, si dimostra che un tale e e' unico, viene indicato con 1 ed e' detto elemento neutro rispetto alla moltiplicazione.)

(iii) $\forall a,b,c \in A$: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Infine il sussistere contemporaneo di (I),(II),(III),(IV) equivale ad affermare che $(\mathbb{Z},+,\cdot)$e' un dominio unitario. Si conviene infatti chiamare *dominio unitario*, in breve D.U., ogni anello commutativo unitario nel quale valga

(iv) $\forall a,b \in A$: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a=0$ oppure $b=0$.

Punto 2. MULTIPLI, DIVISORI, ...

Dati $a,b \in \mathbb{Z}$ diciamo usualmente che a *divide* b, e scriviamo $a|b$, (da non confondersi con la frazione $\frac{a}{b}$ di numeratore a e denominatore b) se e solo se **esiste** $c \in \mathbb{Z}$ tale che $b=ca$.

Facciamo alcuni esempi per chiarire tale definizione.

L'intero 4 divide -8 perche' esiste $-2 \in \mathbb{Z}$ tale che $-8=(-2) \cdot 4$, mentre non divide 5 perche' non esiste alcun intero che moltiplicato per 4 dia 5.

L'intero -7 divide 0 perche' esiste $0 \in \mathbb{Z}$ (non e' richiesto che c sia diverso da 0) tale che $0=0 \cdot (-7)$.

L'intero 0 non divide 2 perche' non esiste alcun intero che moltiplicato per 0 dia 2, mentre 0 divide 0 "ad abundantiam" in quanto $0=1 \cdot 0=(-3) \cdot 0=$...(non e' richiesto che c sia unico).

Sappiamo che in $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ valgono:

(i) $\forall a \in \mathbb{Z}$: $a|a$;

(ii)$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$: $a|b$, $b|c \Rightarrow a|c$.

Il sussistere di (i) e (ii) si esprime dicendo che la relazione "*...divide...*" e' un preordine in $\mathbb{Z}$.

E se a e b variano nell'insieme $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,...\}$ dei numeri naturali invece che in tutto $\mathbb{Z}$?

Allora chiaramente (i) e (ii) valgono in particolare per ogni $a,b,c \in \mathbb{N}$; inoltre e' noto che in $\mathbb{N}$ (anche se forse non ci siamo soffermati sull'importanza dell'insieme rispetto al quale si svolgono le nostre considerazioni), vale:

(iii) $\forall a,b \in \mathbb{N}$: $a|b,\ b|a \Rightarrow a=b$.

Pertanto la relazione Δ definita in $\mathbb{N}$ ponendo:

$$\forall a,b \in \mathbb{N}:\ a\Delta b :\Leftrightarrow a \textit{ divide } b$$

e' una relazione d'ordine; quindi in $\mathbb{N}$, con il linguaggio proprio delle relazioni d'ordine, potremo dire che "*a* e' *minore o uguale b* (rispetto a Δ)" invece di "*a divide b*" e potremo scrivere $a \leq b(\Delta)$ invece di $a \mid b$.

E' opportuno notare come il comportamento di Δ sia diverso dal comportamento della relazione d'ordine usuale su $\mathbb{N}$ (indicata con $\leq$); infatti, mentre per ogni $a,b \in \mathbb{N}$ risulta che $a \leq b$ oppure che $b \leq a$, cio' non e' vero per Δ: se, per esempio, consideriamo i numeri naturali 5 e 7 osserviamo che 5 non e' minore o uguale a 7 rispetto a Δ (infatti 5 non divide 7) e che 7 non e' minore o uguale a 5 rispetto a Δ (infatti 7 non divide 5).

Notiamo anche che se $a \leq b(\Delta)$ allora $a \leq b$ rispetto alla relazione d'ordine usuale, ma non e' vero il viceversa. Infatti, 3 e' minore o uguale a 4 rispetto alla relazione d'ordine usuale, ma 3 non e'minore o uguale 4 rispetto a Δ.

Osserviamo infine che la (iii) non puo' essere estesa a $\mathbb{Z}$; infatti esistono almeno due elementi a,b di $\mathbb{Z}$ tali che ($a \mid b$, $b \mid a$) e $a \neq b$ (per esempio 2 e -2).

Punto 3. INTERI "PARTICOLARI".

In $\mathbb{Z}$ sappiamo esistere elementi "particolari"; cerchiamo di approfondire tali particolarita'.

(I) I primi numeri che vengono in mente sono 1 e -1.

Poniamo $\bigsqcup_{\mathbb{Z}} := \{1,-1\}$. La proprieta' di cui godono gli elementi di $\bigsqcup_{\mathbb{Z}}$ si esprime nel modo seguente:

$$"\forall a \in \bigsqcup_{\mathbb{Z}} \quad \exists b \in \mathbb{Z} \quad ab=1"$$

(osserviamo che di conseguenza $b \in \bigsqcup_{\mathbb{Z}}$).

Legata ad $\bigsqcup_{\mathbb{Z}}$ e' la relazione $\mathscr{R}$ (leggiamo *"...e' associato di.."*.) definita da:

$$\forall a,b \in \mathbb{Z} \qquad a\mathscr{R}b :\Leftrightarrow \exists u \in \bigsqcup_{\mathbb{Z}} \quad a=ub.$$

La relazione $\mathscr{R}$ e' di equivalenza ed esempi di classi di elementi equivalenti rispetto a $\mathscr{R}$ sono $[2]_{\mathscr{R}}=\{2,-2\}$,$[-7]_{\mathscr{R}}=\{7,-7\}$, $[0]_{\mathscr{R}}=\{0\}$; d'altra parte e' di verifica immediata il fatto che per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ si ha che $[a]_{\mathscr{R}}=\{a,-a\}$.

(II) Altri interi particolari che vengono in mente sono 2,3,5, 7,11,....Qual e' o quali sono le proprieta' che li differenziano dagli altri? La nostra esperienza ci dice che questi numeri sono elementi $a \in \mathbb{Z}$ tali che $a \neq 0$, $a \notin \bigsqcup_{\mathbb{Z}}$ e per i quali valgono :

(P_1) $"\forall b,c \in \mathbb{Z} : a=bc \Rightarrow b \in \bigsqcup_{\mathbb{Z}}$ oppure $c \in \bigsqcup_{\mathbb{Z}}"$.

e

(P_2) $"\forall b,c \in \mathbb{Z} : a \mid bc \Rightarrow a \mid b$ oppure $a \mid c"$.

Per non confonderci diciamo *irriducibile* un elemento $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $a \notin \bigsqcup_{\mathbb{Z}}$ che goda della proprieta' (P_1); diciamo *primo* un elemento $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $a \notin \bigsqcup_{\mathbb{Z}}$ che goda della proprieta' (P_2). Quindi i numeri 2,3,5,..... sono irriducibili e sono primi.

E i numeri -2,-3,-5,-7,....? Un attimo di riflessione ed intuiamo che anche questi interi, che sono diversi da 0 e non appartenenti a $\bigsqcup_{\mathbb{Z}}$, godono della proprieta' (P_1) e della proprieta' (P_2), sono cioe' irriducibili e primi.

Sempre la nostra esperienza ci suggerisce che nel <u>dominio unitario</u> $(\mathbb{Z},+,.)$ <u>essere irriducibile equivale ad essere primo</u>. Attenzione pero'! Questo non vuol dire che in $\mathbb{Z}$ la proprieta' (P_1) sia equivalente alla proprieta' (P_2). Infatti per il numero 0 si ha che esistono $a,b \in \mathbb{Z}$ tali che $0=a \cdot b$ e $a \notin \bigsqcup_{\mathbb{Z}}$ e $b \notin \bigsqcup_{\mathbb{Z}}$ (per esempio $a=0$ e $b=5$), circostanza questa che basta a garantire che 0 <u>non</u> gode della proprieta' (P_1); mentre possiamo facilmente verificare, grazie alla legge di annullamento del prodotto, che 0 gode della proprieta' (P_2). Infatti se $0 \mid bc$ allora esiste $t \in \mathbb{Z}$ tale che $bc = t \cdot 0 = 0$ quindi $b=0$ oppure $c=0$ e pertanto, poiche' 0 divide 0, si ha che $0 \mid b$ oppure $0 \mid c$.

Ritornando comunque al fatto che in $\mathbb{Z}$ un elemento e' irriducibile se e solo se e' primo, siamo indotti a chiederci: perche' accade cio'? E' cosi' per gli elementi di un qualunque dominio unitario? E se cosi' non fosse, da quale proprieta' del dominio $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ dipende tale equivalenza? Le domande continuano ad affiorare.....comunque procediamo nel nostro elenco.

Punto 4. DIVISIONE COL RESTO.

E' noto che e' possibile estendere agli interi relativi il fatto che nell'insieme $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, costituito dai numeri naturali e dal numero 0, e' possibile "fare la divisione con il resto" intentendo con cio' affermare che, dati $a,b \in \mathbb{N}_0$ con $b \neq 0$ esistono (e sono in questo caso unici) $q,r \in \mathbb{N}_0$ tali che $a=qb+r$ con $0 \leq r < b$.

Possiamo esprimere tale estensione dicendo che esiste un'applicazione

$\varphi: \mathbb{Z} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ (..e' il valore assoluto)

tale che

i) per ogni $a,b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, se $a \mid b$ allora $\varphi(a) \leq \varphi(b)$;

ii) per ogni $a,b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, esistono $q,r \in \mathbb{Z}$ tali che $a=qb+r$ con $r=0$ oppure $\varphi(r) < \varphi(b)$.

Notiamo che in ii) non si parla di unicita' di q ed r. D'altra parte e' ben noto che, dati per esempio -8 e -5, esistono $q_1=1$, $r_1=-3$ e $q_2=-2$, $r_2=2$ tali che $-8=1\cdot(-5)+(-3)$ con $|-3| < |-5|$ e $-8=(-2)\cdot(-5)+(+2)$ con $|2| < |-5|$; ancora, dati per esempio 7 e 2, si ha che $7=3\cdot 2+1$ con $|1| < |2|$ ed $7=4\cdot 2+(-1)$ con $|-1| < |2|$.

Osserviamo come l'ultimo esempio ci porta a riflettere sul fatto che, riguardo alla divisione col resto, ci troviamo ancora in una situazione nella quale i numeri naturali si comportano in modo diverso a seconda che si svolgano le nostre considerazioni considerando come ambiente $\mathbb{N}_0$ oppure $\mathbb{Z}$.

Punto 5. DECOMPOSIZIONE IN FATTORI IRRIDUCIBILI.

In $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ "ogni" elemento e' irriducibile oppure prodotto "in modo unico" di un numero finito di elementi irriducibili. Per aiutarci a formalizzare tale fatto esaminiamo alcuni esempi ed osserviamo che:

$$6=2\cdot 3=(-2)\cdot(-3)=3\cdot 2=(-3)\cdot(-2);$$

$$-8=(-2)\cdot 2\cdot 2=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=2\cdot(-2)\cdot(2)=\ldots\ldots\ .$$

Si vede che le decomposizioni di uno stesso intero relativo hanno tutte lo stesso numero di fattori e che, a meno dell'ordine e di fattori associati, sono "praticamente" uguali. Pero', se decidiamo di usare solo gli irriducibili positivi, abbiamo bisogno anche di -1 e si ha:

$6=2\cdot 3=\ 3\cdot 2\ ;\quad -8=(-1)\cdot 2\cdot 2\cdot 2\ ;\quad -6=(-1)\cdot 2\cdot 3=(-1)\cdot 3\cdot 2\ .$

Possiamo anche decidere di usare solo gli irriducibili negativi, allora $6=(-2)\cdot(-3)=(-3)\cdot(-2)\ ;\ -8=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$.

E se decidessimo di usare 2,-3,5,-7,....? Allora.....

Riflettiamo un momento sull'espressione "decidere di usare". Indicato con P l'insieme degli irriducibili di $\mathbb{Z}$, ogni volta e' come fissare sugli irriducibili una cosiddetta *funzione di scelta*

$$\begin{aligned} \varphi\ : P/_{\mathcal{R}} &\longrightarrow P \\ X &\longmapsto x\in X \end{aligned}$$

Infatti, essendo $P=\{2,-2,3,-3,5,-5,7,-7,\ldots\}$ e $P/_{\mathcal{R}}=\{\{2,-2\},\{3,-3\},\{5,-5\}\ldots\}$, nel primo caso abbiamo fissato la funzione φ che a $\{2,-2\}$ associa 2 , a $\{3,-3\}$ associa 3 , a $\{5,-5\}$ associa 5 e cosi di seguito , nel secondo caso abbiamo fissato la funzione φ che a $\{2,-2\}$ associa -2 , a $\{3,-3\}$ associa -3 e cosi' via . Per tanto, detti gli elementi di $\varphi(P/_{\mathcal{R}})$ *gli irriducibili fissati da* φ, si ha che nel primo caso gli irriducibili fissati dalla funzione di scelta sono 2,3.5,7...,nel secondo sono -2,-3,-5,-7,...cioe' gli irriducibili che volta per volta avevamo "deciso di usare"!

Formalizzando , possiamo dire :

(i) Per ogni $a\in\mathbb{Z}$ risulta che se $a\neq 0$ e $a\notin \sqcup_{\mathbb{Z}}$ allora esistono

$p_1,p_2,\ldots,p_t \in \mathbb{Z}$ irriducibili tali che $a=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$.

(ii) Se $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_t = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$ con $p_1,\ldots,p_t,q_1,\ldots,q_s$ elementi irriducibili di $\mathbb{Z}$, allora $t=s$ ed esiste una permutazione $\{i_1,\ldots,i_t\}$ dell'insieme $\{1,2,\ldots,t\}$ tale che $p_1 \mathcal{R} q_{i_1},\ldots,p_t \mathcal{R} q_{i_t}$.

Inoltre , se fissiamo una funzione di scelta $\varphi: P/_{\mathcal{R}} \longrightarrow P$, dato $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $a \notin \bigsqcup_{\mathbb{Z}}$ esistono e sono unici $u \in \bigsqcup_{\mathbb{Z}}$ e $p_1,p_2,\ldots,p_t$ irriducibili fissati da φ tali che $a=u \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$.

Punto 6. GLI IDEALI DI $\mathbb{Z}$.

Tutti e soli i sottoinsiemi non vuoti H di $\mathbb{Z}$ tali che i) $a,b \in H \Rightarrow a-b \in H$; ii) $a \in \mathbb{Z}$,$b \in H \Rightarrow a \cdot b \in H$ sono quelli costituiti da tutti i multipli di un fissato elemento.

Per esprimere cio' in modo sintetico conveniamo, dato un dominio unitario $(A,+,\cdot)$ di chiamare *ideale* ogni parte H non vuota di A soddisfacente i) e ii), e di definire *principale* ogni ideale H per il quale esiste $a \in H$ tale che $H=\{h \in A \mid \exists x \in A\ h=x \cdot a\}$. Con tale nomenclatura possiamo dire che per il dominio $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ si ha che ogni ideale e' principale.

Punto 7. MASSIMO COMUN DIVISORE.

Dati a, $b \in \mathbb{Z}$ parliamo di massimo comune divisore fra a e b. E qui le domande sono tante: cos'e'? esiste? e' unico? abbiamo qualche regola per calcolarlo? gode di qualche proprieta'? in caso affermativo, da quali proprieta' di $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ esse dipendono?

2.ESAME DELLE SINGOLE PROPRIETA' DI $(\mathbb{Z},+,\cdot)$.

A questo punto volendo esaminare eventuali correlazioni fra le proprieta' di $\mathbb{Z}$ precedentemente elencate e' opportuno fissare la nostra attenzione su di una proprieta' per volta. Quindi conviene svincolarci dagli interi e pensare ad un generico dominio unitario per il quale di volta in volta valga una delle proprieta' considerate ai punti 4, 5, 6 del paragrafo1. Diamo pertanto le definizioni alle quali faremo riferimento.

Sia $(A,+,\cdot)$ un dominio unitario.

Definizione2.1 Posto $\sqcup_A := \{a \in A \mid \exists b \in A \; ab=1\}$, ogni elemento di $\sqcup_A$ e' detto *elemento invertibile* di A.

Definizione2.2. Dati $a,b \in A$ diremo che a e' *associato* di b (in simboli $a\mathscr{R}b$) se a e' il prodotto di b per un elemento di $\sqcup_A$ cioe': "$a\mathscr{R}b :\Leftrightarrow \exists u \in \sqcup_A \; a=ub$".

Si verifica facilmente che la relazione "$\mathscr{R}$" fra gli elementi di A e' una relazione di equivalenza.

Definizione2.3. Dati $a,b \in A$ diremo che a *divide* b (in simboli $a \mid b$) se esiste un elemento c di A tale che $b=ca$, cioe':
$a \mid b$ sta per "$\exists c \in A \; b=ca$".

Definizione2.4. Con $a \in A$ diremo che a e' *irriducibile* se $a \neq 0, a \notin \sqcup_A$ e inoltre vale

(P_1) $\forall x,y \in A$: $a=xy \Rightarrow x \in \sqcup_A$ oppure $y \in \sqcup_A$.

Definizione2.5. Sia $a \in A$. Diremo che a e' *primo* se $a \neq 0$, $a \notin \sqcup_A$ e inoltre vale

(P_2) $\forall x,y \in A$: $a \mid xy \Rightarrow a \mid x$ oppure $a \mid y$.

Di dimostrazione immediata e' la seguente

Proposizione2.6. *Sia* $(A,+,\cdot)$ *un* D.U.*.Si dimostra che:*

$$\forall a \in A: \; a \text{ primo} \Rightarrow a \text{ irriducibile}.$$

Osserviamo che la proposizione2.6. mette in evidenza la non eccezionalita' del fatto che nel dominio unitario $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ogni elemento primo sia irriducibile, cosa questa che accade in ogni dominio unitario e che dipende essenzialmente da alcune proprieta' della moltiplicazione.

Ben diverso, come vedremo, sara' il discorso per quanto riguarda il sussistere o meno dell'implicazione "a irriducibile $\Rightarrow$ a primo".

Definizione2.7. Dato un dominio unitario $(A,+,\cdot)$ diremo che esso e' un *dominio a fattorizzazione unica* (D.F.U.) se valgono

(i) Per ogni $a \in A$ risulta che se $a \neq 0$ e $a \notin \bigsqcup_A$ allora esistono $p_1, p_2, \ldots, p_t \in A$ irriducibili tali che $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$.

(ii) Se $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_t = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$ con $p_1, p_2, \ldots, p_t, q_1, q_2, \ldots, q_s$ elementi irriducibili di A allora $t = s$ ed esiste una permutazione $\{i_1, i_2, \ldots, i_t\}$ dell'insieme $\{1,2,..,t\}$ tale che $p_1 \mathcal{R} q_{i_1}, \ldots, p_t \mathcal{R} q_{i_t}$.

Si puo' dimostrare che, se esiste una funzione di scelta $\varphi : P/_{\mathcal{R}} \longrightarrow P$ dove $P = \{a \in A \mid a \text{ irriducibile}\}$, dato $a \in A$, $a \neq 0$, $a \notin \bigsqcup_A$ esistono e sono unici $u \in \bigsqcup_A$, $p_1, p_2, \ldots, p_t \in \varphi(P/_{\mathcal{R}})$ tali che $a = u \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$.

Notiamo ora eplicitamente, perche' ci sara' utile in seguito, che:

Osservazione2.8. Dato un D.F.U. $(A,+,\cdot)$ con una assegnata funzione di scelta φ sugli irriducibili, per ogni $a \in A$, $a \neq 0$, $a \notin \bigsqcup_A$ si ha che esistono e sono unici $u \in \bigsqcup_A$ e $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *irriducibili fissati da* φ e a due a due distinti, tali che $a = u p_1^{h_1} p_2^{h_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{h_n}$ dove h_i indica il numero di volte che p_i compare nella decomposizione di a.

Pertanto se a e b sono elementi di A non nulli e non invertibili allora, inserendo opportunamente nelle decomposizioni di a e di b eventuali elementi irriducibili con esponente 0, si avra':

$$a = u p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n} \qquad b = v p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n}$$

con $r_i \geq 0$ e $s_i \geq 0$ per ogni $i \in \{1,\ldots,n\}$ e $p_1, p_2, \ldots, p_n$ irriducibili fissati da φ.

Per esempio se a=-500, b=525 e φ e' la funzione di scelta che fissa gli irriducibili positivi si ha:

$a=(-1)\cdot 2^2\cdot 5^3=(-1)\cdot 2^2\cdot 3^0\cdot 5^3\cdot 7^0$

$b=1\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7= \quad 1\cdot 2^0\cdot 3^1\cdot 5^2\cdot 7^1$.

Come e' usuale, data la definizione2.7, e' d'obbligo chiedersi se esistano domini a fattorizzazione unica . Sappiamo che almeno $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ e' un tale dominio. Ne esistono altri? La nostra esperienza con i polinomi e con le loro "decomposizioni in fattori" ci induce a pensare che oltre a $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ debba esserci qualche altro D.F.U., cosa che dara' ulteriore valore allo studio di queste strutture algebriche.

Definizione2.9. Dato un dominio unitario $(A,+,\cdot)$, diremo che esso e' un *dominio principale* (D.P.) se ogni ideale di $(A,+,\cdot)$ e' principale.

Anche a proposito dei domini principali ci chiediamo: esistono domini principali oltre a $(\mathbb{Z},+,\cdot)$?

Definizione2.10. Dato un anello commutativo unitario $(A,+,\cdot)$, chiameremo *funzione euclidea* su A una applicazione

$\varphi: A\text{-}\{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ tale che

(i) Per ogni $a,b\in A$ si ha che se $a \mid b$ allora $\varphi(a)\leq\varphi(b)$.

(ii) Per ogni $a,b\in A$, $b\neq 0$ esistono $q,r\in A$ tali che $a=qb+r$ con $r=0$ oppure $\varphi(r)<\varphi(b)$.

Definizione2.11. Dato un dominio unitario $(A,+,\cdot)$ diremo che esso e' un *dominio euclideo* (D.E.) se esiste una funzione euclidea su A.

Risponderemo anche per domini euclidei a domande analoghe a quelle poste per D.F.U. e per D.P.; per il momento enunciamo un teorema dalla dimostrazione non immediata, per la quale rinviamo ad un qualunque testo di algebra per studenti di matematica (per esempio a quelli citati in bibliografia), teorema che chiarira' il legame esistente fra le proprieta' di $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ elencate ai punti 4, 5, 6 del paragrafo1.

Teorema2.12. *Sia* $(A,+,\cdot)$ *un dominio unitario. Si dimostra che se* $(A,+,\cdot)$ *e' un* D.E. *allora* $(A,+,\cdot)$ *e' un* D.P. *e se* $(A,+,\cdot)$ *e' un* D.P. *allora* $(A,+,\cdot)$ *e' un* D.F.U.

E' chiaro a questo punto come la possibilita' di "fare la divisione col resto" sia la proprieta' di $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ che garantisce la principalita' degli ideali di tale dominio e di conseguenza garantisce l'esistenza, per ogni elemento non nullo e non invertibile di $\mathbb{Z}$, di una decomposizione in fattori irriducibili "unica" nel senso espresso in (ii) della definizione2.7.

Torniamo ora al teorema2.12 ed osserviamo che, se indichiamo con E la classe dei domini euclidei, con P quella dei domini principali, con F quella dei domini a fattorizzazione unica, possiamo esprimere il risultato in esso contenuto dicendo che $E \subseteq P \subseteq F$ e possiamo visualizzarlo con la seguente figura1 che, come si vede, e', a questo punto, estremamente "vuota".

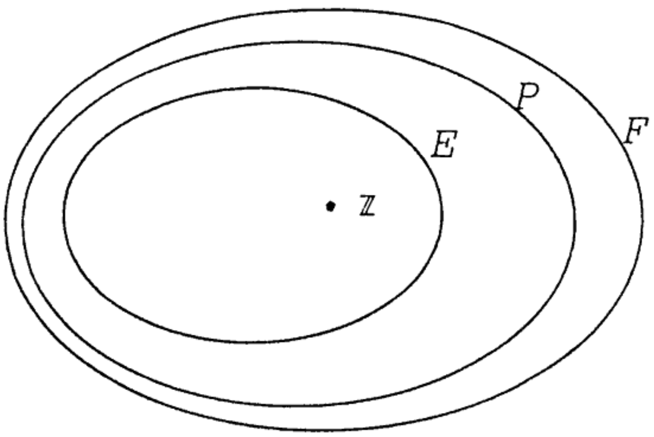


fig. 1

Formulato cosi', si evidenzia come tale teorema, da una parte appaga la curiosita' di conoscere l'eventuale "gerarchia" esistente fra le proprieta' di $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ elencate ai punti 4, 5, 6 del paragrafo1, dall'altra fa sorgere nuovi problemi in quanto ci induce a chiederci (oltre a se e' possibile "riempire" alquanto la figura) se la classe e' contenuta propriamente nella classe e se la classe e' contenuta propriamente nella classe , cioe' ci impone le domande:

(1) Esiste un dominio unitario che sia D.F.U. e non sia D.P.?
(2) Esiste un dominio unitario che sia D.P. e non D.E.?

Non viene in mente una risposta immediata; pertanto, ripromettendoci di tornare in seguito sull'argomento, prendiamo nota anche di questi problemi e passiamo ad enunciare un teorema che ci chiarira' perche' in $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ essere irriducibile equivale ad essere primo. Daremo in tal modo risposta ad un'altra delle domande dalle quali aveva preso le mosse la nostra indagine.

Teorema2.13. *Sia* $(A,+,\cdot)$ *un* D.F.U..*Si dimostra che:*
$\forall a \in A$: *a irriducibile* $\Rightarrow$ *a primo.*

Si vede cosi', data anche la proposizione2.6, come sia la proprieta' di essere D.F.U. la "responsabile" del fatto che ogni numero intero e' irriducibile se e solo se e' primo.

Ora e' pero' spontaneo domandarci: esistono domini unitari nei quali <u>non</u> <u>e</u>' <u>vero</u> che ogni elemento irriducibile sia primo?

A questa domanda diamo subito risposta mostrando un esempio di dominio unitario nel quale esiste almeno un elemento irriducibile e non primo.

EsempioE_1 Consideriamo il campo $(\mathbb{R},+,\cdot)$ dei numeri reali e il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dato da $A := \{\alpha \in R \mid \exists a,b \in \mathbb{Z}\ \alpha = a + b\sqrt{10}\}$. Poiche' per ogni a,b,c,d elementi di $\mathbb{Z}$ risulta:

$$(a+b\sqrt{10})+(c+d\sqrt{10})=(a+c)+(b+d)\sqrt{10}$$

e

$$(a+b\sqrt{10})\cdot(c+d\sqrt{10})=(ac+10bd)+(ad+bc)\sqrt{10},$$

si ha che la somma e il prodotto, rispettivamente secondo l'addizione e la moltiplicazione in $\mathbb{R}$, di elementi di A sono elementi di A. Quindi l'addizione la moltiplicazione in $\mathbb{R}$, ristrette ad A, sono operazioni in A che continueremo ad indicare con $+$ e $\cdot$.

E' opportuno notare a questo punto che non tutti i sottinsiemi di $\mathbb{R}$ si comportano come il sottinsieme A che abbiamo definito: se, per esempio, consideriamo $B=\{0,1,2,3\}\subseteq\mathbb{R}$ si vede che $2+3\notin B$ e $2\cdot 3\notin B$, pertanto l'addizione e la moltiplicazione in $\mathbb{R}$ non inducono operazioni in B.

Ritornando ora alla struttura $(A,+,\cdot)$ e' facile verificare:

(I) $(A,+,\cdot)$ e' D.U. avente $0+0\sqrt{10}$ come elemento neutro rispetto all'addizione e $1+0\sqrt{10}$ come elemento neutro rispetto alla moltiplicazione.

(II) Ogni $a\in\mathbb{Z}$ e' elemento di A avendosi $a=a+0\sqrt{10}$.

(III) $\forall a,b\in\mathbb{Z}$: $\quad a+b\sqrt{10}=0 \Leftrightarrow a=0$ e $b=0$.

Infatti se $a+b\sqrt{10}=0$ e $b=0$ allora anche $a=0$ e quindi la tesi. Dimostriamo percio' che se $a+b\sqrt{10}=0$ allora $b=0$. Infatti se $b\neq 0$ si ha anche $a\neq 0$ (altrimenti b sarebbe 0), inoltre e' chiaro che $a\neq\pm 1$ e $b\neq\pm 1$; pertanto essendo $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ un D.F.U., a e b sono decomponibili in fattori irriducibili. Cio' conduce ad un assurdo poiche', essendo $a^2=b^2 10=2\cdot 5\cdot b^2$, si avrebbe che l'irriducibile 2 comparirebbe in due decomposizioni del numero $c=a^2=2\cdot 5\cdot b^2$ a sinistra un numero pari di volte e a destra un numero dispari di volte.

Da (III) segue:

(IV) $\forall a,b,c,d\in\mathbb{Z}$: $\quad a+b\sqrt{10}=c+d\sqrt{10} \Leftrightarrow a=b$ e $c=d$.

(V) Con $\alpha=a+b\sqrt{10}\in A$, posto $\bar{\alpha}=(a-b\sqrt{10})$ e $\|\alpha\|=\alpha\bar{\alpha}=a^2-10b^2$,ed osservato che $\|\alpha\|\in\mathbb{Z}$, si ha che: $\alpha\in\bigsqcup_A\Leftrightarrow \|\alpha\|=\pm 1$.

Infatti se $\alpha\in\bigsqcup_A$ esiste $\beta\in A$ tale che $\alpha\beta=1+0\sqrt{10}$ e pertanto $\|\alpha\beta\|=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|=1$ e quindi $\|\alpha\|=\pm 1$. Viceversa, se $\|\alpha\|=\pm 1$, si ha $\alpha\bar{\alpha}=1$ oppure $\alpha\bar{\alpha}=-1$. Quindi $\alpha\bar{\alpha}=1$ oppure $\alpha(-\bar{\alpha})=1$ e pertanto $\alpha\in\bigsqcup_A$.

Dimostriamo ora che:

(VI) $2\in A$ e' <u>un</u> <u>elemento</u> <u>irriducibile</u> <u>e</u> <u>non</u> <u>primo</u> in A.
Essendo $2\neq 0$ e, grazie a (V), $\|2\|=4\neq 1$, abbiamo che 2 e' un elemento di A non nullo e non invertibile; resta da provare:
(i) <u>2 non soddisfa la proprieta' (P_2) della definizione2.5</u>
(ii) <u>2 soddisfa la proprieta' (P_1) della definizione2.4</u>
Per verificare (i) dobbiamo dimostrare quanto segue:
<u>non</u> e' <u>vero</u> <u>che</u> ($\forall\alpha,\beta\in A$: $2\mid\alpha\beta\Rightarrow 2\mid\alpha$ oppure $2\mid\beta$). Cio' e' garantito dall'esistenza di $\alpha=4+\sqrt{10}$ e di $\beta=4-\sqrt{10}$ elementi di A tali che $2\mid\alpha\beta$ ed inoltre $2\nmid\alpha$ e $2\nmid\beta$. Infatti esiste $3\in A$ tale che $\alpha\beta=16-10=6=3\cdot 2$ e pertanto $2\mid\alpha\beta$; se poi per assurdo supponiamo che $2\mid\alpha$ deve esistere un elemento $a+b\sqrt{10}\in A$ tale che $\alpha=4+\sqrt{10}=2\cdot(a+b\sqrt{10})$; da cio' seguirebbe, dato (III), che $2b=1$ e tale risultato e' assurdo poiche' in $\mathbb{Z}$ non esistono elementi b che moltiplicati per 2 diano per risultato 1. Analogamente si prova che $2\nmid\beta$.

Notiamo come il numero 2, che e' *primo* se considerato come elemento di $\mathbb{Z}$, perda tale proprieta' quando viene considerato come elemento di A; cio' ci induce a riflettere, ancora una volta, sull'importanza di tenere sempre presente l'ambiente al quale vogliamo riferirci.

Meno immediata e' la dimostrazione di (ii) per la quale procediamo nel modo seguente.

Dovendo dimostrare che

$$\forall\alpha,\beta\in A:\ \ 2=\alpha\beta\ \Rightarrow\ \alpha\in\bigsqcup_A \text{ oppure } \beta\in\bigsqcup_A$$

bastera' dimostrare, grazie alla caratterizzazione degli elementi di $\bigsqcup_A$ espressa al punto (IV), che

$$\forall\alpha,\beta\in A:\ \ 2=\alpha\beta\ \Rightarrow\ \|\alpha\|=\pm 1 \text{ oppure } \|\beta\|=\pm 1.$$

Siano pertanto $\alpha,\beta\in A$ con $\alpha\beta=2$; verifichiamo che $\|\alpha\|=\pm 1$ oppure che

$\|\beta\|=\pm 1$. Da $2=\alpha\beta$ segue $\|2\|=4=\|\alpha\beta\|=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$ quindi, poiche' $\|\alpha\|$ e $\|\beta\|$ sono interi relativi, si ha che $\|\alpha\|$ e' un divisore di 4 in $\mathbb{Z}$. Allora i casi possibili sono

(a) $\|\alpha\|=\pm 1$; (b) $\|\alpha\|=\pm 2$; (c) $\|\alpha\|=\pm 4$.

Poiche' l'eventualita' (c) comporta $\|\beta\|=\pm 1$, resta da dimostrare che $\|\alpha\|\neq\pm 2$ per ogni $\alpha\in A$, risultato che si consegue provando che:

(*) non esistono $a,b\in\mathbb{Z}$ tali che $a^2-10b^2=2$ e non esistono $a,b\in\mathbb{Z}$ tali che $a^2-10b^2=-2$.

A tal fine bastera' verificare che:

(**) non esistono $x,y\in\mathbb{Z}$ tali che $x^2-10y=2$ e che non esistono $x,y\in\mathbb{Z}$ tali che $x^2-10y=-2$. [1]

Supponiamo che esistano $x,y\in\mathbb{Z}$ tali che $x^2-10y=2$. Dividiamo x per 10, cosi' $x=10q+r$ con $0\leq r\leq 9$. Allora $x^2=100q^2+20qr+r^2$. Sostituendo questa espressione nella prima uguaglianza di (**), si ottiene che $r^2-2=10(y-10q^2-2qr)$ cioe' si ottiene che r^2-2 e' un multiplo di 10 il che e' assurdo come puo' dedursi calcolando r^2-2 al variare di r tra 0 e 9. [2]

In modo analogo si prova che non esistono $x,y\in\mathbb{Z}$ tali che $x^2-10y=-2$.

E' chiaro che il dominio $(A,+,\cdot)$ dell'esempio precedente <u>non</u> e' un dominio a fattorizzazione unica in quanto, se lo fosse, ogni suo elemento irriducibile dovrebbe essere primo (cfr.teorema2.12) mentre abbiamo appena visto che cio' non e' vero. Alla luce di cio' la figura1 diventa la seguente figura2.

---

[1] Si dimostra infatti che (**) implica (*) e questo si prova verificando che la negazione di (*) implica la negazione di (**). Cio' e' vero in quanto, se esistessero $a,b\in\mathbb{Z}$ tali che $a^2-10b^2=\pm 2$, allora $x=a$ e $y=b^2$ sarebbero elementi di $\mathbb{Z}$ tali che $x^2-10y=\pm 2$.

[2] Dimostrazione immediata di cio' puo' aversi con il passaggio alle classi dei resti modulo 10.

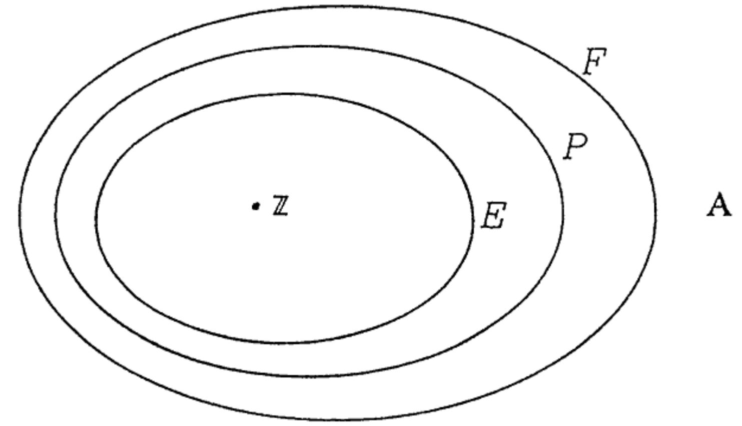


fig.2

Comunque, a proposito dell'esempio E_1, puo' essere interessante parlare di un memorabile errore commesso da un grande matematico (nessuno e' infallibile!..). Facciamo questo perche', da una parte, vogliamo evidenziare come anche gli errori possano essere "fruttuosi" e dall'altra, perche' vogliamo mettere in guardia dal ritenere veri risultati che, per analogia con casi familiari, ci "sembrano" veri. L'errore del quale parliamo e' quello in cui incorse E.E.Kummer (1810-1893) tentando di risolvere un famoso problema di teoria dei numeri. Egli era convinto che, per analogia con $\mathbb{Z}$, domini come il dominio $(A,+,\cdot)$, prima considerato, dovessero essere a fattorizzazione unica. Comunque nel momento in cui l'errore fu manifesto, lo stesso Kummer e soprattutto R.Dedekind (1831-1916) furono spinti ad indagare sulla questione; si scopri' che esistono domini unitari (noti oggi come domini di Dedekind) nei quali, pur non potendosi parlare di "fattorizzazione unica" per gli elementi, si puo', in modo opportuno, parlare di fattorizzazione unica per gli *ideali*, concetto questo introdotto dallo stesso Dedekind allo scopo di chiarire le questioni di cui abbiamo parlato e diventato poi, come sappiamo, strumento non solo per la teoria dei numeri ma anche per tanti altri settori della matematica.

3. MASSIMI COMUN DIVISORI.

Ora , cosi' come ci eravamo ripromessi di fare, passiamo a questioni riguadanti massimo comun divisore e cio' allo scopo di dare risposta alle domande annotate a tale proposito al punto7 del paragrafo1.

Il primo problema che si presenta e' quello di dare una definizione nella quale riconoscere l'idea che abbiamo a proposito di massimo comun divisore tra numeri naturali. Abbiamo gia' visto che in un generico dominio unitario possiamo tranquillamente parlare di divisori e quindi di divisori comuni, non ci sembra pero' altrettanto immediato estendere il concetto di "massimo" divisore comune; infatti per far questo sembrerebbe essere necessaria una relazione d'ordine che, in un generico dominio unitario, non sempre abbiamo a disposizione. Per cercare di superare questa difficolta' e' quindi opportuno penetrare meglio nelle proprieta' che caratterizzano il massimo comun divisore fra due numeri naturali. Consideriamo pertanto, per esempio, 12, 18 e il loro massimo comun divisore 6; vediamo che 6 non e' solo "il piu' grande", nel senso usuale della parola, tra i numeri 1,2,3,6, che sono in $\mathbb{N}$ i divisori comuni a 12 e 18, ma gode della proprieta'che <u>ogni divisore comune a 12 e 18 e' anche un divisore di 6</u>, cosa che puo' essere espressa dicendo che, per ogni $c \in \mathbb{N}$, risulta:

(*) se $c \mid 12$ e $c \mid 18$ allora $c \mid 6$.

Alla luce di questo esempio si intuisce come possa essere trasferita in un generico dominio unitario la nozione di massimo comune divisore; inoltre, tenendo presente il punto2 del paragrafo1, l'affermazione (*) ci dice che se in $\mathbb{N}$ c e' un divisore comune a 12 e 18, allora $c \leq 6(\Delta)$; cioe' 6 e' effettivamente, fra i divisori comuni a 12 e 18, "il piu' grande" ma lo e' rispetto alla relazione d'ordine Δ in $\mathbb{N}$, della quale abbiamo parlato al punto2 del paragrafo1.

Premesso cio', con $(A,+,\cdot)$ un dominio unitario, possiamo dare la seguente

Definizione3.1 Dati $a,b\in A$ chiamiamo *massimo comun divisore* di a e b **un** elemento $d\in A$ che goda delle seguenti proprieta':

i)$d \mid a$ e $d \mid b$;   ii)$\forall c\in A$: $(c \mid a,\ c \mid b \Rightarrow c \mid d)$.

Posto m.c.d.(a,b): $=\{d\in A \mid d$ verifica i) e ii)$\}$ si vede, qualunque sia $b\in A$, che:

se $a=0$ allora $b\in$ m.c.d.(a,b)

se $a\in \sqcup_A$ allora $a\in$ m.c.d.(a,b)

se $a=b$ allora $a\in$ m.c.d.(a,b);

quindi in ogni dominio unitario $(A,+,\cdot)$, per particolari elementi a,b, si ha che m.c.d.$(a,b)\neq\phi$, inoltre si puo' verificare facilmente che se $d\in$m.c.d.(a,b) allora $[d]_{\mathcal{R}}$=m.c.d.(a,b). Ricordando che con $[d]_{\mathcal{R}}$ si e' indicato l'insieme degli elementi di A equivalenti a d rispetto alla relazione *"..e' associato di.."*, si vede che se a e b sono elementi di A possedenti un massimo comun divisore allora, in generale, essi ne posseggono piu' di uno e questi sono fra loro associati, cioe' differiscono per un elemento invertibile.

Questo e' quanto possiamo dire in generale senza ulteriori ipotesi sul dominio $(A,+,\cdot)$; cominciamo quindi con l'aggiungere la proprieta' di fattorizzazione unica. In tale caso si ha il seguente

Teorema3.2 *Sia* $(A,+,\cdot)$ D.F.U. *con una fissata una funzione di scelta sugli irriducibili; allora per ogni* $a,b\in A$ *risulta* m.c.d.$(a,b)\neq\phi$.

Dim. Esclusi i casi banali, siano (vedi osservazione2.8)

$$a=up_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{r_n} \qquad b=vp_1^{s_1}\cdot p_2^{s_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{s_n}$$

con $r_i\geq 0$ e $s_i\geq 0$ per ogni $i\in\{1,\ldots,n\}$ e $p_1,p_2,\ldots p_n$ irriducibili fissati dalla funzione di scelta.

Posto per ogni $i\in\{1,\ldots n\}$ $w_i=\min\{r_i,s_i\}$ si verifica che

$d=p_1^{w_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{w_n}\in$ m.c.d.(a,b).

Notiamo che l'elemento d, di cui alla dimostrazione del teorema3.2, e', nel caso di $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, esattamente quello che siamo abituati a trovare "considerando i fattori irriducibili comuni una sola volta col piu' piccolo esponente". Illustriamo cio' con un esempio e siano pertanto

$a=2200=1\cdot2^3\cdot5^2\cdot11=1\cdot2^3\cdot3^0\cdot5^2\cdot7^0\cdot11^1$

$b=-315=(-1)\cdot3^2\cdot5\cdot7=(-1)\cdot2^0\cdot3^2\cdot5^1\cdot7^1\cdot11^0$

Si ha cosi', dato il teorema3.2, che un massimo comun divisore di a e b risulta essere $d=2^0\cdot3^0\cdot5^1\cdot7^0\cdot11^0=5$, cioe' esattamente l'elemento che avremmo trovato applicando la ben nota regola che prevede la decomposizione in fattori irriducibili.

Va qui notato che di solito, nella applicazione meccanica della regola per il calcolo di m.c.d., manca la consapevolezza di "aver deciso di usare gli irriducibili positivi", cioe' la consapevolezza di aver tacitamente fissato una funzione di scelta. Inoltre, in genere, non si considera con la dovuta attenzione il fatto che se 5 e' un massimo comun divisore lo e' anche -5.

A questo punto osserviamo che il teorema3.2 fornisce per un D.F.U. $(A,+,\cdot)$ la garanzia dell'esistenza di un massimo comun divisore per ogni $a,b\in A$ dandoci una regola per calcolarlo basata sulla decomposizione di a e b in fattori irriducibili. Tale regola e' pero' estremamente "scomoda" in quanto nella maggior parte dei casi, pur sapendo che una decomposizione esiste, o non siamo in grado di esibirla (riusciamo sempre a decomporre un polinomio?..) o lo facciamo con molta fatica. Viene cosi' spontaneo chiederci se in un dominio principale, che e' un dominio a fattorizzazione unica (cfr.teorema2.11) "un poco piu' ricco" di proprieta', si possa avere qualche altra informazione riguardo al massimo comun divisore di due elementi oltre al fatto che esiste.

Il teorema che segue, del quale per brevita' omettiamo la dimostrazione, per altro molto semplice, appaga la nostra curiosita'.

Teorema3.3 *Siano* $(A,+,\cdot)$ *un* D.P., $a,b\in A$, $d\in$ m.c.d.(a,b). *Si dimostra che esistono* $x,y\in A$ *tali che* $d=xa+yb$.

Come si vede, anche il teorema3.3 fornisce informazioni sulla esistenza di certi elementi (in genere non unici), senza peraltro che dalla dimostrazione possa dedursi qualche informazione sulla loro determinazione.

Se pero' $(A,+,\cdot)$ e' un dominio euclideo (pertanto D.P. e quindi D.F.U.), dati $a,b\in A$, possiamo non solo asserire che esiste $d\in$ m.c.d.(a,b) e che esistono almeno un x e un y elementi di A tali che $d=xa+yb$, ma anche dare un algoritmo per determinarli. Illustriamo cio'.

Siano $(A,+,\cdot)$ un dominio euclideo, $\varphi: A \longrightarrow \mathbb{N}_0$ come nella definizione2.10, $a,b\in A$.
Se $b\neq 0$, esistono $q_0,r_0\in A$ tali che $a=q_0b+r_0$ ed $r_0=0$ oppure $\varphi(r_0)<\varphi(b)$.
Se $r_0\neq 0$, esistono $q_1,r_1\in A$ tali che $b=q_1r_0+r_1$ ed $r_1=0$ oppure $\varphi(r_1)<\varphi(r_0)$.
Se $r_1\neq 0$, esistono $q_2,r_2\in A$ tali che $r_0=q_2r_1+r_2$ ed $r_2=0$ oppure $\varphi(r_2)<\varphi(r_1)$.
Pertanto, osservato che ad un certo punto dovremo trovare un resto uguale a 0 (altrimenti avremmo infiniti numeri naturali $\varphi(r_0),\varphi(r_1),\varphi(r_2),..,$compresi tra 0 e $\varphi(b)$), indichiamo con r_{n+1} il primo resto uguale a 0. Si ha cosi' la seguente tabella:

$$
\begin{aligned}
&a=q_0b+r_0\\
&b=q_1r_0+r_1\\
&r_0=q_2r_1+r_2\\
&r_1=q_3r_2+r_3\\
&\dots\dots\dots\\
&r_{n-2}=q_nr_{n-1}+r_n\\
&r_{n-1}=q_{n+1}r_n.
\end{aligned}
$$

Si dimostra, usando la definizione, che $r_n \in$ m.c.d.(a,b).
Per determinare un x e un y tali che $r_n = xa+yb$, si procede, tenendo presente la tabella precedente, come segue:

$r_0 = a+(-q_0)b$,

$r_1 = b+(-q_1)r_0 = b+(-q_1)[a+(-q_0)b] = (-q_1)a+(1+q_1q_0)b$,

$r_2 = r_0+(-q_2)r_1 = [a+(-q_0)b]+(-q_2)[(-q_1)a+(1+q_1q_0)b] =$
$= (1+q_1q_2)a+(-q_0-q_2-q_0q_1q_2)b$.

Cosi' continuando si determina $r_n = xa+yb$.

Facciamo un semplice esempio con a=36 e b=15.
Avendosi $36=2\cdot15+6$, $15=2\cdot6+3$, $6=2\cdot3+0$, risulta che 3, ultimo resto diverso da 0, e' un massimo comun divisore di 36 e 15. Determiniamo x,y tali che $3=x\cdot36+y\cdot15$ procedendo cosi' come abbiamo illustrato; pertanto:

$6=1\cdot36+(-2)\cdot15$;

$3=1\cdot15+(-2)\cdot6=1\cdot15+(-2)[1\cdot36+(-2)\cdot15]=(-2)\cdot36+5\cdot15$.

A questo punto, ripensando a quanto puo' essere lungo e noioso decomporre in fattori irriducibili numeri interi che siano solo "alquanto grandi", risulta chiaro come, in generale, sia il metodo dell'algoritmo euclideo (basato sulla proprieta' euclidea di $(\mathbb{Z},+,\cdot)$), piu' che il metodo dell'algoritmo della decomposizione in fattori irriducibili (basato sulla proprieta' di $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ di essere D.F.U.) quello a cui far riferimento per la ricerca di massimi comun divisori, tanto piu' che la conoscenza di questo metodo permette in alcuni casi di individuare a "vista" il massimo comun divisore tra due numeri. Per esempio, solo "guardando" i numeri

$a=32442131$ e

$b=64884263$

riconosciamo che $b=2\cdot a+1$ e questo, alla luce di quanto abbiamo precedentemente esposto, garantisce che:

$1 \in$ m.c.d.(32442131,64884263).

D'altra parte possiamo "misurare" la maggiore efficienza del metodo euclideo rispetto all'altro usando come misura il "tempo macchina" di un calcolatore al quale sia richiesto di trovare, con l'algoritmo euclideo e con l'algoritmo della decomposizione in fattori irriducibili, un massimo comun divisore tra due numeri assegnati.

Adesso, consapevoli di dover riflettere ancora su domande alle quali non abbiamo dato risposta, terminiamo qui la parte della nostra esposizione dedicata a $\mathbb{Z}$. Nei paragrafi successivi vedremo come i polinomi ci aiuteranno a fornire risposte a domande che ne sono ancora prive mentre, tutto cio' che abbiamo fin qui esposto, ci permettera' di guardare ad essi in modo piu' consapevole di quanto, forse, non abbiamo fatto finora.

4. POLINOMI IN UNA "VARIABILE"

Sin dalla scuola media inferiore acquisiamo il concetto di polinomio in una variabile tanto che in genere, forse non sempre facilmente, riusciamo a riconoscere fra certe scritture, per esempio tra

(1) $3x^2+2x+1$; (2) $\pi x+3$; (3) $f(x)=4x^3-2x+5$;

(4) $2\cos^2 x+3\cos x+4$; (5) $\frac{2}{3}x+5,\overline{2}$ (6) $\cos 30 x^4+\log 2 x^3+2$;

quelle che rappresentano polinomi in x a coefficienti numerici. Le cose invece si complicano quando ci poniamo il problema di dare la definizione di polinomio in una "variabile" o, come diremo spesso piu' semplicemente, di polinomio.

Alla luce della nozione di operazione su di un insieme, nozione sulla quale abbiamo tanto insistito all'inizio di questa esposizione, e' chiaro che appare per lo meno contraddittorio parlare di polinomio come "somma di monomi, intendendo per monomio un'espressione contenente prodotti di fattori numerici e letterali". Infatti come dare significato all'espressione $2\cdot x+5$? In quale insieme sono definite le operazioni alle quali in questo caso facciamo riferimento? A quale insieme appartiene x? e $2\cdot x$?

Ne' ci appare soddisfacente la linea adottata da coloro che parlano di $2\cdot x+5$ come di una espressione in cui x e' "variabile" in un opportuno insieme numerico; in tal caso perche' dare a dei numeri il nome di polinomio?

Si vede cosi' che non e' piu' rinviabile cercare di dare una definizione soddisfacente di polinomio in una "variabile" e soprattutto cercare di capire da dove trae origine una certa "tradizione". Infatti non possiamo escludere che ci sia un ambito nel quale affermazioni come "somma di monomi" abbiano significato, ne' possiamo escludere che ci sia un'ottica in cui sia chiaro il collegamento tra certi oggetti che sappiamo addizionare, moltiplicare, in alcuni casi scomporre in fattori, ecc. ed altri oggetti, che, pur assomigliando a polinomi, sono funzioni, tanto che ad un certo punto cominciamo ad interessarci alla loro continuita', alle loro derivate, ai loro massimi e minimi.

Come abbiamo gia' fatto in altre occasioni cominciamo col riflettere su quanto riteniamo acquisito a questo riguardo; ci rendiamo allora conto che, nelle nostre manipolazioni, $x, x^2, x^3, \ldots$ hanno una funzione, per cosi' dire, di servizio. Infatti, quando verifichiamo l'uguaglianza di due polinomi in x, confrontiamo i coefficienti di x, i coefficienti di x^2, i coefficienti di x^3,...e i "termini noti" intesi anche come coefficienti di x^0; quando addizioniamo due polinomi, addizioniamo i cefficienti di x, i coefficienti di x^2, i coefficienti di x^3...e i "termini noti".

Questo ci fa intuire che il ruolo fondamentale in un polinomio e' svolto dai suoi coefficienti tanto che, se decidessimo di usare carta a quadretti e di scrivere i polinomi ordinati secondo le potenze decrescenti di x scrivendo anche i coefficienti che sono 0, potremmo confrontare o addizionare polinomi anche senza l'ausilio di x. Spieghiamoci con un esempio e consideriamo:

$$f = -5x^6+2x^3+7x^8-4-x^2 = \quad 7x^8+0x^7-5x^6+0x^5+0x^4+2x^3-1x^2+0x-4\ ;$$
$$g = x^3+2 = \qquad = 1x^3+0x^2+0x+2;$$

Procediamo scrivendo i coefficienti di f e di g incolonnando quelli che corrispondono allo stesso esponente di x (e' chiara l'analogia con l'addizione fra numeri naturali per la quale, usando la consueta scrittura posizionale, si incolonnano le unita', si incolonnano le decine, si incolonnano le centinaia, ecc...); sommiamo i coefficienti "in colonna", si ha allora (leggendo "posi" come posizione del coefficiente di x^i) la tabella:

	pos10	pos 9	pos 8	pos 7	pos 6	pos 5	pos 4	pos 3	pos 2	pos 1	pos 0	
f			+7	0	-5	0	0	+2	-1	0	- 4	+
g								+1	0	0	+2	=
f+g			+7	0	-5	0	0	+3	-1	0	- 2	

Nella tabella precedente "leggiamo" che
$f+g= +7x^8+0x^7-5x^6+0x^5+0x^4+3x^3-1x^2+0x-2= 7x^8-5x^6+3x^3-1x^2-2$, cioe' il polinomio che avremmo ottenuto applicando l'usuale regola di calcolo.

Anche per moltiplicare f e g possiamo procedere con tecnica analoga mutuata dalla regola per moltiplicare due numeri naturali. Infatti proviamo a seguire questa idea per trovare $f\cdot g$. In questo caso avremo la seguente tabella:

	pos 11	pos 10	pos 9	pos 8	pos 7	pos 6	pos 5	pos 4	pos 3	pos 2	pos 1	pos 0	
f				+7	0	-5	0	0	+2	-1	0	-4	
g									+1	0	0	+2	=
				+14	0	-10	0	0	+4	-2	0	-8	
			0	0	0	0	0	0	0	0	0		
		0	0	0	0	0	0	0	0	0			
	+7	0	-5	0	0	+2	-1	0	-4				
$f\cdot g$	+7	0	-5	+14	0	-8	-1	0	0	-2	0	-8	

Anche qui leggiamo che:
$f\cdot g=7x^{11}+0x^{10}-5x^9+14x^8+0x^7-8x^6-1x^5+0x^4+0x^3-2x^2+0x-8=$
$=7x^{11}-5x^9+14x^8-8x^6-1x^5-2x^2-8$.
(controllare moltiplicando nel modo usuale!...).

Viste le considerazioni fatte e' ora spontaneo ipotizzare una definizione di polinomio svincolata da x (cosa che a livello di definizione sembrava darci maggior fastidio) e data in termini di coefficienti "messi in ordine"; cio' non e' difficile in quanto ci aiuta in questo la nozione di successione, o meglio quella di successione definitivamente nulla.

Premesso che, dato un insieme A non vuoto, diciamo *successione definitivamente nulla* di elementi di A ogni applicazione $f:\mathbb{N}_0 \longrightarrow A$ per la quale esista $t\in\mathbb{N}_0$ tale che $f(i)=0$ per ogni $i>t$

(o, equivalentemente, tale che $f(i) \neq 0$ solo per un numero finito di elementi $i \in \mathbb{N}_0$), diamo la seguente

Definizione4.1 *Sia $(A,+,\cdot)$ un anello commutativo unitario. Dicesi polinomio su A una successione di elementi di A definitivamente nulla.*

Come si vede, in questa definizione si fa riferimento a concetti tutti noti a livello di scuola secondaria superiore o comunque facilmente giustificabili.

D'ora in avanti "visualizzeremo" un polinomio su A rappresentandolo con $(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_t,0,0,0,\ldots.)$ dove l'indice t e' quello di cui si parla nella definizione di successione definitivamente nulla e parleremo dell'elemento a_i come dell'elemento di posto i; inoltre indicheremo con S_A l'insieme dei polinomi su A.

Osservazione4.2 Data la definizione4.1, due polinomi $f=(a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots)$ e $g=(b_0,b_1,\ldots,b_m\ldots)$ sono uguali se e solo se per ogni $i \in \mathbb{N}_0$ risulta $a_i=b_i$. (Si confronti questa osservazione col **Principio di identita' dei polinomi**, del quale parleremo alla fine del paragrafo5, per cogliere aspetti comuni e differenze profonde).

Introduciamo ora il concetto di grado di un polinomio e quello di coefficiente direttore.

Definizione4.3 Sia $(A,+,\cdot)$ un anello commutativo unitario e $f=(a_0,a_1,\ldots,a_t,0,0,\ldots) \in S_A$.
Chiameremo $a_0,a_1,\ldots,a_t$, *coefficienti di* f e, se $a_t \neq 0$, diremo che a_t e' il *coefficiente direttore* di f e che t e' il *grado di* f *(in* simboli $t=\delta(f)$*)*.

Alla luce delle definizioni date si ha che:

$(0,0,0,\dots,0,\dots)$ non ha grado ne' coefficiente direttore;
$(a_0,0,0,\dots.)$,con $a_0\neq 0$, ha grado 0 e coefficiente direttore a_0;
$(a_0,a_1,0,0,..)$, con $a_1\neq 0$, ha grado 1 e coefficiente direttore a_1;
....
$(a_0,a_1,..,a_t,0,0,\dots)$, con $a_t\neq 0$, ha grado t e coefficiente direttore a_t.

Non e' difficile verificare che, dati $f=(a_0,a_1,\dots,a_r,0,0,\dots)$ e $g=(b_0,b_1,\dots,b_s,0,0,\dots)$ elementi di S_A, le successioni $s=(s_0,s_1,\dots,s_i,\dots)$, con $s_i=a_i+b_i$ per ogni $i\in\mathbb{N}_0$, e $p=(p_0,p,\dots,p_i,\dots.)$, con $p_i=a_0b_i+a_1b_{i-1}+\dots.+a_ib_0$ per ogni $i\in\mathbb{N}_0$, sono elementi di S_A (cioe' sono successioni definitivamente nulle). Pertanto sono operazioni in S_A l'applicazione

$+:S_A x S_A \longrightarrow S_A$ che alla coppia (f,g) associa s
e l'applicazione
$\cdot:S_A x S_A \longrightarrow S_A$ che alla coppia (f,g) associa p.

Riguardo alla struttura $(S_A,+,\cdot)$ si dimostra il seguente

Teorema4.4 *Dato un anello commutativo unitario* $(A,+,\cdot)$ *risulta che:*

(i) *la struttura* $(S_A,+,\cdot)$ *e' un anello commutativo unitario con* $(0,0,0,\dots)$ *elemento neutro rispetto all'addizione e* $(1,0,0,\dots)$ *elemento neutro rispetto alla moltiplicazione.*

(ii) *l'insieme* $A^*=\{(a,0,0,..)\}_{a\in A}$ *e' un sottoanello di* $(S_A,+,\cdot)$ *isomorfo all'anello* $(A,+,\bullet.)$.

(iii) *Gli elementi invertibili di* $(S_A,+,\cdot)$ *sono tutti e soli gli elementi invertibili di* $(A^*,+,\cdot)$; *cioe'* $\sqcup_{S_A}=\sqcup_{A^*}$.

E' opportuno a questo punto sottolineare come da (iii) discenda immediatamente che polinomi di grado diverso da 0 non potranno mai essere elementi invertibili dell'anello $(S_A,+,\cdot)$; ma attenzione, con questo non intendiamo dire che ogni polinomio di grado 0 e' invertibile in $(S_A,+,\cdot)$!

Naturalmente, definito $(S_A,+,\cdot)$, si puo' pensare di semplificare la "scrittura" dei suoi elementi facendo, per esempio, le seguenti posizioni:

$\mathbf{a}=(a,0,0,.....)$ per ogni $a \in A$;

$x=(0,1,0,0,...)$. (Notiamo che x rappresenta la successione i cui elementi sono tutti nulli tranne quello che si trova nel posto ı e che e' uguale ad 1).

Immediate conseguenze di queste posizioni sono:

I) $\mathbf{0}=(0,0,0,....)$ e $\mathbf{1}=(1,0,0,....)$ sono rispettivamente l'elemento neutro rispetto all'addizione e l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione nell'anello $(S_A,+,\cdot)$.

II) Ricordando come sono definite le potenze di un elemento appartenente al sostegno di un anello, risulta:

$x^0=\mathbf{1}=(1,0,0,...)$;

$x^2=x\cdot x=(0,1,0,0,0,...)\cdot(0,1,0,0,...)=(0,0,1,0,0,.....)$;

$x^3=x^2\cdot x=(0,0,1,0,0,...)\cdot(0,1,0,0,...)=(0,0,0,1,0,0,...)$;

in generale si puo' dimostrare che

$\forall i \in \mathbb{N}_0$: $x^i=x^{i-1}\cdot x=(0,0,...,1,0,0,...)$ e' la successione i cui elementi sono tutti nulli tranne quello che si trova al posto i e che e' uguale a 1.

Inoltre, ricordando le proprieta' delle potenze in un anello, si ha :

$$\forall i,j \in \mathbb{N} : \quad x^i\cdot x^j=x^{i+j} \quad e \quad (x^i)^j=x^{ij}.$$

III) $\mathbf{a}\cdot x =(a,0,0,...)\cdot(0,1,0,0,...)=(0,a,0,0,...)$;

$\mathbf{a}\cdot x^2=(a,0,0,...)\cdot(0,0,1,0,...)=(0,0,a,0,0,..)$;

in generale e' dimostrabile che

$\forall i \in \mathbb{N}_0$: $\mathbf{a}\cdot x^i=(0,0,...,a,0,0,...)$ e' la successione avente a al posto i e 0 in tutti gli altri posti.

Inoltre, ricordando che la moltiplicazione che abbiamo definito in S_A e' associativa, commutativa e distributiva rispetto all'addizione , si ha:

$$(\mathbf{a}\cdot x^i)\cdot(\mathbf{b}\cdot x^j)=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot(x^i\cdot x^j)=\mathbf{ab}\cdot x^{i+j};$$
$$(\mathbf{a}\cdot x^i)+(\mathbf{b}\cdot x^i)=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot x^i.$$

IV) $\mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1\cdot x+\mathbf{a}_2\cdot x^2+\ldots+\mathbf{a}_t\cdot x^t=(a_0,0,0,\ldots)+(0,a_1,0,0,\ldots)+$
$+(0,0,a_2,0,0,\ldots)+\ldots+(0,0,\ldots,a_t,0,0,\ldots)=$
$=(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_t,0,0,\ldots).$

Come si vede, se $(A,+,\cdot)$ e' un anello commutativo unitario, il polinomio $(a_0,a_1,\ldots,a_t,0,0,\ldots)\in S_A$ e' **rappresentabile**, con le convenzioni fatte, con la scrittura

$$(*)\qquad \mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1x^1+\mathbf{a}_2x^2+\ldots+\mathbf{a}_tx^t.$$

In quest'ottica, se conveniamo di chiamare *monomi* i polinomi della forma $\mathbf{a}x^i$, potremo dire che ogni polinomio e' una somma di monomi.

É chiaro ora come in questo ambito x non sia "variabile" in un insieme bensi' sia <u>un elemento dell'insieme</u> S_A, precisamente e' la successione (0,1,0,0,..).

D'ora in avanti, ad evidenziare le posizioni fatte, indicheremo l'insieme S_A con il ben noto simbolo A[x] e, sempre applicando le proprieta' dell'addizione e della moltiplicazione in A[x] nonche' i risultati dati alla fine del punto III), si avra' che gli elementi di A[x], rappresentati nella forma (*), possono essere addizionati e moltiplicati con le usuali regole di calcolo.

A questo punto non e' superfluo notare che e' stato a partire da un generico anello commutativo unitario $(A,+,\cdot)$ che abbiamo costruito l'anello $(A[x],+,\cdot)$ dei polinomi su A o, come anche diremo, dei polinomi a coefficienti in A. D'altra parte e' ben noto che anche gli anelli commutativi unitari "non sono tutti uguali". Infatti gia' $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ e' un anello commutativo unitario nel quale vale la legge di annullamento del prodotto, il che non e' poco. Se invece consideriamo l'anello $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ dove $\mathbb{Z}_6=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$ e' l'insieme delle classi dei resti modulo 6, questo e' un anello commutativo unitario per il quale non vale la legge di annullamento del prodotto (basta osservare che le classi [2] e [3] sono diverse dalla classe [0] ed hanno come prodotto la classe [6] che, come e' noto, coincide con la classe [0]).

Se consideriamo i numeri razionali, questi con le usuali operazioni di addizione e di moltiplicazione costituiscono un *campo*, cioe' un anello commutativo unitario, indicato con $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, nel quale, non solo vale la legge di annullamento del prodotto, ma risulta anche che $\bigsqcup_{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}-\{0\}$, il che e' come dire che ogni elemento non nullo di $\mathbb{Q}$ e' dotato di inverso rispetto alla moltiplicazione (cosa che, come sappiamo, non accade in $\mathbb{Z}$). E struttura di campo hanno anche gli anelli commutativi unitari $(\mathbb{R},+,\cdot)$ e $(\mathbb{C},+,\cdot)$ dove con $\mathbb{R}$ abbiamo indicato l'insieme dei numeri reali e con $\mathbb{C}$ quello dei numeri complessi.

Ancora campi sono, per esempio, $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ e $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ solo che questi a differenza di quelli precedenti sono campi finiti. Siamo cosi portati a chiederci se l'eventuale ulteriore ricchezza di proprieta' dell'anello $(A,+,\cdot)$ influenzi l'anello $(A[x],+,\cdot)$. Per cercare di renderci conto di come stanno le cose proviamo a fare qualche operazione con polinomi a coefficienti in $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ che e' un anello molto "povero" rispetto agli altri anelli commutativi unitari considerati.

Siano pertanto $f=[2]x^3+[1]x-[3]$ e $g=[3]x$ elementi di $\mathbb{Z}_6[x]$; calcoliamo il prodotto h di f e g, si ha:

$h=f\cdot g=([2]x^3+[1]x-[3])\cdot([3]x)=[6]x^4+[3]x^2-[9]x=$
$=[0]x^4+[3]x^2-[3]=[3]x^2-[3]$.

Si nota subito che il polinomio f divide h, in quanto esiste g tale che $f\cdot g=h$, ma il grado di f <u>non</u> <u>e'</u> <u>minore</u> <u>o</u> <u>uguale</u> del grado di h, in quanto $\delta(f)=3$ e $\delta(h)=2$, pertanto si ha:

Osservazione4.5 L'applicazione $\varphi:\mathbb{Z}_6[x]-\{0\}\longrightarrow\mathbb{N}_0$ che ad $f\in\mathbb{Z}_6[x]-\{0\}$ associa $\delta(f)\in\mathbb{N}_0$ non e' una funzione euclidea sull'anello $(\mathbb{Z}_6[x],+,\cdot)$ in quanto non soddisfa la condizione (i) della definizione2.10.

Inoltre risulta che $\delta(f\cdot g)=2$ mentre $\delta(f)+\delta(g)=3+1=4$, per tanto nell'anello $(\mathbb{Z}_6[x],+,\cdot)$ non vale la regola secondo la quale moltiplicando due polinomi di grado rispettivamente r ed s (quindi polinomi non nulli) si ottiene un polinomio di grado $r+s$ (che e' di conseguenza ancora un polinomio non nullo).
D'altra parte non ci siamo mai imbattuti in polinomi a coefficienti interi o razionali o reali per i quali non valesse la regola suddetta; e' lecito allora ipotizzare che in questi anelli tale regola valga per ogni coppia di polinomi non nulli e, qualora questa ipotesi dovesse risultare vera, sara' doveroso chiedersi da quale proprieta' degli anelli dei coefficienti dipenda cio'.

Le risposte ci sono date dal seguente

Teorema4.6 *Sia* $(A,+,\cdot)$ *un anello commutativo unitario. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) $(A,+,\cdot)$ *e' un dominio unitario;*

(ii) $(A[x],+,\cdot)$ *e' un dominio unitario;*

(iii) $\forall f,g\in A[x]-\{0\}$: $\delta(f)+\delta(g)=\delta(fg)$.

Dunque se in un anello commutativo unitario $(A,+,\cdot)$ vale la legge di annullamento del prodotto tale proprieta' viene estesa a $(A[x],+,\cdot)$ ed in questo anello vale la (iii) del teorema4.6.

D'altra parte, tenendo presente le osservazioni fatte subito dopo il teorema4.4, si ha che gli elementi di $\mathbb{Q}[x]$ di grado maggiore di 0 non sono invertibili e pertanto il dominio $(\mathbb{Q}[x],+,\cdot)$ non e' un campo, pur essendo campo il suo anello dei coefficienti.

Quindi, ricapitolando, si ha che esistono proprieta' di un anello commutativo unitario $(A,+,\cdot)$ che vengono "trasmesse" a $(A[x],+,\cdot)$ (per esempio essere D.U.) ed altre che non lo sono (per esempio essere campo); pertanto, visti i domini unitari a cui siamo interessati, e' spontaneo chiedesi:

Se $(A,+,\cdot)$ e' euclideo lo e' anche $(A[x],+,\cdot)$?
Se $(A,+,\cdot)$ e' principale lo e' anche $(A[x],+,\cdot)$?
Se $(A,+,\cdot)$ e' D.F.U. lo e' anche $(A[x],+,\cdot)$?

Vediamo subito che la risposta alla seconda domanda e' <u>no</u>. Infatti $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ e' principale e $(\mathbb{Z}[x],+,\cdot)$ <u>non</u> lo e' (se cosi fosse, essendo $1 \in$ m.c.d.$(2,x)$, dovrebbero esistere, per il teorema3.3, $f,g \in \mathbb{Z}[x]$ tali che $1=f\cdot 2+g\cdot x$, e cio' e' falso come puo' verificarsi facilmente).

Da quanto abbiamo appena detto segue che anche la risposta alla prima domanda e' <u>no</u>. Infatti $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ e' euclideo e $(\mathbb{Z}[x],+,\cdot)$ <u>non</u> lo e' (se lo fosse, dato il teorema 2.11, sarebbe principale!) e pertanto possiamo affermare che non esistono funzioni euclidee su $\mathbb{Z}[x]$.

Quindi, riflettendo sulle considerazioni appena fatte, deduciamo subito che l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi:\ & \mathbb{Z}[x]-\{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ & f \in \mathbb{Z}[x]-\{0\} \longmapsto \delta(f) \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

pur soddisfacendo alla condizione (i) della definizione2.10 in quanto $(\mathbb{Z},+\cdot)$ e' un dominio di integrita', non puo' essere una funzione euclidea su $\mathbb{Z}[x]$, e pertanto non soddisfa la condizione (ii) della definizione2.10.

Ora e' necessario fare attenzione se vogliamo raccordare la nostra esperienza con le considerazioni fatte: dire che l'applicazione φ non soddisfa la condizione (ii) della definizione2.10 significa semplicemente che esistono polinomi

$f,g \in \mathbb{Z}[x]$, con $g \neq 0$, per i quali non esistono $q,r \in \mathbb{Z}[x]$ tali che $f = q \cdot g + r$, con $r = 0$ oppure di grado minore del grado di g. E cio' e' in perfetto accordo con la nostra esperienza secondo la quale, per esempio, possiamo "trovare un quoziente e un resto" in $\mathbb{Z}[x]$ per i polinomi $f = 3x^3 + 5x - 2$ e $g = x^2 + 4$ mentre cio' non e' possibile per i polinomi $f = 3x^2$ e $g = 2x$.

A questo punto, vista la ricchezza di risultati che si hanno in un anello euclideo, possiamo cercare di capire quali proprieta' richiedere per l'anello commutativo unitario $(A,+,\cdot)$ perche' $(A[x],+,\cdot)$ risulti un dominio euclideo.

A tale scopo ripensiamo a quanto facciamo usualmente ed osserviamo che, dati $f = 5x^3 + 2x^2 - 1$ e $g = 3x^2 - 4x$ elementi di $\mathbb{Z}[x]$, mentre per essi non possiamo trovare in $\mathbb{Z}[x]$ un "quoziente e un resto" cio' e' possibile per i polinomi $h = 3^2 \cdot f$ e g; infatti, con $q = 15x + 26$ e $r = 104x - 9$, si ha $h = q \cdot g + r$ con $\delta(r) < \delta(g)$.

Quanto visto per i polinomi f e g non e' eccezionale, infatti si puo' dimostrare il seguente

Teorema4.7 *Siano* $(A,+,\cdot)$ *un* D.U. *e* $f,g \in A[x] - \{0\}$. *Si dimostra che esistono* $q,r \in A[x]$ *tali che* $a^k \cdot f = q \cdot g + r$, *dove* a *e' il coefficiente direttore di* g, $k = \max\{\delta(f) - \delta(g) + 1, 0\}$, *ed inoltre* $r = 0$ *oppure* $\delta(r) < \delta(g)$.

Dal teorema4.7 segue subito che se **a** e' un elemento invertibile allora $f = (a^{-k}q) \cdot g + a^{-k}r$, pertanto esistono $q_1 = a^{-k}q$ e $r_1 = a^{-k}r$ tali che $f = q_1 g + r_1$ con $r_1 = 0$ oppure $\delta(r_1) < \delta(g)$; possiamo cosi' concludere che se $(C,+,\cdot)$ e' un campo, considerata la funzione

$$\delta : C[x] - \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

che ad $f \neq 0$ associa il suo grado, essa e' tale che:

i) $\forall f,g \in C[x] - \{0\}$: $f \mid g \Rightarrow \delta(f) \leq \delta(g)$;

ii) $\forall f,g \in C[x]$, $g \neq 0$ esistono $q,r \in C[x]$ tali che $f = q \cdot g + r$ con $r = 0$ oppure $\delta(r) < \delta(g)$.

Quindi:

Teorema4.8 *Se* $(C,+,\cdot)$ *e'un campo allora, e solo allora,* $(C[x],+,\cdot)$ *e', con la funzione* δ, *un dominio euclideo.*

Come conseguenza immediata del teorema precedente si ha che se $(C,+,\cdot)$ e' un campo allora $(C[x],+,\cdot)$ e' un dominio principale e quindi a fattorizzazione unica.

Il teorema4.8 svolge un ruolo importante nella dimostrazione, non immediata, del seguente

Teorema4.9 *Se* $(A,+,\cdot)$ *e' un dominio a fattorizzazione unica allora* $(A[x],+,\cdot)$ *e' un dominio a fattorizzazione unica.*

Riusciamo cosi' a sapere che $(\mathbb{Z}[x],+,\cdot)$, che abbiamo gia' osservato non essere euclideo ne' principale, e' un dominio a fattorizzazione unica e pertanto esso fornisce un esempio di D.F.U. che non e' D.P.; questo ci dice che la classe P dei domini principali e' inclusa propriamente nella classe F dei domini a fattorizzazione unica e rispondiamo cosi' ad una delle domande alle quali non avevamo saputo rispondere nella prima parte di questa esposizione.

Ma non basta; i risultati ottenuti ci permettono anche di dire che oltre a $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ esistono altri domini euclidei, per esempio $(\mathbb{Q}[x],+,\cdot)$, $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$, $(\mathbb{C}[x],+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_2[x],+,\cdot)$,...; inoltre non e' difficile dimostrare che il sottoinsieme G del campo dei complessi dato da $G=\{z\in\mathbb{C} \mid \exists a,b\in\mathbb{Z}\ z=a+bi\}$, con le usuali operazioni fra complessi, e' un dominio euclideo noto come dominio degli interi di Gauss.

Concludiamo questa parte facendo notare che con dimostrazione non immediata si puo' stabilire che i sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ dati da $B_d=\{z\in\mathbb{C} \mid \exists a,b\in\mathbb{Z} z=a+b\sqrt{d}\}$, con $d\in\{-19,-43,-67,-163\}$, sono, rispetto alle usuali operazioni in $\mathbb{C}$, domini principali e non euclidei.

A questo punto siamo in condizioni di "arricchire" anche la figura2. Si ha infatti la seguente figura3:

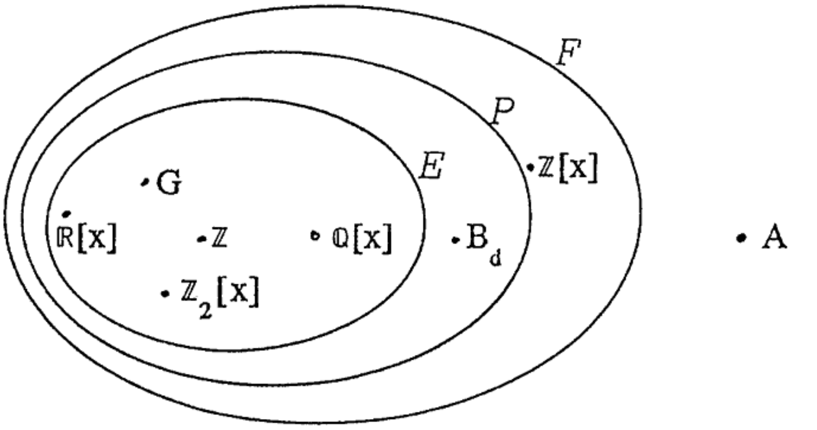


fig.3

Chiaramente ora si pone il problema di generalizzare la definizione di polinomio in una "variabile", dando quella di polinomio in piu' "variabili"; pero' prima di passare a questo argomento cerchiamo di chiarire da dove trae origine la tradizione di chiamare "variabile" l'elemento x dell'insieme A[x]; a tale scopo nel seguente numero introdurremo la nozione di funzione polinomiale e ne illustreremo i collegamenti con i polinomi.

5.FUNZIONI POLINOMIALI.

Sia $(A,+,\cdot)$ un anello commutativo unitario e sia $f=(a_0,a_1,\ldots,a_t,0,0,\ldots)=a_0+a_1x+\ldots+a_tx^t\in A[x]$. Consideriamo l'applicazione :

$$\begin{aligned} f^*:\quad & A \longrightarrow A \\ & v\in A \longmapsto a_0+a_1v+\ldots+a_tv^t\in A. \end{aligned}$$

Chiameremo f^* *funzione polinomiale associata al polinomio f.*

Siano $f=(a_0,a_1,\ldots,a_t,0,0,\ldots)$, $g=(b_0,b_1,\ldots,b_r,0,0,\ldots)\in A[x]$; ci chiediamo:

1) Se f=g possiamo dire che $f^*=g^*$?
2) Se $f^*=g^*$ possiamo dire che f=g?

La risposta alla domanda 1) e' chiaramente affermativa visto che f=g se e solo se $a_i=b_i$ per ogni $i\in\mathbb{N}_0$ (cfr. Osservazione4.2) e che quindi, in questo caso, risulta essere $f^*(\nu)=g^*(\nu)$ per ogni $\nu\in A$.
La risposta alla domanda 2) non appare altrettanto immediata; per tanto e' opportuno provare a costruire degli esempi di funzioni polinomiali, esempi che possano aiutarci ad immaginare in quale direzione muoverci per cercare di intravedere una risposta.

EsempioE$_2$. Siano $f=[1]x^3+[2]x$ e $g=[0]$ polinomi a coefficienti nell'anello $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ delle classi dei resti modulo 3. Si ha che:

$$f^*:\begin{cases}[0]\longrightarrow[1]\cdot[0]^2+[2]\cdot[0]=[0]\\ [1]\longrightarrow[1]\cdot[1]^3+[2]\cdot[1]=[3]=[0]\\ [2]\longrightarrow[1]\cdot[2]^3+[2]\cdot[2]=[12]=[0]\end{cases}\qquad g^*:\begin{cases}[0]\longrightarrow[0]\\ [1]\longrightarrow[0].\\ [2]\longrightarrow[0]\end{cases}$$

Si vede cosi' che $f^*=g^*$ pur essendo chiaramente $f\neq g$.
Da cio' possiamo dedurre una prima informazione: <u>se $(A,+,\cdot)$ e' un anello commutativo unitario finito non possiamo dire che due polinomi a coefficienti in A sono uguali se hanno funzioni polinomiali uguali</u> (abbiamo appena visto che questo non accade neanche quando l'anello finito $(A,+,\cdot)$ e' tanto particolare da essere addirittura un campo, come e' il caso di $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$).

Rivolgiamo allora la nostra attenzione a polinomi a coefficienti in un anello commutativo unitario infinito e, per renderci conto di quanto "pesi" il fatto di essere infinito, costruiamo un anello di polinomi a coefficienti in un anello commutativo unitario che sia infinito e che non sia neanche dominio di integrita'.

EsempioE$_3$. Consideriamo l'insieme B delle successioni di elementi dell'insieme $\mathbb{Z}_2=\{[0],[1]\}$. Scriviamo gli elementi di B nella forma

$(b_1,b_2,b_3,....)$ dove ogni b_i e' [0] oppure [1]. Sfruttando l'addizione e la moltiplicazione dell'anello $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ definiamo un'addizione e una moltiplicazione in B ponendo:

$$(b_1,b_2,b_3,.....)+(c_1,c_2,c_3,...)=(b_1+c_1,\ b_2+c_2,\ b_3+c_3,....)$$
$$(b_1,b_2,b_3,.....)\cdot(c_1,c_2,c_3,...)=(b_1\cdot c_1,\ b_2\cdot c_2,\ b_3\cdot c_3,....).$$

E' facile verificare che $(B,+,\cdot)$ e' un anello commutativo unitario infinito avente $\zeta=([0],[0],[0],......)$ e $\upsilon=([1],[1],[1],....)$ rispettivamente elemento neutro rispetto all'addizione e elemento neutro rispetto alla moltiplicazione (attenzione non lasciamoci ingannare dalle successioni! Gli elementi di B non sono polinomi: la moltiplicazione non e' la stessa e elementi di B non sono soltanto le successioni definitivamente nulle).

Osserviamo che $(B,+,\cdot)$ non e' un dominio d'integrita'; infatti $([1],[0],[0],[0],...)$ e $([0],[1],[0],[0],...)$ sono elementi di B diversi da ζ ed il cui prodotto e' ζ.

In B[x] consideriamo il polinomio nullo g e il polinomio non nullo $f=x\cdot(x-\upsilon)$. Chiaramente la funzione polinomiale g^* associata al polinomio nullo g fa corrispondere ad ogni elemento di B lo zero di B, cioe' l'elemento ζ.

Determiniamo l'elemento di B che l'applicazione f^* fa corrispondere al generico elemento $(b_1,b_2,b_3,...)\in B$. Si ha:

$f^*((b_1,b_2,b_2,...))=$
$=(b_1,b_2,b_3,...)\cdot\{(b_1,b_2,b_2,....)-([1],[1],[1]...)\}=$
$=(b_1,b_2,b_3,...)\cdot(b_1-[1],b_2-[1],b_3-[1],.....)=$
$=(b_1(b_1-[1]),\ b_2(b_2-[1]),\ b_3(b_3-[1]),\ ....).$
Pero' ogni b_i e' [0] oppure [1], quindi
$f^*((b_1,b_2,b_3,....))=([0],[0],[0],...).$

Si vede cosi' che ai polinomi distinti f e g corrispondono funzioni polinomiali uguali.

Tutto cio' ci induce a pensare che per una eventuale risposta positiva alla domanda 2) non basta aggiungere sull'anello commutativo unitario $(A,+,\cdot)$ l'ipotesi che sia infinito.

A questo punto potremmo facilmente essere presi dallo sconforto! Ma all'ulteriore piccolo passo, che consiste nel chiedersi cosa accadra' se consideriamo anelli di polinomi a coefficienti in un dominio unitario infinito, la nostra costanza sara' premiata; infatti si dimostra il seguente teorema, noto come **Principio di identita' dei polinomi.**

Teorema5.1 *Sia* $(A,+,\cdot)$ *un dominio di integrita'* <u>infinito</u>. *Siano* $f,g \in A[x]$. *Si dimostra che* $f=g$ *se e solo se* $f^*=g^*$.

A proposito del principio di identita' dei polinomi evidenziamo come, ponendoci domande e mostrando controesempi di cose "ovvie", abbiamo chiarito il significato e i limiti di tale "principio" che sottointende diversi aspetti non sempre chiaramente esposti nei libri di testo delle scuole secondarie superiori (ed anche in certi testi universitari!).

Osserviamo che se $(A,+,\cdot)$ e' un dominio di integrita' infinito, il teorema5.1 <u>puo</u>' consentire di identificare il polinomio $f \in A[x]$ con l'applicazione polinomiale f^*. Questo punto di vista e' quello solitamente seguito in analisi e in geometria algebrica classica dove, avendosi a che fare con polinomi a coefficienti nel campo dei complessi (che e' un dominio di integrita' infinito) i polinomi vengono identificati con la corrispondente funzione polinomiale e di consegueza, coerentemente con questo punto di vista, viene dato ad x il nome di "variabile".

Appagata con le considerazioni svolte anche la curiosita' di sapere da dove trae origine il nome di "variabile" dato ad x, nome che in seguito adotteremo anche noi, passiamo a parlare di polinomi in piu' variabili cercando di dare di questi una definizione che generalizzi quella data per polinomi in una variabile.

6.POLINOMI IN PIU' "VARIABILI".

Sia $n\in\mathbb{N}$ e sia $\mathbb{N}_0^{(n)}$ l'insieme delle n-ple $(i_1,i_2,..,i_n)$ di elementi di $\mathbb{N}_0$. Poniamo $(i):=(i_1,i_2,..,i_n)\in\mathbb{N}_0^{(n)}$.

Definizione6.1 Sia $(A,+,\cdot)$ un anello commutativo unitario e $n\in\mathbb{N}$. Dicesi *polinomio su* A *in* n *variabili* ogni applicazione $f:\mathbb{N}_0^{(n)}\longrightarrow A$ *quasi ovunque nulla* cioe', tale che $f((i))\neq 0$ solo per un numero finito di elementi $(i)\in\mathbb{N}_0^{(n)}$.

Se identifichiamo $\mathbb{N}_0^{(1)}$ con $\mathbb{N}_0$ ed identifichiamo (i_1) con i_1, dalla definizione6.1 segue che un polinomio su A in una variabile e' una applicazione $f:\mathbb{N}_0\longrightarrow A$ tale che $f(i)\neq 0$ solo per un numero finito di elementi $i\in\mathbb{N}_0$; cioe' si ottiene la definizione4.1.

Indicato con $S_A^{(n)}$ l'insieme dei polinomi su A in n variabili, e dati $f,g\in S_A^{(n)}$, possiamo dimostrare che:
(I) l'applicazione $s:\mathbb{N}_0^{(n)}\longrightarrow A$, che ad ogni $(i)\in\mathbb{N}_0^{(n)}$ associa $f((i))+g((i))$, e' un'applicazione quasi ovunque nulla cioe' e' un elemento di $S_A^{(n)}$;
(II) l'applicazione $p:\mathbb{N}_0^{(n)}\longrightarrow A$, che ad ogni $(i)\in\mathbb{N}_0^{(n)}$ associa $\sum_{(t)+(h)=(i)} f((t))\cdot g((h))$, dove $(t)+(h)=(t_1+h_1,t_2+h_2,\ldots,t_n+h_n)$, e' un'applicazione quasi ovunque nulla, cioe' e' un elemento di $S_A^{(n)}$.

Pertanto sono operazioni in $S_A^{(n)}$ l'applicazione

$+:S_A^{(n)}\times S_A^{(n)}\longrightarrow S_A^{(n)}$ che alla coppia (f,g) associa s

e l'applicazione

$\cdot:S_A^{(n)}\times S_A^{(n)}\longrightarrow S_A^{(n)}$ che alla coppia (f,g) associa p.

Per fare qualche esempio di prodotto e somma di polinomi in piu' variabili, sia $n=3$ e sia $A=\mathbb{Z}$.

EsempioE_4. Consideriamo $f,g \in S_{\mathbb{Z}}^{(3)}$ definiti da:

$$f: \begin{cases} (1,2,3) \longrightarrow -5 \\ (0,1,0) \longrightarrow 2 \\ (i) \longrightarrow 0 & \text{se (i) e' diverso da } (1,2,3) \text{ e da } (0,1,0). \end{cases}$$

$$g: \begin{cases} (1,2,0) \longrightarrow 1 \\ (0,1,0) \longrightarrow 9 \\ (2,1,0) \longrightarrow 4 \\ (i) \longrightarrow 0 & \text{se (i) e' diverso da } (1,2,0),(0,1,0) \text{ e } (2,1,0). \end{cases}$$

Si avra' allora che la somma $s=f+g$ e' la funzione:

$$s: \begin{cases} (1,2,3) \longrightarrow f((1,2,3)) + g((1,2,3)) = -5+0 = -5 \\ (0,1,0) \longrightarrow f((0,1,0)) + g((0,1,0)) = 2+9 = 11 \\ (1,2,0) \longrightarrow f((1,2,0)) + g((1,2,0)) = 0+1 = 1 \\ (2,1,0) \longrightarrow f((2,1,0)) + g((2,1,0)) = 0+4 = 4 \\ (i) \longrightarrow 0 \quad \text{se (i) e' diverso da } (1,2,3),(0,1,0),(1,2,0) \\ \qquad\qquad \text{e da } (2,1,0). \end{cases}$$

EsempioE_5 Per il prodotto di due polinomi diamo un cenno di come procedere per determinare $p=f \cdot g$ con $f,g \in S_{\mathbb{Z}}^{(3)}$ e definiti come segue:

$$f: \begin{cases} (0,0,0) \longrightarrow 2 \\ (0,1,0) \longrightarrow 3 \\ (i) \longrightarrow 0 & \text{se (i) e' diverso da } (0,0,0) \text{ e da } (0,1,0); \end{cases}$$

$$g: \begin{cases} (1,0,0) \longrightarrow 4 \\ (0,1,0) \longrightarrow 5 \\ (i) \longrightarrow 0 & \text{se (i) e' diverso da } (1,0,0) \text{ e da } (0,1,0). \end{cases}$$

Calcoliamo, per esempio, il valore che la funzione p assume in (0,0,0), in (0,1,0) e in (2,1,0).

Si ha:

$p((0,0,0))=f((0,0,0))\cdot g((0,0,0))=2\cdot 0=0;$

$p((0,1,0))=f((0,0,0))\cdot g((0,1,0))+f((0,1,0))\cdot g((0,0,0))=2\cdot 5+3\cdot 0=10$

$p((2,1,0))=f((0,0,0))\cdot g((2,1,0)+f((1,0,0)\cdot g((1,1,0))+$
$+f((2,0,0))\cdot g((0,1,0))+f((0,1,0))\cdot g((2,0,0))+$
$+f((1,1,0))\cdot g((1,0,0))+f((2,1,0))\cdot g((0,0,0))=2\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 5+3\cdot 0+$
$+0\cdot 4+0\cdot 0=0;$

Con l'addizione e la moltiplicazione precedentemente definite in $S_A^{(n)}$ si ha (a prezzo di calcoli abbastanza "pesanti"):

Teorema6.1 *Dato un anello commutativo unitario* $(A,+,\cdot)$, *si dimostra che la struttura* $(S_A^{(n)},+,\cdot)$ *e' un anello commutativo unitario.*

Come si vede dagli esempi E_4 ed E_5, tenendo presenti le definizioni date, e' stata cosa gia' molto laboriosa assegnare semplici polinomi in piu' variabili ed e' stata cosa molto pesante eseguire un'addizione e "cominciare" ad eseguire una moltiplicazione. Pertanto, non e' una questione accademica o estetica cercare di giungere ad una rappresentazione dei polinomi in piu' variabili, la quale permetta non solo un'agevole assegnazione di essi ma, soprattutto, un agevole modo di operare con essi. L'importanza dell'uso di una opportuna rappresentazione e' d'altra parte evidente, se si ricorda che, dall'antichita' fino all'avvento (nel secolo XV) della nostra moderna **rappresentazione** posizionale dei numeri naturali, i progressi nell'arte del calcolo furono minimi e che operazioni, ora alla portata di un bambino, richiedevano ad uno specialista giorni di complicato lavoro.

Allo scopo di arrivare alla rappresentazione usuale degli elementi di $S_A^{(n)}$, tenendo presente anche quanto abbiamo fatto per i polinomi in una variabile, siano $\mathbf{a}, x_1, x_2, \dots, x_n$ le funzioni da $\mathbb{N}_0^{(n)}$ in A (cioe' i polinomi in n variabili) definite nel modo seguente:

$$\mathbf{a}: \begin{cases} (0,0,0,..,0) \longrightarrow a & \\ (i) \longrightarrow 0 & \text{se } (i) \neq (0,0,..,0) \end{cases}$$

$$x_1: \begin{cases} (1,0,0,..,0) \longrightarrow 1 & \\ (i) \longrightarrow 0 & \text{se } (i) \neq (1,0,..,0) \end{cases}$$

$$x_2: \begin{cases} (0,1,0,..,0) \longrightarrow 1 & \\ (i) \longrightarrow 0 & \text{se } (i) \neq (0,1,..,0) \end{cases}$$

....

$$x_n: \begin{cases} (0,0,0,..,1) \longrightarrow 1 & \\ (i) \longrightarrow 0 & \text{se } (i) \neq (0,0,..,1) \end{cases}$$

Visto come sono definiti i polinomi $\mathbf{a}, x_1, x_2, \dots x_n$ e come e' definita la moltiplicazione fra polinomi, possiamo calcolare (e si immagina con quanta buona volonta'!) il prodotto

$$(*) \qquad f = \mathbf{a} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n};$$

si vede cosi' che l'applicazione f e' data da:

$$f = \mathbf{a} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} : \begin{cases} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \longrightarrow a & \\ (i) \longrightarrow 0 & \text{se } (i) \neq (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) \end{cases}$$

Ai polinomi della forma (*) diamo il nome di *monomi*.

Ora non e' difficile verificare che, effettuato il seguente calcolo,

$$\mathbf{a}_1 \cdot x_1^{\alpha_1^{(1)}} \cdot x_2^{\alpha_2^{(1)}} \cdot .. \cdot x_n^{\alpha_n^{(1)}} + \mathbf{a}_2 \cdot x_1^{\alpha_1^{(2)}} \cdot x_2^{\alpha_2^{(2)}} \cdot .. \cdot x_n^{\alpha_n^{(2)}} + \quad + \mathbf{a}_r \cdot x_1^{\alpha_1^{(r)}} \cdot x_2^{\alpha_2^{(r)}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n^{(r)}}$$

si ottiene il polinomio f dato da:

$$f: \begin{cases} (\alpha_1^{(1)},\dots,\alpha_n^{(1)}) \longrightarrow a_1 \\ (\alpha_1^{(2)},\dots,\alpha_n^{(2)}) \longrightarrow a_2 \\ \dots\dots \\ (\alpha_1^{(r)},\dots,\alpha_n^{(r)}) \longrightarrow a_r \end{cases}$$

Ed ecco quindi come, chiarito il contesto, possiamo dire che un polinomio e' una somma di monomi (non simili, come aggiungono alcuni!).

Inoltre e' chiaro che le usuali regole per trovare somme e prodotti di polinomi non sono altro che l'applicazione successiva delle proprieta' dell'addizione e della moltiplicazione definite in $S_A^{(n)}$.

Per renderci conto di quanto sia comodo **rappresentare** un polinomio come somma di monomi, ritorniamo ai polinomi f,g dell'esempio E_4; essi, usando x,y,z invece di $x_1,x_2,x_3,$ sono rappresentabili nel seguente modo:

$f=-5xy^2z^3+2y$ $\qquad$ $g=1xy^2+9y+4x^2y$ $\qquad$ e quindi

$f+g=-5xy^2z^3+11y+1xy^2+4x^2y$ $\qquad$ cioe' il polinomio s che avevamo trovato nell'esempio E_4.

Cosi nell'esempio E_5 si ha:

$f=2+3x$ $\qquad$ $g=4x+5y$ $\qquad$ e quindi

$f\cdot g=8x+10y+12x^2+15xy$ $\qquad$ cioe' il polinomio p che avevamo cominciato a trovare applicando la definizione di moltiplicazione tra polinomi.

E' evidente che a questo punto si pone un problema di carattere didattico non indifferente in quanto e' manifesta a tutti la difficolta' di presentare a ragazzi di scuola secondaria superiore, nel modo che abbiamo esposto, anche solo i polinomi in due variabili. Esistono pero' alcuni teoremi, coinvolgenti la natura *trascendente* delle variabili e dei quali e' qui impossibile anche solo riportare gli enunciati, (comunque il lettore volenteroso potra' provare a leggere Zariski-Samuel "Commutative algebra" Vol. I pag.25-39) che, oltre a chiarire alcune questioni sull'anello $(S_A^{(n)},+,\cdot)$, ci aiutano a scegliere la strategia da seguire per avvicinare, in un modo coerente, i ragazzi ai polinomi in piu' variabili.

Tali teoremi garantiscono che l'anello $(S_A^{(n)},+,\cdot)$ dei polinomi nelle n variabili $x_1,\dots,x_n$, e a coefficienti in A puo' essere "identificato" (i teoremi ai quali pensiamo puntualizzano proprio il significato di questa "identificazione") con l'anello dei polinomi in **una** qualunque delle variabili e i cui coefficienti sono polinomi su A nelle n-1 variabili rimanenti.

Questo riguardare $(S_A^{(n)},+,\cdot)$ come l'anello $(S_{A_1}^{(1)},+,\cdot)$ dove $A_1:=S_A^{(n-1)}$, da una parte ci aiuta a penetrare meglio in questioni riguardanti il "trasferimento" di proprieta' dall'anello $(A,+,\cdot)$ all'anello $(S_A^{(n)},+,\cdot)$, dall'altra ci fornisce una indicazione su come parlare ai ragazzi di polinomi in due variabili, poi di polinomi in tre variabili, e cosi' via.

Possiamo infatti procedere nel seguente modo.

Sia $(A,+,\cdot)$ un anello commutativo unitario; costruito l'anello commutativo unitario $(A[x],+,\cdot)$ ed indicato con A_1 l'insieme $A[x]$, possiano considerare l'anello dei polinomi a coefficienti in A_1 e nella variabile y; a tale anello, cioe' all'anello $(A_1[y],+,\cdot)$, diamo il nome di anello dei polinomi a coefficienti in A e nelle variabili x,y. Si vede allora come i polinomi in due variabili e a coefficienti in A siano polinomi in <u>una</u> variabile i cui coefficienti sono polinomi (in una variabile e a coefficienti in A).

Costruito cosi' $(A_1[y],+,\cdot)$ e posto $A_2:=A_1[y]$ avremo i polinomi nelle variabili x,y,z, e a coefficienti in A, costruendo l'anello commutativo unitario $(A_2[z],+,\cdot)$; cosi' di seguito potranno costruirsi i polinomi, a coefficienti in A, in quattro variabili e poi in cinque e cosi' via.

Come si vede, si e' passati da un'ottica nella quale c'era un'assegnazione globale di n variabili in cui riconoscere i polinomi in una variabile come caso particolare, ad un'ottica nella quale abbiamo un'assegnazione successiva di variabili a partire dai polinomi in una variabile. Non si pensi pero' che la scelta di tale ottica, che sembra piu' semplice, non abbia un costo.

Infatti, essendo in tale impostazione x=(0,1,0,0,..) e y=((0,0,0,..), (1,0,0,...), (0,0,0,...),.....), i polinomi nelle variabili x,y saranno <u>sempre</u> polinomi nella variabile y e a coefficienti polinomi in x e non potranno essere riguardati come polinomi nella variabile x e a coefficienti polinomi in y (in tal caso, secondo la definizione alla quale stiamo facendo riferimento, dovrebbe essere y=(0,1,0,0,..) e x=((0,0,0,..), (1,0,0,...), (0,0,0,...),.....); invece e' possibile fare cio' quando i polinomi nelle variabili x ed y vengono definiti cosi' come abbiamo fatto all'inizio del paragrafo.

Ci sembra comunque questo un costo non eccessivo, anche perche' ci impone uno sforzo di coerenza nell'ambito della quale dovremo imparare a riconoscere situazioni in cui, tenendo presente le definizioni che <u>abbiamo</u> <u>deciso</u> di dare, non potremo dire tutto quello che avremmo potuto con uno sforzo iniziale maggiore. Questo e', a mio avviso, ancora un buon motivo per adottare tale tipo di impostazione in quanto da cio' si potra' trarre lo spunto per un discorso che, prendendo le mosse dalla matematica, vada a coinvolgere la formazione "etica" dei ragazzi.

Passiamo ora a qualche considerazione riguardante polinomi in piu' variabili in relazione all'anello dei coefficienti.

Si ha infatti:

(I) Mentre l'anello dei polinomi a coefficienti in un campo e in una variabile e', con la funzione euclidea δ, un dominio euclideo (vedi teorema4.8) non possiamo dire altrettanto per l'anello dei polinomi in <u>due</u> variabili a coefficienti in un campo. Infatti tali anelli sono polinomi in una variabile ma a coefficienti in un anello di polinomi che <u>non</u> e 'un campo (vedi (iii) del teorema4.4).

Questo, ricordando quanto abbiamo detto a proposito della proprieta' euclidea di un dominio, non e' una perdita da poco; basti pensare che, mentre, per esempio in $(\mathbb{Q}[x],+,\cdot)$, possiamo ricorrere all'algoritmo euclideo per la ricerca di un massimo comun divisore fra due polinomi dei quali non riusciamo a trovare una decomposizione in fattori irriducibili (pur sapendo che una tale decomposizione esiste!), cio' non e' piu' possibile quando andiamo a considerare i polinomi in x,y ed a coefficienti in $\mathbb{Q}$. Infatti in tale anello potremo dividere un polinomio f solo per particolari polinomi g non nulli (per esempio quelli aventi il coefficiente direttore invertibile) e questo anche se gli esercizi di solito proposti hanno l'accortezza di scegliere i polinomi g "buoni"! Potremo pero' sempre fare riferimento al teorema4.7. Per esempio, dati i polinomi a coefficienti in $\mathbb{Q}$ e nelle variabili x e y:

$f=y^4+(3x^2+2)y^3-2xy+3x$

$g=(x+1)y^2+3x^2$

osserviamo che essi sono polinomi in y a coefficienti in $\mathbb{Q}[x]$ e che il coefficiente direttore di g e' $x+1$. Pertanto potremo dividere per g il polinomio $h=(x+1)^k\cdot f$ dove $k=\max\{4-2+1,0\}=3$.

(II) Se $(A,+,\cdot)$ e' un dominio a fattorizzazione unica allora $(A[x],+,\cdot)$ e' un dominio a fattorizzazione unica (vedi teorema4.9) quindi e' tale l'anello dei polinomi in y ed a coefficienti in A[x]. Pertanto l'anello dei polinomi in due variabili e a coefficienti in un D.F.U. e' un D.F.U. e tale sara' ogni anello di polinomi in n variabili e a coefficienti in un D.F.U.

Possiamo cosi' modificare la figura3 ed ottenere la seguente figura4:

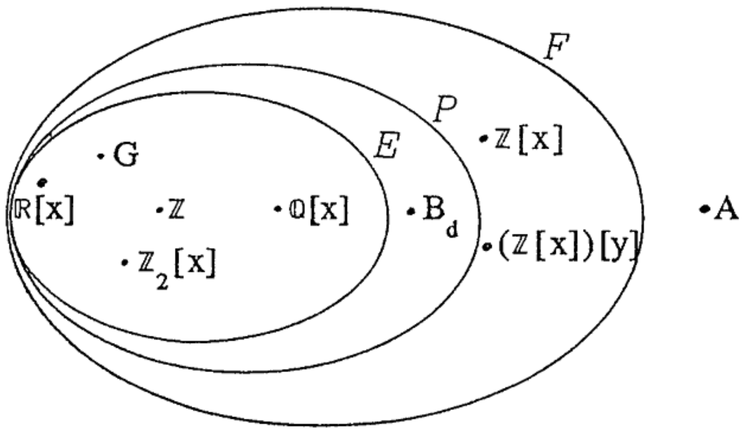


fig.4

Facendo notare che con quanto finora detto abbiamo solo "sbirciato" nel mondo dei polinomi, terminiamo qui la nostra esposizione senza con questo voler dire che si concludono qui i discorsi iniziati nel paragrafo 1.

Qui non vi e' conclusione.
Chi ha detto che si debba concludere? Qui non vi e' fortuna da predire e nemmeno consigli da dare.

Buon viaggio.

W.James (1842-1910)

Bibliografia

M.Curzio	Lezioni di algebra. Liguori editore.(Napoli)
H.Decoste	Des anneaux principaux, non euclidiens. Ann. Sc. Math. Quebec 5, 103-114 (1981).
I.N.Herstein	Algebra. Editori riuniti. (Roma)
A.Robinson	Numbers and ideals. Holden-Day,Inc.(London)
O.Zariski-P.Samuel	Commutative Algebra. D.Van Nostrand Company,Inc.(New York)

La didattica della teoria degli insiemi

R. Ferro
Dipartimento di Matematica, Universita' di Lecce

1. Introduzione.

La teoria degli insiemi e' un argomento che si insegna regolarmente nelle scuole, anche se, direi, molto acriticamente, perche' il piu' delle volte non si insegna teoria degli insiemi, come vedremo. E forse non e' neppure necessario o opportuno parlare di teoria degli insiemi a certi livelli scolari. Comunque la mia esposizione sara' un tentativo di capire cosa sia opportuno intendere per teoria degli insiemi.

Vorrei premettere che quanto presentero' si basa su una delle tante proposte di interpretare la teoria degli insiemi. Non si deve pensare che, a livello scientifico, la teoria degli insiemi sia una e ben codificata, anzi, l'interesse e lo studio scientifico della teoria degli insiemi viene proprio dal fatto che e' una teoria non completa, quindi si possono sempre aggiungere nuovi assiomi indipendenti che precisano sempre meglio, secondo varie scelte, tutte legittime, cosa debba intendersi nel dettaglio con la nozione di insieme. Dire che noi conosciamo completamente la nozione di insieme, e' dire una cosa scientificamente sbagliata.

Ciononostante, tra le varie scelte possibili, possiamo cercare di proporne una che sia particolarmente opportuna dal punto di vista didattico, come si e' fatto in uno studio svolto assieme ad alcuni colleghi di Padova. Ed e' questa la scelta che considerero'.

2. Un'indagine.

Nell'iniziare il lavoro padovano, si e' pensato di partire con un questionario per vedere che nozione di insieme hanno gli studenti.

Il questionario, come l'intera ricerca, era rivolto all'inizio della scuola superiore. Questi questionari sono stati distribuiti all'inizio dell'anno scolastico, prima che gli insegnanti spiegassero l'argomento, e quindi risentivano essenzialmente di quanto era stato fatto negli anni scolari precedenti. Per iniziare vorrei dare un'idea di come abbiamo organizzato il questionario. Le prime domande riguardavano la nozione di insieme, poi c'erano domande che riguardavano esempi d'insieme, poi la notazione adottata per gli insiemi, poi l'uso dei simboli di appartenenza e infine l'uso del simbolo di uguaglianza. Abbiamo ricevuto risposte interessanti, e commentero' i risultati essenziali del questionario, ma prima vorrei farvi vedere le domande fatte sulla nozione di insieme, gli esempi, e la notazione.

La prima domanda, quasi ovvia, e': cos'e' per te un insieme? E qui la risposta non era guidata. Poi abbiamo cercato invece di non lasciare piu' completa liberta', ma di proporre delle scelte multiple, che pero' sono state studiate con abbastanza attenzione pensando prima ai possibili errori e ai possibili punti di vista, cercando quindi di mettere nelle varie possibilita' di risposte tutte le alternative che sarebbero potute emergere.

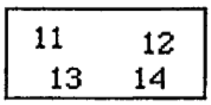
La seconda domanda cominciava cosi': Se qualcuno ti dicesse che possiamo definire la nozione di insieme in uno dei seguenti modi (e dopo saranno riportati i modi) diresti che l'affermazione e' (attenzione alle risposte che concediamo): corretta ed esauriente, quasi del tutto corretta, c'e' qualcosa di vero, non e' che un esempio, e' incomprensibile, poco chiara perche' non conosco il significato di alcune parole, totalmente sbagliata. Nel questionario era anche richiesto di giustificare la scelta delle risposte. Ora indichero' quali sono le possibili definizioni a cui si dovevano attribuire queste risposte. Se volete pensate anche voi come rispondereste a queste domande. Una prima proposta e' questa: una collezione di oggetti distinguibili tra loro (notate che questa affermazione risente anche di quello che e' scritto in vari testi, non correttamente). Una seconda proposta era: una cosa singola. 3) una collezione di elementi generalmente definibili in qualche modo (qui l'accento e' sul definibili in qualche modo). 4) Un concetto primitivo, cioe' un concetto che non riusciamo a definire. 5) Una scatola vuota. 6) Tanti punti all'interno di un cerchio (questo si rifa' chiaramente ai diagrammi di Venn). 7) Un aggregato o un gruppo o una moltitudine (parole che sono quasi sinonimi, ma che non sono precise). 8) Una scatola con qualcosa dentro. 9) Gli alunni di una classe (chiaramente e' un esempio di insieme, ma non e' la nozione). 10) Una collezione di oggetti simili tra loro (qui si richiede una certa similarita').

La terza domanda, invece, passa agli esempi di insiemi e prevede che le risposte possano essere si, no, talvolta, non so. Cercate di scoprire anche la problematica che ha condotto alla scelta di questi esempi. Primo esempio: gli alunni di una classe costituiscono un insieme? 2) Le prime quindici lettere dell'alfabeto costituiscono un insieme? 3) L'alfabeto e' un insieme? 4) Gli alunni contemporaneamente bocciati e promossi costituiscono un insieme? 5) I semafori verdi costituiscono un insieme? 6) I numeri naturali costituiscono un insieme? 7) Gli alunni alti di una classe costituiscono un insieme? 8) Un treno e' un insieme? 9) Tutti gli insiemi costituiscono un insieme?

La domanda successiva lascia il problema degli esempi e comincia ad affrontare il problema della notazione. Come indicheresti l'insieme costituito dalle vocali dell'alfabeto italiano? L'ulteriore domanda e' ancora sulla notazione e dice: valuta le seguenti descrizioni dell'insieme dei numeri naturali maggiori di 10 e minori di 15, e prevede queste possibili risposte: a) la notazione e' giusta, oppure b) manca qualche elemento nella definizione di quella collezione, oppure c) c'e' qualcosa di troppo, d) non e' chiara perche' ... (qui avrebbero dovuto mettere i motivi), e) ci sono dei simboli mai visti, f) e' sbagliata perche'... Ed ecco le notazioni proposte.

1) {11,14}; 2) {11, 12, 13, 14};

3)



4) {11,12,13,14,15,16};

5) l'insieme i cui elementi sono 11, 12, 13 e 14; 6) {11121314};

7) {13, 11, 14, 12} ; 8) {10+1, 10+2, 10 +3, 10+4};

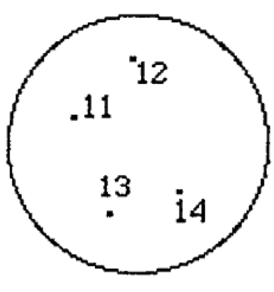
9) {x: x>10 e x <15} (non tutti avevano visto una notazione del genere);

10) {x: x>10 o x<15} (come quella sopra, ma al posto di "e" c'e' un "o");

11) {x: 10<x<15}; 12) {11 ... 14};

13) {8,9,10,11,12,13,14}; 14) {8,10,12,14};

15)



16) {11,13,14}; 17) l'insieme degli x tali che x e' compreso tra 10, e 15 e x e' un numero naturale.

Avete pensato alle vostre risposte?

C'erano delle altre domande dello stesso stile, ma credo che adesso abbiate gia' capito il modo con cui abbiamo cercato di costruire le altre domande. Posso aggiungere che si chiedevano notizie sull'uso del simbolo di appartenenza, c'erano delle espressioni in cui mancava un simbolo e bisognava inserire al posto dei puntini o appartiene o non appartiene o contenuto o non contenuto o cose del genere; altre espressioni in cui si doveva mettere al posto dei puntini uguale, non uguale a secondo dei casi.

Esaminiamo brevemente quali sono stati i risultati di questo questionario. Non indichero' quanti hanno risposto in certo modo a ciascuna domanda, ma notero' degli atteggiamenti abbastanza consistenti di tipo particolare che sono emersi. Un'idea molto diffusa e' risultata la seguente: gli insiemi sono visti come collezioni di oggetti dello stesso tipo, se gli elementi non sono dello stesso tipo (tutti numeri, tutti triangoli) la loro collezione non e' considerata un insieme. Ad esempio la collezione i cui elementi sono un certo triangolo,un certo cane e questa sedia, non costituirebbe un insieme. Un altro atteggiamento molto comune vuole che per insiemi si intendano classi universali, cioe', ad esempio, tutti i triangoli, tutti i numeri naturali, tutte le sedie, ma la collezione di tre sedie non sarebbe un insieme: o tutte le cose di un certo tipo appartengono all'insieme, o la collezione non e' un insieme. Altra idea molto diffusa e' che gli insiemi sono collezioni molto grandi: due tre cose non costituiscono un insieme, duemila si, una moltitudine si. Queste sono le cose piu' macroscopiche che sono emerse dall'indagine svolta, senza entrare nei dettagli delle risposte alle singole domande.

3. Le esigenze della matematica.

Volendo arrivare ad una proposta di presentazione della teoria degli insiemi, la domanda e': prendendo atto dei risultati visti, quale tipo di concetto di insieme introdurre? Per motivare piu' concretamente la scelta, abbiamo cercato di rispondere ad un' altra domanda, che mi pare abbastanza ovvia: a cosa serve la teoria degli insiemi? In particolare, a cosa serve la teoria degli insiemi in matematica? Perche' e' inutile svolgere un bel capitoletto che sta nel libro o che sta ad un certo punto del programma, e sviluppare la teoria degli insiemi in quattro o cinque lezioni che non servono nel resto del programma: e' inutile presentare delle nozioni cosi' giusto per il gusto di presentarle. Cosi' cerchiamo anche una nozione di insieme che sia utile poi allo sviluppo della matematica studiando cosa richiede la matematica, quando fa ricorso alla nozione di insieme. Ci sono vari momenti in cui questo succede. Pensate alla nozione di relazione, alla nozione di funzione, alle nozioni di successione; quando poi vengono introdotti i numeri reali, pensate alle successioni di Cauchy, alle sezioni di Dedekind. Sono problemi molto seri in cui la nozione di insieme ha un ruolo preminente.

Analizziamo appena piu' accuratamente alcune di queste nozioni. Da un punto di vista matematico, cos'e' una relazione? Cos'e' una relazione da un punto di vista non matematico? Sarete tutti d'accordo, che se dico "Tizio e' figlio di un certo genitore" sto parlando di una relazione, la relazione "essere figlio di". Una relazione e' mettere in evidenza un certo legame tra vari individui che sono correlati in un certo modo. Pero' usualmente quando si parla di una relazione, quella figli genitori ad esempio, subito si vanno a toccare molti aspetti di varia natura: stanno bene assieme, e' giusto il comportamento di quel genitore verso quel figlio, e' una relazione ideale o che va bene nella nostra societa' ma che in certe societa' non va bene?

La matematica non e' psicologia, non e' sociologia, non e' morale, non si interessa se e' bene che ci sia quella relazione, se una certa relazione funziona, se e' economica, ne' ha altre preoccupazioni di questo genere. L'attenzione della matematica e' quasi l'attenzione del notaio che registra come stanno le cose, se poi un contratto sia piu' conveniente a uno o all'altro dei contraenti sono fatti loro, non del notaio. La matematica assume un tale atteggiamento perche' cosi' e' utile a qualsiasi altra scienza, e vorrei sottolineare questa motivazione. Poi sara' la singola scienza che studiera' se una relazione e' opportuna o meno, come eventualmente modificare le cose per ottenere un risultato migliore, la matematica semplicemente prende atto della situazione. Quindi ogniqualvolta si pensa ad una relazione, dal punto di vista matematico quello che interessa e': chi sta in relazione con chi; non perche', come, se si trovano bene, se e' opportuno; ma chi e' in relazione con chi. Quindi la conoscenza delle coppie ordinate di individui che stanno nella relazione e' tutto quello che interessa. Percio' e' opportuno considerare una relazione come un insieme di coppie ordinate, e questa e' la nozione matematica di relazione. Ed e' una nozione che viene proprio da questo non voler considerare, da questo astrarre da tutti gli aspetti morali, psicologici, sociologici, di opportunita' e quant'altro volete metterci di caso in caso.

Questo e' l'atteggiamento, diciamo, estensionale: non ci interessa tanto perche' le cose vanno in un certo modo, ma a chi si estendono le relazioni, chi sono le coppie ordinate di individui coinvolti. Atteggiamento estensionale che e' tipico della matematica, che le viene proprio attraverso una adeguata nozione di insieme. Cosi' noi considereremo uguali, coincidenti due collezioni semplicemente se hanno gli stessi elementi, indipendentemente dal fatto che quegli elementi vengano descritti bene, male, in che ordine, eccetera; cio' che ci interessa e' a chi si estende quella collezione, chi sono i suoi elementi; astraiamo dal resto, non consideriamo il resto. Questo e' un atteggiamento tipico che si puo' far rilevare facilmente nella presentazione della nozione di relazione, non appena, prima, sia stato adeguatamente presentato in modo estensionale il concetto di collezione.

Le considerazioni sulle relazioni, si trasferiscono pari pari alle funzioni. Nel linguaggio comune usiamo frasi del tipo: una quantita' varia in funzione di un'altra, ma, dal punto di vista matematico, ancora interessano soltanto quali sono le coppie ordinate di elementi che si corrispondono nella funzione. Una funzione e' una relazione che in piu' ha la caratteristica che dato il primo elemento e' unico quello che gli corrisponde.

Quando si vogliono introdurre i numeri reali, si puo' scegliere tra un approccio assiomatico, cioe' dire i numeri reali sono quei numeri che soddisfano certe proprieta', oppure costruttivo, cioe' disponendo dei numeri razionali effettuare opportune costruzioni su di essi fino ad ottenere degli oggetti che chiameremo numeri reali. Da questo secondo punto di vista, le tecniche sono svariate, ad esempio si possono utilizzare le sezioni di Dedekind, o le successioni di Cauchy, o altri metodi ancora, comunque sono tecniche che prevedono di considerare collezioni numerabili, cioe' con tanti elementi quanti sono i numeri naturali, e la possibilita' di fare questo e' ancora dovuta alla possibilita' di costruire opportuni insiemi. Ad esempio nel caso delle successioni, che sono delle funzioni dai numeri naturali, ad un certo punto le vogliamo considerare come una cosa sola perche' vogliamo effettuare delle costruzioni che prevedono l'uso delle successioni come elementi. E cosi' anche per le sezioni di Dedekind. Una sezione di Dedekind e' una coppia di insiemi non vuoti di numeri razionali tali che i numeri del primo insieme siano piu' piccoli di quelli nel secondo e inoltre tutti i numeri razionali, eccetto al piu' uno, siano in uno dei due insiemi. Notiamo che queste coppie hanno per elementi collezioni infinite, che diventano una sola cosa, un elemento della coppia e la coppia a sua volta diventa un elemento singolo che e' il numero reale. Bisogna sottolineare questo passaggio fondamentale: queste collezioni diventano una sola cosa soggetto di altre proprieta'.

Anche prima con le relazioni potevamo dire che una relazione e' una sola cosa, un'entita' unica che puo' godere di proprieta', ad esempio quella di essere una delle relazioni di equivalenza. Cosi' anche una funzione e' si una collezione di coppie, ma e' anche un'unica cosa, e questa unica cosa puo' essere soggetto di proprieta', ad esempio essere continua. Questo essere una singola cosa e' un secondo aspetto che e' molto importante per la nozione di insieme, aspetto che viene evidenziato e richiesto proprio dall'uso che si fa di questa nozione in matematica.

Ecco un altro punto in matematica dove e' utile la nozione di insieme: le equazioni parametriche. Queste costituiscono un argomento che i ragazzi dei primi anni delle superiori affrontano con una certa difficolta'. Un esempio di equazione parametrica e': $ax=24$. E' un'equazione nella cui scrittura ci sono due lettere, una "x" e l'altra "a". Cosa devo intendere con questa scrittura? Cosa vuol dire risolvere un'equazione parametrica? Anzitutto, cosa vuol dire risolvere un'equazione in una variabile? Vuol dire trovare tutti quei numeri che messi al posto della variabile rendono l'equazione vera, soddisfano l'equazione, come si dice. Ma numeri da mettere al posto di chi? Di x o di a o di entrambe le lettere? Potrei dire di tutte e due, e allora e' un'equazione con due variabili. Il problema diviene: trovare le coppie ordinate di numeri uno da mettere al posto di a e l'altro da mettere al posto di x in modo che il loro prodotto sia 24. Questo e' un problema. Altra cosa e' pensare soltanto x come variabile e a come un certo numero fissato, quindi non e' piu' un'equazione, sono tante equazioni al cambiare di a: ecco le equazioni parametriche, sono tante equazioni una per ciascun valore attribuito al parametro a. Per precisare bene questa nozione si possono usare gli insiemi. Con la notazione insiemistica si riesce a distinguere facilmente tra l'insieme delle soluzioni dell'equazione in due variabili da una parte, e invece dall'altra l'insieme delle soluzioni di una equazione in una variabile che dipende da un parametro. Il primo e' l'insieme di tutte quelle coppie ordinate, chiamiamole pure (a,x), tali che $ax=24$, $\{(a,x): ax=24\}$. Altra cosa e' l'insieme delle soluzioni della equazione in una variabile, e si puo' scegliere a o x come variabile, per fissare le idee consideriamo x come variabile. In tal caso e' l'insieme di tutti gli x tali che ax=24, {x: ax=24}, ed e' una cosa totalmente diversa. Ma, notate che questo insieme dipende da a. E studiare un'equazione parametrica vuol dire studiare l'insieme delle soluzioni al variare di a: in effetti ci sono tanti insiemi di soluzioni, uno per ogni a che appartiene, ad esempio, ai numeri reali, { {x: ax=24}: a e' un numero reale}. Il primo e' un insieme di coppie ordinate, il secondo e' un insieme di insiemi, dipendenti da a, di soluzioni delle singole equazioni parametriche, equazioni nella sola variabile x. Vedete che con una opportuna notazione di insieme si riesce a chiarire bene la differenza tra equazione in due variabili ed equazione parametrica. Abbiamo cosi' visto un altro punto della matematica in cui e' opportuno avere una buona ed adeguata nozione di insieme. Anche in questo caso si nota che la nozione di insieme che serve e' ancora la nozione di una collezione che e' anche una cosa singola. Infatti, nella situazione appena vista, la collezione{x: ax=24} deve essere un'unica cosa essendo elemento di un altro insieme, precisamente dell'insieme { {x: ax=24}: a e' un numero reale}.

Voglio far notare che la prima difficolta' per i ragazzi e' forse quella di considerare una collezione come una sola cosa perche' e' una nozione nuova. I ragazzi non trovano nulla di strano nel pensare ad una collezione di cose, e subito si fanno l'idea che ci sono gli elementi e che ci sono le collezioni; ma rendersi conto che una collezione possa diventare elemento, possa essere considerata un elemento, questa e' una grande scoperta! Nel problema delle equazioni parametriche visto sopra abbiamo di fatto una collezione, quella delle soluzioni dell'equazione parametrica {x: ax=24}, che e' diventata un elemento della collezione { {x:ax=24}: a e' un numero reale} i cui elementi sono le varie collezioni di soluzioni al variare dell'equazione parametrica, cioe' al variare del parametro, cioe' dei valori da attribuire ad a. Rendersi conto che le collezioni possono diventare elementi , cose singole a cui applicare altre volte l'operazione di collezione, e' un passo non indifferente per i ragazzi.

Vediamo ora un esempio che porta ad un altro aspetto della nozione di insieme. Pensate al problema di trovare gli zeri di una funzione f continua che vada da meno infinito a piu' infinito. Siccome e' continua e va da meno infinito a piu' infinito dovra' tagliare l'asse delle x, e il suo valore sara' zero ad un certo punto: il problema consiste nel determinare un tale punto, cioe' determinare i valori della variabile x tali che f(x)=0. Da un certo punto di vista e' chiaro cosa stiamo intendendo: stiamo cercando di determinare i punti di intersezione tra la curva, che e' il grafico della funzione data, e l'asse delle x; e questo e' un certo insieme. Supponete ora che quella curva sia stata data esplicitamente, cioe' la curva e' il grafico di una funzione in cui si sia precisato esplicitamente ed esattamente come si fa a calcolare il valore della funzione, y, corrispondente ad un certo valore di x. Ma anche se e' detto come si calcola il valore della funzione in corrispondenza ad un certo valore della variabile indipendente, non e' per niente detto come si fa a trovare quando la funzione e' zero, cioe' per quale valore della variabile indipendente il valore della funzione e' zero. Non lo si sa, e si dimostra che, in generale, non lo si puo' neppure sapere nel senso che non c'e' alcun procedimento effettivo per poter determinare gli zeri di una generica funzione continua (c'e' un procedimento effettivo per la risoluzione del presente problema solo nei casi piu' favorevoli, quelli che poi si usano per fare gli esempi a scuola, quando attraverso dei calcoli algebrici si ottiene la soluzione, ma mediante i calcoli algebrici abbiamo la sicurezza di arrivare alla risoluzione solo nel caso di equazioni algebriche fino al terzo grado).

Cosa si vuol sottolineare con questo esempio? Stiamo qui considerando un qualcosa che in matematica e' opportuno ritenere un insieme, l'insieme delle ascisse delle intersezioni del grafico di quella funzione con l'asse x, ma questo insieme non e' determinabile in modo effettivo, decidibile. Ricordate che nel test iniziale si domandava se i ragazzi alti di una classe costituiscono un insieme? E' un problema di tipo analogo a questo che stiamo considerando ora: determinare i ragazzi alti presenta difficolta' simili alla determinazione degli zeri di una funzione. Pero' vogliamo che gli zeri di una funzione costituiscano un insieme, cioe' il concetto di insieme deve includere anche questo caso, altrimenti a che servono gli insiemi in matematica? Come determinare gli zeri e' un altro problema, ma ci sono. Cosi' anche i ragazzi alti non so come determinarli, ma ci sono: secondo un certo criterio di alto li trovero'. Qual'e' il criterio? Non lo so, da un punto di vista del concetto di insieme neppure mi interessa, ma secondo quel certo criterio si possono determinare gli alti, e c'e' il loro insieme. La matematica e' piena di esempi di situazioni in cui consideriamo un insieme anche senza aver nessun metodo per decidere quali sono i suoi elementi. Ecco un altro esempio, sempre su questa linea. Pensate all'insieme dei numeri naturali. Pensate poi alle sottocollezioni dei numeri naturali. Siamo abituati ad accettare le sottocollezioni dei numeri naturali come insiemi anche se non si possono descrivere uno per uno. Infatti, Cantor ha dimostrato che i sottinsiemi dell'insieme dei numeri naturali sono in numero non numerabile (e questa dimostrazione e' una pietra fondamentale dello sviluppo della teoria degli insiemi). Allora come si fa a descriverli uno per uno se le parole che si possono pronunciare in un certo tempo sono in numero finito, e, anche se ci si concede tutto il tempo che si vuole, si avranno al piu' un numero numerabile di descrizioni? Eppure nessuno di voi ha detto ci sono delle sottocollezioni dei numeri naturali che non sono insiemi. Di fatto le consideriamo come sottocollezioni che possono essere pensate come un'unica cosa, anche se sono troppe perche' ci sia per ciascuna una descrizione. Quindi emerge ancora il problema di dover avere una nozione di insieme che deve andar bene anche nei casi in cui non si riesca ad avere un processo effettivo per decidere e descrivere quali sono gli elementi che appartengono o no all'insieme. Ci sara', forse, una descrizione ideale, forse qualcuno da qualche parte sapra' dire quali elementi soddisfano una certa proprieta', ma noi effettivamente e praticamente non sappiamo che dire: dobbiamo accettare collezioni per le quali non ci sono criteri effettivi per determinare i loro elementi.

Questo conclude queste prime osservazioni che volevo presentare per intuire cosa la matematica richiede dalla teoria degli insiemi. Abbiamo visto certe caratteristiche che il concetto di insieme dovra' avere per essere utile allo sviluppo della matematica: essere collezione, diventare cosa unica, essere indipendente dalla descrizione degli elementi, essere anche indipendente dall'esistenza di un criterio effettivo per determinare se una certa cosa appartiene o meno all'insieme.

4. Altre esigenze.

Queste conclusioni riguardano la matematica, mentre se vogliamo considerare l'applicabilita' della nozione di insieme al mondo esterno c'e' dell'altro da osservare. Pensate agli esempi presenti anche nel test esaminato all'inizio. Un treno e' un insieme? E' forse l'insieme dei vagoni? Il treno e' una realta' ben concreta, non e' una collezione di vagoni: i vagoni devono essere messi assieme in modo opportuno per avere un treno. Un treno non e' l'azione mentale di pensare assieme vari elementi, non e' una collezione! Un altro esempio: un certo registratore e' un insieme? E' l'insieme dei suoi pezzi? Se si, allora mettiamo i pezzi del registratore in una scatoletta, mescoliamo un po' ed ecco il registratore! Un registratore e' si costituito dai suoi pezzi, ma messi assieme secondo dei criteri ben opportuni che ne fanno un registratore, che e' quell'oggetto, e non e' l'insieme dei pezzi. Il registratore non e' una collezione, e' un elemento a cui niente appartiene, neppure lui stesso (un elemento e' ben diverso dalla collezione cui appartiene quel solo elemento), ma, pur non avendo elementi, non e' la collezione vuota, perche' non e' il fissare la propria attenzione su niente. Altro esempio ancora: la bonta' e' un insieme? No, secondo il concetto di insieme che stiamo cercando di introdurre, perche' non e' una collezione: non solo non ha elementi, ma non e' neppure la collezione vuota, non e' il fissare la nostra attenzione su niente. Nel mondo a cui possiamo applicare la matematica, ci sono tante cose e tante nozioni che non sono insiemi, che non sono collezioni; perche' dobbiamo pensare che ogni cosa debba essere un insieme?

Anche se non abbiamo ancora precisato completamente la nozione di insieme, ma, per ora, stiamo solo cercando di coglierne alcune caratteristiche, che provengono da varie osservazione, che guideranno la scelta di un' adeguata nozione di insieme, tuttavia possiamo gia' affermare che, se vogliamo applicare la nozione di insieme anche alla realta' che ci circonda, si dovranno considerare elementi che non sono collezioni, e dunque neppure insiemi, anche se gli insiemi sono elementi. La difficolta' nel condividere questa affermazione forse viene dal fatto che, in molte presentazioni della teoria degli insiemi, ogni ente di cui parla la teoria e' un insieme. Ma perche' dovrebbe essere cosi'? L'usuale teoria degli insiemi che troviamo in varie presentazioni puo' facilmente essere ampliata, e noi l'amplieremo, considerando elementi che non sono collezioni (e quindi neppure insiemi): questi elementi vengono chiamati atomi.

Ci si puo' chiedere come mai le usuali presentazioni della teoria degli insiemi non prevedano gli atomi? Di fatto la matematica non si interessa tanto di chi sono intrinsecamente gli elementi, quanto del loro comportamento e delle relazioni tra di loro: dal punto di vista matematico e' equivalente il considerare un elemento nei suoi rapporti con l'ambiente in cui e' inserito, o il considerare il suo nome, o un insieme che si comporta come quell'elemento e che venga identificato con l'elemento stesso. D'altra parte e' possibile associare biettivamente ad ogni atomo un insieme che si comporti esattamente come l'atomo anche nel costituire altre collezioni ed insiemi. Ma non credo che sia didatticamente opportuno presentare ai ragazzi fin dall'inizio questa situazione in cui ad ogni cosa che c'e' nel mondo facciamo corrispondere un insieme, e per parlare di quella cosa si deve parlare dell'insieme corrispondente, e per ottenere la collezione di alcune cose si deve considerare la collezione degli insiemi corrispondenti: perche' questa forzatura? Introduciamo pure tranquillamente gli atomi, ed eventualmente consideriamo le collezioni di atomi. Cosi' si potrebbe benissimo considerare la collezione di tutti i vagoni delle Ferrovie dello Stato, ed e' un'opportuna collezione di atomi, di cose singole, che non sono insiemi. Alla collezione delle virtu' apparterra' anche la bonta', ma questa non e' un insieme, mentre la collezione delle virtu' e' una collezione, e' il pensare ad alcune entita', e' fissare al mia attenzione su alcune entita'.

Nel lavoro svolto a Padova che ho ripetutamente citato, nell' introdurre la nozione di insieme, da un punto di vista didattico si e' ritenuto opportuno introdurre anche questo aspetto: la presenza di atomi, di cose che non sono collezioni. Quindi avremo a) cose che non sono collezioni e che chiamiamo atomi, b) collezioni, e c) collezioni che sono anche cose singole e che chiamiamo insiemi.

5. I diagrammi di Venn.

Abbiamo gia' notato che quando il concetto di collezione viene inizialmente presentato a dei ragazzi, per essi la situazione e' estremamente semplice: da una parte ci sono gli elementi, le cose, gli atomi, e dall'altra le collezioni di atomi e queste non diventano elementi. Se si accetta questa impostazione, il tutto e' effettivamente semplice. Di piu', nelle scuole elementari, e, direi, fino alle scuole medie avanzate, si rimane solo su questo piano: cosi' la nozione di insieme non e' toccata ed e' inutile introdurla. In questo contesto puo' essere comodo rappresentare le collezioni mediante diagrammi di Venn, ma mi pare che la convenienza di questa rappresentazione, gia' problematica in questo contesto, non possa estendersi ad una situazione in cui vengono usati insiemi nella pienezza del significato di questo termine.

Per meglio motivare quanto ho appena affermato, vorrei presentare una situazione da cui risulta l'importanza della nozione di insieme, cosi' come ho cercato di introdurla, nella sua pienezza di significato. Consideriamo una squadra sportiva ed i suoi giocatori. Certamente i giocatori vanno considerati come atomi, e la squadra come collezione: in effetti non e' altro che il considerare assieme i suoi giocatori. Di piu', la squadra va considerata come insieme, come cosa singola. In effetti siamo abituati a considerarla soggetto di affermazioni (ad esempio diciamo "la squadra ha vinto") ed anche come elemento nel considerare altre collezioni, ad esempio la collezione delle squadre partecipanti ad un certo torneo. La situazione che ho cercato di descrivere si riassume dicendo che stiamo considerando dei giocatori, delle squadre i cui elementi sono giocatori, e la collezione delle squadre che partecipano ad un certo torneo. E' possibile rappresentare questa situazione con un diagramma di Venn? Se rappresentiamo la squadra con un cerchio, diciamolo S, come si fa per le collezioni, come indicare il torneo? Con un cerchio T che contiene il primo? Ma questa notazione (fig. 1) indica che la collezione indicata da S e' una sottocollezione della collezione indicata da T, e non un elemento di questa, mentre la squadra e' un elemento del torneo. Allora indichiamo (fig. 2) con un cerchio T il torneo e la squadra con un punto S all'interno di T: cio' indica che la squadra e' un elemento del torneo. A questo punto come rappresentare i giocatori?

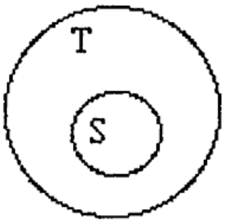


fig. 1

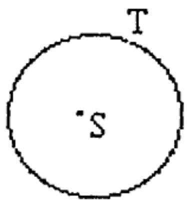


fig. 2

I diagrammi di Venn non sono fatti per rappresentare questi problemi, e, d'altra parte, questi sono i problemi in cui il concetto di insieme entra in senso significativo: qui c'e' davvero il concetto di insieme, la collezione che e' diventata uno, la squadra che e' diventata una cosa. I diagrammi di Venn vanno bene per le collezioni, detto altrimenti, quando si possono usare i diagrammi di Venn si sa che non si sta usando il concetto di insieme, ma solo quello di collezione. Alle scuole elementari non credo che si sia mai usato il concetto di insieme, anche se e' stata usata questa parola, di fatto si usa soltanto il concetto di collezione.

Nel diagramma di Venn il cerchietto che si usa e' una cosa folcloristica. Questi cerchietti sono un modo grafico per dire: limitiamo la nostra attenzione a queste cose, cioe' consideriamo la collezione cui appartengono elementi racchiusi nel cerchio. Notate poi che con i diagrammi di Venn ci sono dei problemi anche dal punto di vista di considerare soltanto collezioni, infatti dalla rappresentazione non e' possibile ricavare informazioni ad esempio sulla finitezza o infinitezza della stessa collezione. A volte, in una collezione rappresentata con un diagramma di Venn si indicano alcuni suoi elementi: sono tutti o sono soltanto alcuni della collezione che si vuole indicare? In certi casi si indicano tutti gli elementi, in tanti altri casi non si indicano tutti; allora come decidere in quale caso ci si trova? Se si sceglie la collezione dei numeri naturali, come indicarla mediante un diagramma di Venn? Dopo queste osservazioni ci accorgiamo che i diagrammi di Venn, in particolari situazioni, possono essere un comodo ausilio rappresentativo quando, per altra via, si sia chiarito cio' di cui si vuole parlare.

6. La proposta.

Forse e' opportuno ribadire che lo scopo di questa chiaccherata e' cercare di cogliere un'opportuna idea di insieme. Fin dall'inizio ho sostenuto che, dal punto di vista scientifico, non c'e' un'unico concetto di insieme, percio' ho cercato di cogliere quali sono le esigenze di didattica della matematica che possono suggerire un certo concetto di insieme. Se uno ha una buona preparazione matematica si trova di gran lunga piu' a suo agio nel seguire le motivazione addotte, pero' almeno alcune di queste toccano chiunque, e io spero che, dalle osservazioni fatte, possa scaturire almeno un'idea dei problemi sottostanti questo rapporto tra matematica e teoria degli insiemi e della necessita' di studiare piu' approfonditamente su altre fonti quanto io qui non posso ricordare per ovvi motivi di ampiezza del presente intervento. D'altra parte mi trovo in difficolta' ad indicare dei libri dove sono sviluppati questi concetti: ci sono dei libri scientifici sulla teoria degli insiemi ad alto livello, ma personalmente non conosco nessun libro che sia diffuso nelle scuole in cui la teoria degli insiemi non sia presentata con gravi e sostanziali lacune dal punto di vista che sto cercando di illustrare.

A questo punto vorrei presentare cosa il gruppo di lavoro di Padova, dopo tutte queste analisi, ha pensato di proporre come opportuno concetto di insieme.

Per chiarire la nozione di insieme che si vuole proporre, si e' trovato conveniente partire da una nozione che pare ancora piu' semplice: la nozione di collezione.

Per collezione intendiamo l'atto mentale di considerare alcune cose, alcuni elementi. E' un'azione mentale, non c'e' niente di concreto nel concetto di collezione. Quella data non e' una definizione, cioe' un dare significato ad una parola sfruttando il significato noto delle parole del definiente, ma un cercare di dare significato alla parola collezione direttamente legandola all'esperienza di considerare alcune cose. Di fatto prendiamo come primitivo, non definito, il concetto di collezione, proprio perche' non tutto puo' essere definito in termini di nozioni introdotte precedentemente, se non si vuole arrivare ad un regresso all' infinito che non fonderebbe alcunche'.

Per insieme intenderemo una collezione che puo' essere considerata come cosa singola, come unita', come elemento. Ad esempio, di fatto la squadra sportiva e' considerata come una cosa singola. E' possibile, e' corretto considerare una certa collezione come cosa singola? Questo e' un problema che tra poco affronteremo. Pero' fin d'ora vorrei sottolineare la distinzione tra questi due momenti del concetto di insieme: da una parte essere collezione, dall'altra essere elemento. Dunque un insieme e' una collezione che pensiamo come cosa singola. Chiamiamo atomi le cose singole che non sono collezioni.

7. La difficolta'.

Questa distinzione tra i due aspetti del concetto di insieme potrebbe lasciare un po' perplessi in quanto ridondante, se uno ritenesse che tutte le collezioni possono essere pensate come cose singole. Infatti, se si potesse pensare ad ogni collezione come cosa singola, che necessita' ci sarebbe di distinguere tra collezioni ed insiemi: tutte le collezioni sarebbero insiemi!

Per evitare questa obiezione, diventa allora importante far capire anche ai ragazzi che non e' vero che tutte le collezioni possono essere considerate come cosa singola. Qui cominciano alcune difficolta' perche' il motivo per cui certe collezioni non possono essere considerate come cosa singola sta nel fatto che, se cosi' facessimo, arriveremmo a contraddizioni: tutta la nostra costruzione sarebbe contraddittoria.

Come far capire a degli studenti cosa vuol dire "arriveremmo a contraddizioni"? D'altra parte dobbiamo riuscire a far capire cio' prima di cercare di spiegare perche' certe collezioni non possono essere insiemi. Nei vari test proposti dal gruppo di Padova, si e' cercato anche di capire cosa vuol dire per i ragazzi contraddizione. Cosi' si e' chiesto: affermare di andare da Milano a Roma in dieci secondi, e' una contraddizione? Eppure i ragazzi spesso pensano di si. Una cosa e' l'impossibile di fatto oggi; altra cosa e' la contraddizione. Topolino e' nella nostra fantasia, e' possibile, anche se assolutamente non e' reale. Il topo che parla di fatto non c'e', ma non e' contraddittorio assumerne l'esistenza. Si ha una contraddizione quando si afferma sia una proprieta' che la sua negazione in una data situazione. E' cio' che a volte viene chiamata contraddizione in termini. Nemmeno nella piu' sfrenata fantasia puo' esserci una situazione in cui valgano simultaneamente una proprieta' e la sua negazione.

Una volta spiegato cosa si intende per contraddizione, si puo' passare a far vedere che ci sono delle collezioni che non sono insiemi perche', se lo fossero, da tutta la costruzione proposta delle collezioni e degli insiemi si arriverebbe ad una contraddizione.

Questa contraddizione e' stata scoperta da Russell, quando ha criticato la nozione di insieme di Cantor. Cantor aveva commesso proprio questo errore: aveva pensato che ogni collezione fosse un insieme. Russell ha fatto vedere che Cantor aveva sbagliato. L'argomento di Russell pero', anche se semplice, e' un po' delicato: definisce una certa particolare collezione e fa vedere che non puo' essere un insieme in modo abbastanza sottile. Allora nel gruppo di Padova si e' cercato di trovare un'altra contraddizione riconoscibile mediante una argomentazione piu' semplice. In qualche modo si e' pensato di averla trovata sfruttando pero' una particolare nozione di collezione che e' stata ritenuta opportuna dal punto di vista didattico. Non e' sbagliata, e' una delle possibili nozioni di collezione, quella generalmente adottata, anche se non e' necessario scegliere esattamente questa nozione in molti sviluppi della matematica.

Questa nozione puo' essere meglio precisata accettando questa ulteriore caratteristica: per conoscere una collezione si devono in qualche modo avere a disposizione i suoi elementi. Detto altrimenti, non si puo' dire di avere una collezione se non si hanno i suoi elementi; prima in qualche modo si devono conoscere i suoi elementi. Questo conoscere va inteso nel senso piu' generale possibile, non e' la richiesta di riuscire a determinare effettivamente gli elementi: abbiamo criticato prima il determinismo rigido, per cui non vogliamo accettare questa posizione. Anche la parola prima non va intesa in senso temporale, ma come una precedenza conoscitiva. Quindi, ribadendo l'ulteriore caratteristica, prima si dovra' sapere in qualche modo chi sono gli elementi, e poi si avra' la collezione di quegli elementi. Chiameremo fondatezza questa caratteristica del concetto di collezione.

Accettato questo punto di vista per il concetto di collezione, e di conseguenza anche per il concetto di insieme, osserviamo che nessun insieme puo' appartenere a se' stesso perche', altrimenti (attenzione qui c'e' l'ulteriore difficolta' del ragionamento per assurdo), l'elemento dell'insieme, che e' l'insieme stesso, diviene conosciuto soltanto quando e' conosciuta la collezione, e non prima: non c'e' quella priorita' conoscitiva che era stata richiesta.

Consideriamo ora la collezione universale, cioe' la collezione di tutti gli elementi, la collezione di tutto. Attenzione, in base a quanto gia' convenuto sulla nozione di collezione (fissare l'attenzione su alcuni elementi, anche nessuno, ma anche tutti), la collezione universale puo' non essere "la collezione delle collezioni" che non e' detto che sia una collezione, perche' nella collezione di tutto vanno considerati esattamente tutti gli <u>elementi</u>: se una collezione non e' elemento, cioe' se non e' insieme, non appartiene alla collezione di tutto, non e' una cosa. Quando si parla di tutto si parla di tutte le cose, non anche delle nozioni che non sono elementi.

Se l'universo fosse (attenzione qui c'e' ancora la difficolta' del ragionamento per assurdo) un insieme, oltre che collezione sarebbe anche una cosa sola, e dunque l'universo, essendo una cosa, apparterrebbe all'universo. Ma questo contraddice quello che abbiamo appena visto come conseguenza della fondatezza del concetto di collezione, cioe' che per determinare una collezione prima si devono conoscere i suoi elementi: infatti come si puo' conoscere prima l'elemento che e' la collezione stessa? Ecco la contraddizione: si e' supposto che l'universo fosse non solo una collezione, la collezione universale, la collezione di tutto, ma che l'universo fosse un insieme, ma allora l'universo appartiene all'universo; il che e' contradditorio perche' nessun insieme appartiene a se' stesso, se accettiamo la fondatezza della nozione di collezione. Se ammettiamo che la collezione universale sia un insieme, giungiamo ad una contraddizione.

Se non ammettiamo che la collezione universale sia un insieme, allora non c'e' problema. In tal caso la collezione universale e' una collezione che non e' cosa singola, quindi non ha neppure senso domandarsi se appartiene o non appartiene all'universo, perche' non e' un elemento.

Russell nel suo esempio fa qualcosa di appena appena piu' sofisticato che non richiede che gli elementi debbano essere conosciuti prima della collezione, e, dunque, porta alla conclusione anche quando si usa un concetto di insieme piu' generale di quello ultimamente precisato. Russell, in effetti, considera la collezione, chiamiamola R in onore di Russell, i cui elementi sono esattamente tutti quelli che non appartengono a se' stessi, $R=\{x: x \notin x\}$.Questa e' una collezione. Vediamo di indagare chi sono gli elementi che non appartengono a se' stessi. Ad esempio, il treno e' un elemento, e' un atomo, ma come atomo niente gli appartiene, eventualmente lui apparterra' ad un insieme, magari quello il cui unico elemento e' il treno, ma sicuramente non appartiene al treno. Il treno appartiene dunque alla collezione di Russell. Sono tantissimi gli elementi che non appartengono a se' stessi. Se poi accettiamo la fondatezza della nozione di collezione di cui dicevamo prima, nessun insieme appartiene a se' stesso. Cosi' sembrerebbe che quasi tutte le cose dovrebbero appartenere alla collezione di Russell. C'e', invece, qualche elemento che non appartiene all'insieme di Russell? La collezione universale, se fosse un insieme, non ci starebbe: abbiamo visto prima che se U e' un insieme allora U appartiene a U, $U \in U$. U sicuramente non e' nella collezione di Russell, anche se pensiamo che sia un insieme. Il fatto e' che, non volendo essere legati alla fondatezza del concetto di collezione, ora non sappiamo se U e' un insieme o meno, e la sola cosa che possiamo concludere e' che forse ci sono delle cose che non appartengono alla collezione di Russell: se U e' un insieme, allora non vi appartiene. La collezione di Russell sicuramente e' una collezione, forse il tutto, non lo so, ma e' una collezione. Se sosteniamo l'idea che ogni collezione sia un insieme, ripiombiamo nei guai. Ma anche senza sostenere tanto, supponiamo che questa collezione di Russell, R, sia un insieme. Lo supponiamo, non affermiamo che e' vero. Vediamo cosa ne segue. Se R e' un insieme, posso domandarmi se R appartiene a R, $R \in R$. La domanda e' legittima, poiche' supponiamo che R sia un insieme, un elemento e posso domandarmi se un elemento appartiene ad una certa collezione. Di fatto, appartiene o non appartiene? Andiamo a vedere. Ci sono due risposte possibili: si o no. Proviamo a vedere cosa succede se diciamo si. Cosa vuol dire che R appartiene ad R, $R \in R$? Vuol dire R e' elemento di questa collezione $\{x: x \notin x\}$, cioe' le cose che appartengono alla collezione R hanno questa caratteristica: di non appartenere a se' stesse. Quindi se R appartiene a quella collezione allora R non appartiene ad R perche' soddisfa la proprieta' di non appartenere a se' stesso che caratterizza la collezione $\{x: x \notin x\}$. Ma questo non puo' essere, cioe' non puo' essere che se $R \in R$ allora $R \notin R$. Cosi' la risposta alla nostra domanda, non potendo essere si, dovra' essere no. Vediamo cosa succede se la risposta e' no. In questo caso stiamo dicendo che R non appartiene a R, $R \notin R$. Cioe' R non appartiene alla collezione $\{x: x \notin x\}$. E chi non appartiene a questa collezione? Gli elementi che non soddisfano la proprieta' di non appartenere a se' stessi che caratterizza questa collezione. Cosa vuol dire che un elemento non soddisfa questa proprieta'? Significa che e' un elemento per il quale non e' vero che non appartenga a se' stesso, cioe' un elemento che appartiene a se' stesso. Allora R appartiene a R, $R \in R$. E ancora siamo giunti ad una contraddizione, poiche' supponendo che R non appartenga ad R abbiamo concluso che allora R appartiene ad R. E quindi sia in un caso che nell'altro siamo arrivati a delle assurdita': non vanno bene ne' la risposta si ne' la risposta no. Impossibile! Ma siamo giunti a questa impossibilita' supponendo che R sia un insieme, dunque cio' non puo' essere: R e' una collezione che non e' un insieme,un elemento, una cosa singola.

Forse questa dimostrazione e' un po' piu' delicata della dimostrazione precedente perche' e' un po' piu' involuta. Ecco perche' si e' preferito non presentare questo esempio di collezione che non e' un insieme, ma presentare l'altro, pur perdendo il vantaggio teorico che la collezione di Russell non richiede la fondatezza della nozione di collezione (anche se questa caratteristica e' del tutto naturale), ma va bene comunque, sia che la conoscenza della collezione sia precedente, contemporanea o successiva alla conoscenza dei suoi elementi.

Indipendentemente dalla scelta di una presentazione o dell'altra, abbiamo ottenuto esempi di collezioni, U e R, che non possono essere pensate come cosa singola, a meno di non rendere contraddittorio tutto quello che abbiamo fatto. Se vogliamo salvare i nostri concetti di collezione e di insieme dobbiamo accettare che ci siano delle collezioni che non sono delle cose singole, e diventa importante la distinzione tra collezioni e insiemi; ci sono delle collezioni che non sono insiemi, meglio, che non possono essere insiemi.

8. Quali collezioni sono insiemi?

Dal momento che non tutte le collezioni sono insiemi, sorge naturalmente il problema di sapere quali collezioni possono essere insiemi e quali no.

C'e' una risposta, direi, di auspicio, di opportunita'. In un certo senso, e' comodo avere a disposizione tante cose nel mondo in cui si lavora: si puo' pensare che piu' sono gli elementi dell'universo, piu' possono essere le eventuali soluzioni a problemi. Percio' va bene che una certa collezione sia un elemento di cui disporre, e si cerchera' di averne nel massimo numero, cioe' tutte quelle che se considerate come cose singole non portano a contraddizioni: cosi' avro' un mondo molto ricco, un mondo in cui ci sono come oggetti tante e tante collezioni. Piu' ce ne sono, meglio e'! Percio' si accetta la scelta arbitraria, ma, si spera, opportuna, di considerare come elementi tutte quelle collezioni che si possono considerare tali senza pero' che cio' porti a contraddizioni.

Questo sara' pure un buon criterio, pero', sicuramente, e' poco pratico. Infatti, come si puo' decidere se una certa collezione porta a contraddizione una volta che la pensi come cosa singola? E, di conseguenza, come si fa a decidere se una certa collezione e' o non e' un insieme? Se anche si sa che l'assumere come insieme una certa collezione porta a contraddizione, cosa si puo' dire per un'altra? Non si riesce a trovare un pratico metodo per sapere quando una collezione e' un insieme oppure no.

Di fronte a questa difficolta' si possono ridimensionare un po' le ambizioni, e pensare di individuare un metodo che fornisca una parte delle collezioni che possono essere considerate insiemi, cioe' che non e' contraddittorio pensarle come cose singole, almeno quelle che occorrono nell'usuale sviluppo della teoria degli insiemi, generalmente caratterizzate dal poter essere indicate mediante un nome.

Ad esempio, si pensi alla squadra di calcio. E' una collezione, ma si puo' concordare di pensarla come cosa singola? Di fatto lo facciamo. E porta a contraddizioni il pensare la squadra di calcio come cosa singola? Sembrerebbe difficile: di fatto lo facciamo e non abbiamo mai trovato contraddizioni. Non pare che considerare la squadra di calcio come cosa singola porti a contraddizioni. Notate, ho detto non pare che, non ho detto sono sicuro che non. E accetto "non pare che", perche' si dimostra, dopo un lungo corso di logica e di teoria degli insiemi, che la certezza in questo senso non e' raggiungibile. Allora ci si limita a dire non pare che porti a contraddizione. E fintantoche' non pare che porti a contraddizione il supporre che la collezione la squadra di calcio sia un insieme, decido di prendere questa collezione come insieme. Cos'ha di particolare la squadra di calcio? E' una collezione finita, e le cose finite mi pare di poterle controllare, mi pare quasi di poter costruire una situazione in cui ci siano questi elementi che sono le collezioni finite, e, poiche' le affermazioni di un insieme contraddittorio non possono mai essere tutte vere in una situazione concreta, vuol dire che considerare le collezioni finite come cose singole non dovrebbe portare a contraddizione.

E quindi un primo assioma della teoria degli insiemi, cioe' un'affermazione su quali sono le collezioni che consideriamo insiemi, e' questo: le collezioni finite sono insiemi.
In effetti questa affermazione non si trova nei libri, ma viene affermato che la collezione vuota e' un insieme, che la collezione coppia di due insiemi e' un insieme e che la collezione unione su di un insieme e' un insieme, perche' attraverso l'insieme vuoto, la coppia e l'unione si riescono a costruire tutti gli insiemi finiti: sono affermazioni che implicano che le collezioni finite sono insiemi.
Consideriamo piu' attentamente l'unione. Si afferma che date due collezioni che sono insiemi, cioe' tali che sostanzialmente si possono controllare le loro conseguenze, cioe' collezioni per le quali ci si rende conto che possono essere considerate come cose singole senza portare a contraddizioni, allora e' un insieme anche la collezione unione di quelle date. Non si capisce come possa saltar fuori una contraddizione dall'assumere che l'unione di due collezioni sia un insieme quando singolarmente ciascuna collezione e' un insieme, cioe' una collezione pensabile come cosa unica; e quindi si accetta che l'unione di due insiemi e' un insieme.
E l'unione di tre, di quattro,..., in genere di un numero finito di insiemi? Non si vede tanta differenza dal caso dell'unione di due insiemi, d'altra parte l'unione di un numero finito di insiemi non e' che la ripetizione un numero finito di volte dell'unione tra due insiemi, e quindi si preserva, nelle varie applicazioni, la proprieta' di essere un insieme, e anche questa collezione sara' un insieme.
E l'unione di un insieme di insiemi? Se c' dato un insieme di insiemi, esso e' qualcosa di controllabile, e anche i singoli elementi sono controllabili; cosi' anche l'unione dovra' essere ancora controllabile. Pertanto e' naturale accettare che anche l'unione su un insieme di insiemi sia un insieme!
Supponiamo ora che sia data una certa collezione che e' un insieme, cioe' sia possibile sapere che questa assunzione non porta a contraddizione, e si selezionino alcuni degli elementi della collezione, magari quelli che soddisfano una certa proprieta', ottenendo quella che viene chiamata una sottocollezione. Ebbene, anche questa sara' un insieme! Infatti, da dove puo' originarsi una contraddizione? In effetti non so, ne' posso sapere, se si potra' ottenere una contraddizione, ma non capisco come possa scaturire una contraddizione dal pensare come cosa singola la collezione

di alcuni elementi di una collezione che gia' puo' essere considerata come elemento senza che cio' porti a contraddizioni.

E che dire della collezione di tutte le sottocollezioni di un insieme? Ciascuna delle sottocollezioni e' un insieme per quanto appena convenuto (e quindi ha senso parlare della loro collezione), ma il considerare la loro collezione come un elemento portera' a contraddizione? Anche qui non si puo' dire, ma non si capisce come si potrebbe arrivare ad una contraddizione supponendo che la collezione dei sottinsiemi di un insieme sia un insieme. Pertanto decidiamo di considerare insieme anche la collezione dei sottinsiemi di un insieme.

E questi sono i primi assiomi della teoria degli insiemi, detti informalmente.

Si noti che tutte le operazioni su collezioni considerate nell'enunciare questi assiomi fanno passare da insiemi finiti a insiemi finiti, e quindi sarebbero conseguenze della prima assunzione sulle collezioni finite, ma noi abbiamo osato impegnarci sulle affermazioni contenute negli assiomi anche quando non si applichino a collezioni finite.

Quelli finora elencati sono alcuni degli assiomi, ma ce n'e' un altro che a me lascia enormi perplessita'. Ed e' questo. Prendiamo la collezione dei numeri naturali, ciascuno e' finito, ma non la loro collezione. Questa collezione e' un insieme? Pensarla come cosa unica porta a contraddizione? Questa volta non ho considerazioni da fare ne a favore ne' contro una qualsiasi risposta a questa domanda. Fate attenzione a come vi propongo di risolvere questo interrogativo: siccome la matematica ha bisogno di collezioni di numeri naturali per costruire i numeri reali e ha bisogno che queste collezioni siano cose singole, allora, proprio per le esigenze della matematica, si decide gratuitamente che la collezione dei numeri naturali sia un insieme, e, sottolineo, questa decisione e' completamente gratuita, fa comodo cosi', non c'e' nessuna giustificazione per questa scelta se non che e' comoda. Nessuno ha dimostrato che questo porta a contraddizione, e finche' qualcuno non dimostrera' che questa assunzione porta a contraddizione, sta bene accettarla.

9. Conclusione.

Questa e' la teoria degli insiemi, originata da Cantor, in cui si svolge la matematica oggi. E' una scelta gratuita, ma opportuna.

Si possono ipotizzare anche altre scelte di assiomi. Se uno dimostra che con una nuova scelta si riesce a sviluppare la matematica bene e si riescono a fare comodamente le cose che ci interessano (ce ne vuole di lavoro, sia ben inteso; e non e' che si faccia una scelta per capriccio), quella scelta va ancora bene. Vi posso dire che, personalmente, sto cercando di costruire una matematica in cui si nega che la collezione dei numeri naturali sia un insieme, perche' ritengo che questa assunzione non sia opportuna. Gli assiomi sono scelte opportune, in qualche modo, non sono ne' veri ne' falsi.

Attraverso la scelta di assiomi sono cosi' giunto a presentarvi, almeno parzialmente, una nozione di insieme, anche con questa sua caratteristica di non definitivita', ma di scelta, si spera, opportuna. Penso che altrettanto debba essere fatto, onestamente, nel trasmettere agli studenti questa nozione.

Riassumendo, la nozione di collezione e' anzitutto una nozione primitiva, cioe' non definibile in termini di altre nozioni. Infatti se si cercasse di dare alla parola collezione un significato attraverso il significato di altre parole di cui conosco gia' il significato, quali parole usare? La nozione di collezione e' cosi semplice, elementare, e' la prima da cui partire, e allora come posso spiegarla con cose ancora piu' semplici? Definirla per mezzo di nozioni definite mediante la nozione di collezione sarebbe un circolo vizioso che non vogliamo. Accettata la nozione di collezione come primitiva, si dovra' cercare di comunicare il significato della parola collezione, magari attraverso l'esperienza, o attraverso l'astrazione da certe esperienze. Nel nostro caso l'esperienza e' quella di fissare la propria attenzione su alcuné cose, ed e' un'esperienza che tutti abbiamo. Il fissare la propria attenzione su alcune cósa ci porta a cogliere il concetto di collezione. Caratteristica fondamentale di questo concetto e', come abbiamo visto, l'estensionalita' (una collezione e' individuata dai suoi elementi), e, abbiamo aggiunto, la fondatezza (per conoscere una collezione vanno prima conosciuti i suoi elementi). Alcune collezioni forse possono essere pensate, e di fatto vengono considerate, come cose singole, queste vengono chiamate insiemi. Si e' visto che non tutte le collezioni possono essere considerate cose singole, e, di conseguenza, ci si domanda quali si e quali no. E, avendo capito che non si puo' avere un criterio generalissimo che determini le collezioni che sono insiemi, si assume, per scelta gratuita, ma, si spera, opportuna, che almeno certe collezioni vadano considerate come cose singole, e questo puo' anche essere precisato attraverso certi processi, cioe' affermando che sono insiemi certe collezioni ottenute nei modi prescritti da collezioni che gia' sappiamo di poter considerare come insiemi. Cosi' accettiamo come insiemi le collezioni finite, la collezione unione di un insieme di insiemi, una sottocollezione di insieme, la collezione dei sottinsiemi di un insieme, la collezione dei numeri naturali.

Queste scelte non determinano completamente la nozione di insieme, nel senso che non permettono di precisare quali sono tutte le affermazioni che sono vere riguardo al concetto di insieme che vogliamo proporre. Per essere piu' precisi si possono aggiungere anche altri assiomi (anche cosi' facendo in modo effettivo non si arrivera' mai a determinare completamente la nozione di insieme). E allora la scelta su dove fermarsi dipende dalla sofisticazione a cui uno vuole arrivare. Si puo' aggiungere l'assioma della scelta, ed anche l'ipotesi del continuo (li nomino solo senza neppure dire cosa significano), che servono per decidere se certe collezioni particolari sono o non sono insiemi. Quando serviranno si introdurranno, e si vedra' di farlo nel modo didatticamente piu' chiaro ed opportuno possibile.

Avendo cosi' completato la presentazione (necessariamente parziale) dei concetti di collezione e di insieme che intendevo svolgere, lasciatemi concludere rispondendo ad una possibile perplessita' di chi ha pazientemente seguito fino a questo punto, perplessita' che puo' essere cosi' formulata: nei testi scolastici non si trova mai la distinzione tra collezione ed insieme, perche' qui e' stata considerata, e a che serve la nozione di collezione se poi in matematica si usa solo quella di insieme?

La motivazione e' puramente didattica. Nella nozione di insieme sono effettivamente presenti i due momenti di collezione e di elemento. E' difficile far cogliere entrambi nel loro giusto valore in una presentazione unitaria del solo concetto di insieme; e se non vengono colti bene entrambi gli aspetti non puo' essere ben chiaro il ruolo e il significato degli assiomi introdotti per precisare la nozione di insieme. Ancora, in questo modo emerge abbastanza chiaramente il problema di considerare collezioni proprie, troppo spesso trascurato nello sviluppo della matematica che troppo disinvoltamente vede in esse solo casi patologici che normalmente non si presentano. Infine, con questa presentazione si ha l'opportunita' di far rilevare un certo punto di vista sulla matematica, forse non molto diffuso, ma, direi, piu' accettabile di altri in base alle odierne conoscenze di matematica, inclusa la logica matematica. Secondo questo punto di vista la matematica viene pensata come una organizzazione opportunamente scelta di alcune nozioni fondamentali, a partire dalle nozioni di collezione, di insieme, di numero, si spazio, per poi proseguire con tutte le altre nozioni studiate negli sviluppi sempre in corso.

INTERAZIONE TRA RAPPRESENTAZIONI E LINGUAGGI IN MATEMATICA - ASPETTI DIDATTICI (*)

ALBA IACOMELLA (**)

INTRODUZIONE

Si rispetta la presenza culturale e formativa della matematica nella scuola, se si fa cogliere la sua forza, in corrispondenza del livello scolastico degli alunni, dalla comprensione di ció che è *"dietro"* e *"dentro"* lo sforzo di interpretazione e di costruzione del suo pensiero.

L'esperienza di tanti insegnanti e le ricerche sul campo evidenziano che la fonte di molte difficoltá di comprensione del messaggio risiedono proprio nei codici linguistici e rappresentativi (naturali e matematici) che si presentano diversi e talvolta dissonanti.

L'insegnante di matematica fa molto uso di *rappresentazioni*, forse non sempre con la dovuta attenzione agli aspetti epistemologici che entrano in gioco nell'interazione tra esse, il linguaggio naturale ed i linguaggi dei vari rami della Matematica (l'algebrico, il geometrico, l'insiemistico, il logico,...). E', questo, un argomento abbastanza ampio e diversificato. Sono connesse complesse questioni (logico - linguistiche, teoriche, applicative, didattiche, storiche culturali), senza dimenticare gli aspetti percettivi e psicologici legati alle cosiddette rappresentazioni esterne (disegni, tabelle, frecce, schemi, ...).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Progetto Pluriennale di Ricerca su "Collaborazione tra Universitá e Scuola Secondaria Superiore" e nell'ambito delle attivitá del Nucleo di Ricerca su "Ricerca di Matematica ed Informatica per la Didattica" (Progetto Nazionale MURST 40%) presso il Dipartimento di Matematica dell'Universitá di Lecce.

(**) P.zza A. Moro, n. 18, - 73024 - Maglie (Le).

I nuovi programmi di matematica della scuola italiana, a partire dalla elementare, sottolineano l'integrazione epistemologica fra i vari temi come *campi di problemi* e lasciano individuarne un altro cui sarei tentata di dare anche un nome: *"Interazione tra rappresentazioni e linguaggi in matematica"*. Penso ad un campo di problemi capace di contribuire ad un apprendimento critico della matematica con particolare attenzione agli aspetti sintattici e semantici presenti da sempre nella matematica. Penso ad un tronco culturale che recupera unitá intrinseca al sapere scientifico rispettando la specificitá dei suoi rami. Ció è in accordo con i suggerimenti metodologici di tutti i programmi della scuola italiana.

E' mio intendimento muovermi in una tale direzione, sollevando solo spunti critici durante la risoluzione di tre semplici problemi. L'intenzione è di cogliere spunti epistemologici significativi nell'interazione tra rappresentazione e linguaggi, al di lá della particolare situazione proposta. Penso opportuno che nella didattica si debbano cogliere spunti, ovviamente non esaustivi, data la complessitá teorica delle questioni in gioco.
"Giova riflettere su esempi, e a modificarli o costruirsene di nuovi, e riuscire così sempre meglio a capire e scoprire ció che occorre saper vedere per dominare un problema" ([4], p. 1).
I problemi "L'albero di Natale" e "I cuccioli" che presenteró sono stati oggetto di sperimentazione in una quinta classe della Scuola Elementare di Muro Leccese, coinvolta nella mia esperienza di ricerca - sperimentazione nell'a. sc. 1990/91 conclusasi con il Convegno di studi su "La ricerca comincia con i problemi" promosso dal Provveditorato agli Studi di Lecce (Maglie, 22 Giugno 1991) [14]. Da tale attivitá (con problemi diversi in sei Scuole elementari della provincia di Lecce), traggo spunto in questo mio scritto, confortata anche da un confronto (sugli stessi problemi sopra nominati), vissuta coi docenti di Scienze della Scuola Media Giovanni XXIII di Galatina (Le). Il terzo problema "Euclide" trova le radici nella mia esperienza didattica presso le classi sperimentali del Liceo Ginnasio "F. Capece" di Maglie (Le).

PROBLEMA "L'albero di Natale" (1)

"Nel periodo di Natale molti alberi sono decorati con lampadine. Un albero è decorato con lampadine rosse, bianche, gialle e verdi. Dieci sono rosse e altrettante sono bianche; le verdi sono il doppio delle rosse e le gialle sono tre meno delle rosse. Sono non meno numerose le lampadine bianche o quelle gialle?"

Il testo offre diverse informazioni. Fra esse "l'attenzione della matematica è quasi l'attenzione del notaio che registra come stanno le cose..." [7]. L'itinerario didattico vuol progredire per tappe a diversi livelli di astrazione. Ogni tappa vuol essere una esplicitazione di fatti matematici palesi o nascosti nel problema proposto, finalizzati a cogliere fatti indipendenti dalla particolaritá della situazione considerata, pur restando a livello descrittivo ed intuitivo.

1) *Aspetti qualitativi (logico - linguistici).*

1.a) La particella "e", congiunzione per la lingua naturale, è presente nel testo più volte ed esprime il verificarsi contemporaneamente di relazioni;

1.b) La particella *"o"*, disgiunzione della lingua italiana, ha significato di connettivo di disgiunzione. Sull'interpretazione faró una riflessione in un momento successivo.

2) *Aspetti quantitativi:*

2.1) *Dati* numerici: 10, 3.

2.2) R*elazioni:*

2.2.a) ...altrettante sono bianche (... = ...)

2.2.b)...sono il doppio delle...(... x 2 = ...)

2.2.c)...sono non meno numerose delle...(... ≥ ...)

2) *Aspetti quantitativi.*

2.1) *Dati* numerici: 10, 3

2.2) R*elazioni:*

2.2.a) ...altrettante sono bianche (... = ...)

---

(1) Il problema, come il successivo, puó essere avviato nel secondo ciclo della scuola elementare e riproposto nella scuola media con proiezioni anche nella scuola superiore.

2.2.b) ...sono il doppio delle... (... x 2 = ...)

2.2.c) ...sono non meno numerose delle... (... ≥ ...)

Una rappresentazione col cosiddetto *linguaggio delle freccie* (fig.1) è adeguata al problema proposto:

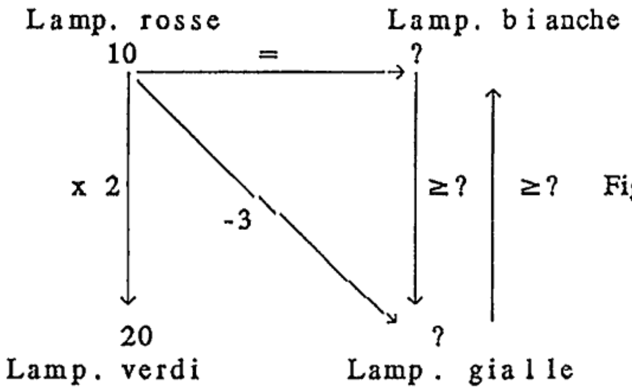


Fig.1

Lo schema, privilegiando gli aspetti *relazionali,* offre immediatamente la soluzione. Non meno numerose sono le lampadine bianche essendo 10 > 7.

Emerge il non intervento del dato "20" nella risoluzione. E', questa, un'occasione di stimolo per modificare il problema, ad esempio, nei dati numerici e non nelle relazioni. Lo schema, di conseguenza, non muta perchè rappresenta relazioni indipendenti dai dati e favorisce lo spostamento verso un ragionamento intuitivo con le variabili, giá a livello di scuola elementare.

Nella formulazione del problema proposto è *nascosto* l'impiego della *indeterminata* e della *variabile,* questa non in senso *formale* ma *operativo.* Il linguaggio dell'algebra, dunque, soggiace implicitamente nel problema che si presenta allora come un caso di particolarizzazione. La *generalizzazione* scatta quando si vuol *far vedere qualche regolaritá,* come si vedrá nelle fasi successive. L'uso intuitivo e critico di *simboli* la favorisce.

Con la *rappresentazione simbolica* si transita da un tipo di rappresentazione *ideografica,* (nel caso considerato con frecce), ad una *ideografia simbolica* che, una volta concettualizzata da parte del discente, puó divenire il punto di partenza per la *rappresentazione simbolica* usuale in matematica. Il linguaggio, da *strumento verbale,* diventa uno strumento di *descrizione* *concettuale*. L'allievo, avvicinandosi gradualmente all'aspetto *formale* della matematica, va via via conquistando anche un atteggiamento fondamentale della matematica che è il processo di *astrazione*. (Ritorneró sul linguaggio algebrico nel problema "Euclide").

Con tale obiettivo, confortata anche dall'esperienza vissuta sul campo, propongo tre domande che vanno viste in modo non rigido. (E' sempre la classe il laboratorio di ricerca, fonte di idee e di percorsi da seguire nella risoluzione di un problema).

- E' possibile allontanarsi dal particolare *sensibile* (bambini col grembiule, ad esempio, al posto dell'albero con le lampadine)? (J1).
- E' possibile distaccarsi dai dati *quantitativi particolari* presenti nel problema, conservando le *relazioni*? (J2).
- E' possibile distaccarsi dal *particolare contesto* del problema, conservando, ad esempio, il tipo (la *linearitá*) delle relazioni? (J3).

E' in gioco la liberazione della mente dal *particolare* ("realtá" del problema) che funziona come fonte di ispirazione per *nuovi concetti* e la scoperta di *relazioni formali*. Si apre la via, a livello di scuola elementare per un *intuitivo ragionamento con le variabili*. L'itinerario didattico che propongo considera cinque graduali passaggi formali di diverso livello da considerare in modo duttile, perchè la presentazione in classe di una situazione - problema crea sempre uno stato di tensione dell'intelletto e di instabilitá (il pensiero si pone alla ricerca della soluzione, si accendono "curiositá", si ferma l'attenzione su certi fatti piuttosto che su altri, si separano alcuni, si modificano progetti risolutivi)...

a) *Primo passaggio formale*: *...verso un sistema di equazioni* e *di disequazioni* (2).

a1) *Simbolizzazione:*

□ numero delle lampadine rosse

▯ " " " gialle

0 " " " bianche

a2) *Formalizzazione delle relazioni* con un simbolo ausiliario, la *parentesi graffa*, che sostituisce la congiunzione delle relazioni individuate in 2). Da questa formalizzazione opportunamente guidata dall'insegnante, inizia un percorso di astrazione e di generalizzazione sviluppato nei successivi passaggi.

$$\begin{cases} \square = 10 \\ \square = \bigcirc \\ \square - 3 = \boxed{\,} \\ \bigcirc \geq \boxed{\,} \end{cases}$$

Mi sembra opportuna un'osservazione sulla scelta dell'ultima relazione del sistema. Il sistema è soddisfacibe *solo se* le lampadine bianche non sono meno numerose di quelle gialle. Pertanto è corretta la scelta dell'ultima relazione che associa la soddisfacibilitá del sistema alla "non minore numerositá delle lampadine bianche". D'altra parte il problema poteva essere formalizzato sostituendo l'ultima relazione del sistema con la relazione "$\leq$", tenendo presente che, in tal caso, la soddisfacibilitá del sistema corrisponde alla non minore numerositá delle lampadine gialle. La domanda del problema proposto, menzionando prima le lampadine bianche, sembra privilegiarle in qualche modo a quelle gialle, spingendo, così, ad una interpretazione non commutativa della "o". I passi che seguono conservano tale scelta.

b) *Secondo passaggio formale* con l'impiego delle variabili: un *sistema* di *equazioni* e *disequazioni*.

b1) *Simbolizzazione:*

- le *indeterminate* "r", "g" e "b" al posto della simbolizzazione

---

(2) Non spaventi questo termine tecnico, se pensato riferito ad un problema dichiarato per la scuola elementare: anche nei primi anni di scuola si impostano e si risolvono equazioni algebriche, pur senza fare riferimento ad esse. Si pensi, ad esempio, ad un problema che richieda una sottrazione.

a1) (la scelta intuitiva dei simboli trova radici, in questa prima fase, nel "concreto" del problema. Tuttavia comincia a distaccarsene con un ruolo epistemologico anticipatorio del passo successivo);

b2) La *formalizzazione seguente* è immediata tanto più se la classe ha fatto in precedenza esperienza con le *sostituzioni* [19]:

$$\begin{cases} r = 10 \\ b = r \\ r - 3 = g \\ b \geq g \end{cases}$$

b3) *Interpretazione delle variabili* r, b, g *:* l'insieme dei naturali.

b4) *Soluzione: sostituzione delle variabili con costanti* ed uso delle operazioni dell'aritmetica:

"E' facile: $r = 10$, $g = 7$ e anche $10 > 7$. Importanti sono le relazioni che abbiamo trovato. Stanno bene insieme". (Sono le parole dei bambini della quinta di Muro).

Ipotizzando una classe capace di un tale discorso matematico, la (J2) apre la via ai prossimi passaggi, pensabili in una scuola media o nel biennio di scuola superiore con una maggiore attenzione ai concetti di sistema e di soddisfacilitá:

d) *Terzo passaggio formale*: l'impiego dei *parametri* al posto dei *dati numerici* (distacco dai dati numerici presenti nel problema, ma non dall'universo di interpretazione); un *sistema di equazioni parametriche.*

d1) *Simbolizzazione*

a	sostiuisce	10	$a \in \mathbb{N}$
c	"	3	$c \in \mathbb{N}$ $c \leq r$

d2) *Formalizzazione*:

$$\begin{cases} r = a \\ b = r \\ r - c = g \\ b \geq r \\ c \leq r \end{cases}$$

Accenno agli altri passaggi formali.

e) *Quarto passaggio formale*: l'impiego di nuovi nomi alle variabili "r", "b" e "g". Tale passaggio permette un distacco dal *"concreto oggetti"* del problema, preparando all'*interpretazione dei simboli in un arbitrario modello* in un livello scolastico successivo. E' questo un momentò molto importante per un significativo livello di astrazione; come tale va fatto vivere e gustare intensamente dall'allievo, eventualmente con diverse situazioni problematiche per poter favorire, a livello di scuola superiore, l'intuizione del successivo passaggio formale.

f) Quinto passaggio formale: distacco dal *" particolare concreto"* del problema, ma non dalla *linearitá*, ad esempio, delle relazioni: verso un *generico sistema lineare di equazioni...*

In una tale direzione di lavoro didattico *anticipatorio* per la scuola superiore si puó far gustare all'allievo del biennio delle superiori, man mano che si arricchisce la sua esperienza matematica, la fecondità di precisazione di *concetti* (si pensi, ad esempio, alle nozioni di *variabile*, di *sostituzione* [20]).

Sono ben note, a qualunque livello scolastico, le difficoltá dell'allievo nel familiarizzare con le variabili (a livello di scuola elementare, ad esempio, nel sostituire valori assegnati (costanti) nella formule di aree o perimetri o volumi). Sono comprensibili, in quanto sono coinvolti *aspetti* linguistici di tipo *grammaticale, sintattico e semantico*. La precisazione nelle superiori, (al di lá dell'Informatica), consente allo studente di superare consapevolmente le ben note difficoltá, ad esempio, di fronte alla cosiddetta "verifica di una soluzione trovata" o alla sostituzione di un numero al posto della variabile nella scrittura di una funzione...E va anche chiarita la distinzione tra *soddisfacibilitá* (*veritá* relativa ad una data interpretazione) e *validitá* (veritá in tutte le interpretazioni, per esempio "a = a"). L'uguaglianza "3 • a = 7", ad esempio, è soddisfatta per a = 7/3 , vera, cioè, se "a" *si sostituisce con la costante* 7/3, falsa se "a" *si sostituisce con la costante* 3.

A partire da una situazione problema, anche semplice come quella presentata, importante è lasciare *sempre* spazio ad un possibile approfondimento a spirale, per cogliere, registrare ed approfondire certi fatti *matematici* con dialettica tra *intuizione* e *rigore*, tra *concreto* ed *astratto*, tra *astratto* e *formale*, tra *rappresentazione* e *linguaggi*, tra *applicazione* e *teoria*.

PROBLEMA "I cuccioli"

"In un canile ci sono 10 cuccioli. Fra questi 6 sono distesi; 7 mangiano. Quanti cuccioli potrebbero contemporaneamente essere distesi e mangiare?"

Il piano risolutivo, in analogia al precedente, progredisce per tappe a diversi livelli, finalizzate ad un'organizzazione razionale delle informazioni, sempre restando a livello descrittivo ed intuitivo nella scuola elementare.

a) *Aspetti qualitativi.*

a1) logico - linguistici:

- i cuccioli possono essere distesi *e* mangiare;
- " " " " " *e non* mangiare;
- " " " mangiare *e non* essere distesi;
- *alcuni* cuccioli mangiano;
- " " sono distesi;
- " " " " *e* mangiano;
- *non* si precisa se *ogni* cucciolo che è nel canile soddisfa *almeno* ad una delle due condizioni "mangiare" "essere disteso";
- possono esserci, dunque, nel canile, cuccioli che *non* sono distesi *e non* mangiano.

Determinanti per un piano risolutivo del problema sono i termini *logici* "tutti", "alcuni", le espressioni linguistiche del tipo "Tutti i cuccioli di tipo X sono cuccioli di tipo Y ", "Nessuno cucciolo di tipo X è di tipo Y", "Alcuni cuccioli di tipo X sono cuccioli di tipo Y", "Alcuni cuccioli di tipo X non sono cuccioli di tipo Y"...(alcune sono nascoste nel problema) ([1], [18]).

a2) strutturali del discorso :

la congiunzione "e", la negazione "non", la disgiunzione non esclusiva "o". Ad ecccezione della "e", gli altri connettivi sono nascosti.

b) *Aspetti quantitativi:*

b1) dati numerici: 6, 7, 10;

b2) *relazioni*:

- *tutti* i cuccioli distesi possono mangiare (il dato 6 è minore del dato 7; al *massimo* 6 possono fare contemporaneamente le due azioni);
- i cuccioli che mangiano *non* possono essere *tutti* distesi (il dato 7 è maggiore del dato 6);
- *alcuni* cuccioli distesi mangiano (il dato 10 è minore della somma 13 = 6 + 7; al *minimo* 3 possono fare contemporaneamente le due azioni).

Sono nascoste locuzioni del tipo " Se i cuccioli di tipo X sono in numero di ...allora i cuccioli di tipo Y sono in numero di..."

c) *Aspetti del piano risolutivo.*

Il problema ha più soluzioni*:* le diverse soluzioni si hanno considerando i casi *possibili* di cuccioli distesi che possono mangiare.

Tutte le soluzioni possibili devono soddisfare le seguenti *tre* condizioni:

c1) il numero totale dei cuccioli deve essere 10 ;

c2) " " " " " che sono distesi deve essere 6;

c3) " " " " " " mangiano deve essere 7.

d) *Gli insiemi nascosti.*

A livello di scuola media si possono esplicitare gli insiemi "nascosti" nel contesto del problema con la seguente simbolizzazione:

U	Insieme dei cuccioli nel canile	
A	" " " " "	che sono distesi
B	" " " " "	" mangiano
A ∩ B	" " " " "	" sono distesi e mangiano
A - B	" " " " "	" sono distesi e non mangiano

B - A	Insieme dei cuccioli nel canile che mangiano e non sono distesi
A ∪ B	" " " " " " mangiano o sono distesi
U - (A ∪ B)	" " " " " " non sono distesi e non mangiano (5)

e) *Rappresentazione.*

I *diagrammi* di Venn rendono visibili gli aspetti esaminati. E' intuitiva per un allievo di qualunque livello scolastico, la scelta del *linguaggio* degli insiemi (non della *teoria* degli insiemi con cui viene confuso e, ció che forse è ancora peggio, talvolta identificato anche con la *logica matematica* [7], [22], [23], in certi testi scolastici.

"L'utilitá di un modello consiste essenzialmente nel suo valore euristico: esso facilita la risoluzione di un problema inizialmente posto nei termini dell'originale. Questo è possibile soltanto se, tra l'originale e il modello, sussiste un certo isomorfismo" ([11], p.14]. "Il vantaggio di un modello deriva anche dal fatto - essenziale per il pensiero - che usando modelli si esprime la stessa struttura concettuale in differenti forme sensibili...(si tratta di modelli figurativi)" ([11], p.26].

f) *numerositá* e *simbolizzazione*:

10 numerositá di U	$10 = n(U)$
6 " " A	$6 = n(A)$
7 " " B	$7 = n(B)$
? " " A ∩ B	$x = n(A \cap B)$

g) *Relazioni.*

Tutti i cuccioli distesi possono mangiare essendo il dato 6 minore del dato 7; al massimo 6 possono fare contemporaneamente le due azioni:

$$n(A \cap B) \leq 6$$

Alcuni cuccioli distesi mangiano poichè il dato 10 è minore della somma 13 = 6 + 7; almeno 3 eseguono le due azioni:

$$3 \leq n(A \cap B)$$

In definitiva:

(1) $$3 \leq n(A \cap B) \leq 6$$

Vie risolutive.

1) Fatta propria la relazione (1), la soluzione è immediata: i cuccioli richiesti dal problema potrebbero essere 3 o 4 o 5 o 6.

2) La scelta della rappresentazione insiemistica guida l'allievo nel cogliere più facilmente un'interazione *intuitiva* tra il linguaggio naturale e diversi linguaggi matematici (il logico, l'insiemistico, l'aritmetico).

CASO I: 6 cuccioli che sono distesi mangiano.

$$n(A \cap B) = 6$$

Rappresentazione insiemistica

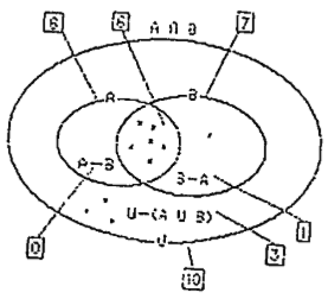


Fig. 2

La rappresentazione suggerisce e sostiene, ad esempio, il passaggio inverso dal linguaggio *grafico* a quello *verbale,* quale il seguente:

Se tutti i cuccioli che sono distesi mangiano

allora 1 cucciolo *mangia e non* è disteso

3 cuccioli nel canile nè mangiano nè sono distesi

CASO II : 5 cuccioli che sono distesi mangiano

$$n(A \cap B) = 5$$

Rappresentazione insiemistica

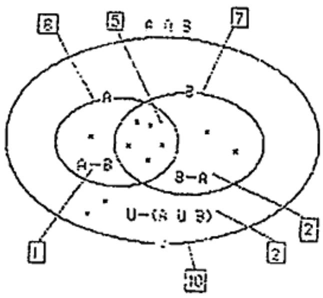


Fig. 3

La presenza di più situazioni rinforza il rapporto tra la *rappresentazione* e il *discorso matematico*:

Se 5 cuccioli che sono distesi mangiano

allora 2 cuccioli *mangiano e non* sono distesi

2 cuccioli nel canile né mangiano né sono distesi

Accenno agli altri possibili casi.

CASO III: 4 cuccioli che sono distesi mangiano

$$n(A \cap B) = 4$$

Di conseguenza 3 cuccioli *mangiano e non* sono distesi,

1 cucciolo nel canile *non* mangia *e non* è disteso.

CASO IV : 3 cuccioli distesi mangiano

$$n(A \cap B) = 3$$

Se 3 cuccioli che sono distesi mangiano

allora 4 cuccioli *mangiano e non* sono distesi

0 cuccioli nel canile *non* mangiano *e non* sono distesi.

Il calcolo delle proposizioni ed il calcolo dei predicati intervengono, a livello intuitivo, nella trattazione del problema (con ovvia esigenza di precisazioni nella scuola superiore senza decadere in *tavolite e predicatite*). L'alunno non si deve trovare di fronte a "montagne" di prerequisiti da affrontare. Il docente consapevole di tutte le connessioni dell'argomento oggetto di un problema, sa fargli cogliere quelle indispensabili per affrontarlo.

Ma il discorso si puó spingere ancora, nella direzione della *dimostrazione in matematica*, su cui ritorneró nel terzo problema.

Congettura

Non è possibile che sia $n(A \cap B) < 3$.

Giustificazione della congettura

Per evitare che la mente di chi apprende rimanga *prigioniera* del "concreto" costituito dalla rappresentazione di un singolo caso, oso proporre l'"esperimento mentale" di visualizzazione delle situazioni in gioco nella congettura. Un tale atteggiamento della mente deve essere continuamente motivato, ovviamente in modo graduale, in tutto il corso scolastico di un allievo a partire dalla scuola elementare, per ovviare a uno studio limitato e banale e ad un blocco della fantasia.

Ipotesi: 2 cuccioli *mangino distesi*

Se 2 cuccioli distesi mangiassero

allora 4 cuccioli sarebbero solo distesi

5 cuccioli mangerebbero solamente

I cuccioli nel canile sarebbero, dunque, $11 = 2 + 4 + 5$. Ció è in contraddizione (" in contrasto" è la parola dei bambini di Muro!) col dato "10" del problema, vincolo di ogni soluzione del problema posto. Dunque la numerositá di A $\cap$ B non puó essere 2; analogamente nè 1, nè 0. La congettura, dunque, non solo resta giustificata, ma anche dimostrata in quanto sono stati considerati tutti i casi possibili, essendo, questi, nel caso del nostra situazione - problema, in numero finito.

Forse la classe in cui ho svolto la sperimentazione dei due problemi era eccezionale per aver vissuto, sin dalla prima elementare, un insegnamento - apprendimento per problemi attento per un verso all'interazione epistemologica tra le rappresentazioni ed i vari linguaggi, per un altro alla ricerca di strategie risolutive con *gioia* della *scoperta e gusto del sapere*. Ma quel che proporró trae origine ancora dall'esperienza vissuta. Potrebbero forse essere tante le critiche del lettore a questo punto, ma credo negli insegnanti guidati dai *perch*è significativi di chi apprende.

Se i passi didattici proposti durante la risoluzione del problema precedente o di analoghi sono stati conquistati dall'allievo, forse non è poi tanto ambiziosa, farlo cimentare con la seguente domanda:

- E' possibile una rappresentazione con simboli e relazioni tra simboli?

Nella scuola elementare, sia pur a livello intuitivo, *il passaggio* è facilitato se il linguaggio verbale continua a sostenere la sostituzione della locuzione, ad esempio, "numero dei cuccioli che sono distesi e non mangiano" con "x", e così via...

$x = n(A - B)$

$y = n(B - A)$

$z = n(A \cap B)$

$t = n(U - (A \cup B))$

In ogni caso, a livello di scuola d'obbligo, la scelta della rappresentazione insiemistica non va vista privilegiata rispetto ad altre, anzi confrontata con altre ed osservata con occhio critico nelle superiori. Se l'insegnante non è semplicemente un trasmettitore statico di un sapere sistemato, ma vive il ruolo di organizzatore di processi di apprendimento matematico, allora saprá cogliere significativamente i passaggi attraverso linguaggi diversi. In analogia con l'itinerario didattico presentato per il problema precedente, si puó far conquistare il seguente sistema, che si presenta, al primo sguardo, complesso, se si dimentica che l'insieme di interpretazione delle variabili è l'insieme dei naturali.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 10 & (1^*) \\ x + z = 7 & (2^*) \\ z + y = 6 & (3^*) \\ 3 \leq z \leq 6 & (4^*) \end{cases}$$

Le relazioni traducono il discorso matematico nel testo del problema considerato.

Il semplice contare, familiare a livello di scuola elementare, ma che viene dimenticato (purtroppo!) man mano che si va a livelli scolastici superiori, consente la risoluzione - oso dire immediata - del sistema ottenuto.

Semplicemente *contando*, ecco le soluzioni dei bambini della quinta di Muro:

a) se $z = 3$ per $2^*)$ $x = 4$
" $3^*)$ $y = 3$
" $1^*)$ $t = 0$

b) se $z = 4$ per $2^*)$ $x = 3$
" $3^*)$ $y = 2$
" $1^*)$ $t = 1$

c) se $z = 5$ per $2^*)$ $x = 2$
" $3^*)$ $y = 1$
" $1^*)$ $t = 2$

d) se $z = 6$ per $2^*)$ $x = 1$
" $3^*)$ $y = 0$
" $1^*)$ $t = 3$

Sarebbe forse una bella sfida proporre il sistema a livello di scuola superiore.

PROBLEMA "Euclide"

"Siano A (1,2), B (1,3),C (4,3), D (4,2). Verificare che il quadrilatero A B C D è un rettangolo. Quale la natura del quadrilatero che si ottiene congiungendo i punti medi dei lati del quadrilatero A B C D ?"

Il problema è di prassi scolastica nell'insegnamento della geometria analitica ed è davvero banale, una volta accettati tutti i concetti e il fondamento di un sistema di coordinate cartesiane. E' proprio qui il problema (ragione del nome, forse molto pretenzioso, che ho dato al problema).

In particolare in un problema di geometria analitica è presupposto il famoso postulato delle parallele di Euclide "di cui non è affatto ovvia "la veritá"" ([3], p. 329) e sono coinvolti, in modo determinante per la risoluzione, aspetti sintattici e semantici. E se si vuol guardare alla geometria con un occhio critico attento a questioni di fondo, sarebbe auspicabile avvicinare l'allievo, nell'ultimo anno della scuola superiore, al problema della crisi dei fondamenti, mettendo in discussione, ad esempio, il ruolo fondazionale del postulato euclideo nel metodo delle coordinate cartesiane.

...Così la possibilitá delle geometrie non - euclidee ([2], [5], [6]) potrebbe essere un punto di riferimento significativo per un approccio dello studente al cambiamento di atteggiamento della geometria nel rapporto *spazio geometrico*, *spazio fisico* e *intuizione sensibile* e una iniziale conquista dell'idea di un fondamento assiomatico della "geometria". Sono in gioco complessi problemi connessi fra loro di natura *logica*, *epistemologico - didattica* ([26], [27], [28], [29]). Emergono in particolare due questioni di fondo:

- la possibilitá di costruzione di *modelli* alla luce dei risultati della logica matematica;
- lo scontro tra idee nuove e idee vecchie intorno al binomio *veritá - dimostrazione* ([30]).

Oseró presentare, in una tale direzione di pensiero, sia pur a livello descrittivo per punti essenziali, un itinerario didattico, perchè convinta di un insegnamento della matematica capace di "insegnare ai giovani a PENSARE" ([25], II, p. 359). Seguiró anche per quest'ultimo problema lo schema espositivo utilizzato nei casi precedenti. Continueró a porre l'attenzione, come sopra, sugli aspetti logico - linguistici che, correlati con le rappresentazioni logiche (i *modelli* (20]), consentono varie attivitá didatticamente interessanti ed efficaci. Sono infatti ottimo spunto per innescare una discussione di carattere storico e concettuale, sia pur a primo livello come è consentito nel tipo di scuola, sulle *rivoluzioni matematiche*, sull'*evoluzione storica* dell'*indagine matematica*.

A tal fine mi sembra individuare nel problema almeno due livelli di riflessione epistemologica: uno (proponibile a partire dal biennio) di analisi delle rappresentazione legate al passaggio dal linguaggio *geometrico* a quello *algebrico* (e viceversa); l'altro (nel triennio) coinvolgente l'intreccio epistemologico delle evoluzioni della matematica e della filosofia, correlati tra loro perchè l'allievo comprenda meglio il "modo di pensare matematico". Si tratta ora di questioni didattiche e teoriche molto sottili. Per avvicinarsi ad esse c'è necessitá di adeguati stimoli. "ma è proprio di stimoli ... che c'è bisogno (e che in genere mancano) per evitare che tutto (e in ispecie la matematica) si degradi, nell'insegnamento, a passiva e sterile ripetizione." ([4], p. 69).

1) *Primo livello.*

Le fasi didattiche che propongo si staccano dagli aspetti algoritmici e puntano su quelli grammaticali, sintattici e semantici da sempre presenti nella matematica.

d1) *Aspetti grammaticali* (*Simbolizzazione)*:

- i simboli per le *variabili* ("x", "y");
- il simbolo di *uguaglianza*;
- le parentesi;
- le *costanti* (i numeri reali).

d2) *Scritture sintattiche*:

- i polinomi del tipo a x + b y + c con *a*, *b* e c *costanti* [15] ;

d3) *Interpretazioni semantiche* (legame tra il linguaggio algebrico e quello geometrico):

d3.1) - l'universo "inteso" di interpretazione (l'insieme R);

d3.2) - la funzione dalle coppie ordinate di valori nell'universo di interpretazione scelto in *"vero"*, *"falso"*: precisamente quella che associa *"vero"* ad una coppia ordinata se i suoi elementi *verificano* un'equazione del tipo $a\ x + b\ y + c = 0$ (2)

d3.3) - Se la funzione che interpreta la formula associa *"vero" ad una coppia ordinata fissata*, ció significherá, nel piano cartesiano, che quel punto con quelle coordinate *appartiene* alla retta associata all'equazione di tipo 2).

d3.4) - la condizione *"allineamento di due punti"* che definisce la retta in *linguaggio geometrico* si esprime in *linguaggio algebrico* mediante l'*equazione di primo grado in due variabili* e viceversa;

d4) R*appresentazione grafica* col metodo delle coordinate (Fig.4):

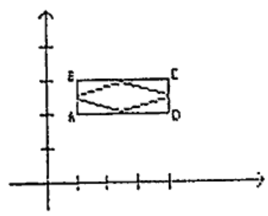


Fig. 4

d5) - *Alcuni aspetti del piano risolutivo.*

Durante la risoluzione di un problema di geometria analitica la mente dell'allievo mette a confronto due canoni della geometria esprimibili in due linguaggi differenti ma strettamente connessi tra di loro (primo livello). L'interazione tra la rappresentazione cartesiana e l'immagine geometrica guida e aiuta la mente dell'allievo nell'individuare quello che occorre saper vedere con occhio geometrico per saper vedere con occhio algebrico (e viceversa). Importante è, quindi, sul piano didattico, che lo studente si renda conto che usando opportune regole algebriche coglie certi legami tra enti geometrici e viceversa . L'aspetto meccanico proprio di ogni calcolo lo imprigiona se vede il calcolo come un'ingiustificata "ricetta" imposta e non lo guarda come un "utile" strumento quando ne comprenda la portata e i significati.

Il problema proposto esige nella prima parte (verifica di "rettangolo") una dimostrazione nel linguaggio dell'algebra (i punti A, B, C, D sono individuati da coordinate cartesiane). La seconda questione (natura di "rombo" del quadrilatero richiesto), puó essere affrontata anche col metodo cosiddetto *sintetico*, auspicabile perchè l'allievo colga aspetti *logici* della dimostrazione nei due linguaggi con attenzione ai significati dei termini e alla portata delle affermazioni che si presuppongono (il postulato delle parallele presupposto nella rappresentazione cartesiana di un punto). D'altra parte coglie anche la significativitá di una integrazione tra i due metodi per facilitarsi il cammino verso la soluzione (sono note le difficoltá degli studenti poveri di esperienza geometrica col metodo sintetico di fronte a certi problemi di geometria analitica assegnati agli esami di maturitá!).

2) *Secondo livello.*

A differenza dei problemi precedenti, vi è, dunque, un salto di qualitá del ruolo e del significato dell'interazione tra rappresentazioni e linguaggi in matematica, salto che esige un'attenzione dell'insegnante ai concetti logici di *modello* e di *dimostrazione.* Se si vuole, dunque, spingere il discorso matematico a livelli più alti coinvolgendo particolari aspetti critici, propongo due domande:

- Cosa vuol dire *verificare*?
- Quale la diversitá del linguaggio geometrico da quello delle coordinate?

Molte e sottili le questioni connesse. Mi sforzeró di individuare in tre *fasi* alcuni spunti di riflessione didattica che penso significativi nella scuola superiore. Procederó con l'idea di *problemi entro problemi*, a partire dalla seconda domanda.

Prima fase.

Va esaltato nell'insegnamento il vantaggio metodologico dell'uso dell'algebra per certi aspetti risolutivi (si pensi al progresso della matematica basato sul metodo delle coordinate); d'altra parte la lettura algebrica di un problema geometrico permette di notare più facilmente vie di generalizzazione (si pensi ad uno *spazio* a più di tre dimensioni). Questo è un aspetto del problema.

Non va sacrificata l'occasione didattica di una riflessione storica sul significato e sulle possibilitá dei vari aspetti della geometria [27] che vanno, sul piano didattico, dalla acquisizione di strumenti importanti di lavoro non solo per la matematica (aspetto *strumentale*), alla riflessione sulla organizzazione logica delle idee sullo spazio (aspetto *logico*). L'attenzione si sposta (con elevato ruolo formativo), alla struttura interna della geometria (precisazione di concetti, necessitá delle *dimostrazioni* (seconda *fase*), significato della scelta di un assioma piuttosto che di un altro (terza *fase*) [28], [29]).

Quel che conta, a mio parere, nell'insegnamento, non è aumentare i contenuti con l'idea di una completezza che non c'è se si tien conto di possibili sviluppi, quanto il riflettere su pochi contenuti, per evitare che l'insegnamento degradi in un ammasso di nozioni da trasmettere, a volte spesso ripetute con gli stessi metodi senza che avvenga quel salto di qualitá che si richiede nella scuola superiore. (Geometria e aritmetica sono temi che l'allievo incontra giá sin dalla scuola elementare!). Di fronte ad un problema di geometria analitica, se non lo si vuol ridurre ad una fredda ed arida applicazione di formule, occorre far cogliere che le *scelte* operate nell'individuare lo spazio geometrico in cui lavora sono determinanti (terza *fase*).

Seconda fase.

Il significato del termine "verificare" nel contesto del problema chiama in gioco il concetto di *dimostrazione*, concetto che è "la prima vera grande rivoluzione...nella Grecia antica..." [26]. A tal proposito è in uso in non pochi testi scolastici *moderni* di matematica, anteporre, generalmente alla trattazione della geometria, un capitolo di *logica matematica* spesso presentata in modo discutibile. Ma vi è di più: c'è il rischio che questo importante contenuto possa promuovere e favorire nello studente uno scorretto atteggiamento matematico per due motivi fondamentali.

a) Non vengono colti nel loro ruolo i connettivi proposizionali ed i quantificatori, ruolo che non è quello di fondarne il significato, ma di precisare una scelta convenzionale del loro uso in ambienti specifici (i connettivi servono a costruire descrizioni più complesse a partire da descrizioni più semplici). In particolare "se...allora" non ha alcuna intenzione di esprimere causalitá, inferenza, giustificazione, o altro; sul suo significato c'è, in non pochi testi scolastici, la confusione tra *implicazione*, *deduzione* e *conseguenza logica*, con confusione tra aspetti sintattici e aspetti semantici. Uno dei ruoli significativi, a livello didattico, della logica, è un controllo linguistico, con attenzione, in particolare, all'uso dei connettivi e dei quantificatori [1] e ai passi di una dimostrazione [20] .

b) Non si colgono certi aspetti e le esigenze della *dimostrazione* in Matematica. Nel caso particolare della geometria, (a differenza, ad esempio, dell'algebra), vi è un'ulteriore difficoltá nella rappresentazione visiva che presentando una situazione particolare che coinvolge il soggetto, nasconde l'esigenza di dimostrare che la *tesi* è *indipendente* dalle particolaritá della situazione considerata. Basta pensare all'atteggiamento *psicologico* di non pochi studenti di non ritenere necessarie certe dimostrazioni geometriche, perchè vedono giá nel *disegno* la *veritá* delle richieste di un certo problema geometrico. Si esprimono spesso con frasi del tipo "è evidente", "è ovvio che la figura geometrica è un rettangolo" o si pongono la domanda "che cosa devo dimostrare?".

In queste loro affermazioni traspare il problema di fondo: una rappresentazione è un *modello*, in cui tutto puó "funzionare" per bene, mentre la dimostrazione richiede di stabilire rapporti tra gli enti che valgono per *tutti* i modelli, anche per quelli critici, in cui il "funzionamento" non è altrettanto egregio.

Ritornando alla questione posta, diversi sono i concetti di dimostrazione in matematica: vanno dal tentativo di *"convincimento" "oltre ogni dubbio"* alla *formale* dimostrazione studiata dalla logica matematica. In certi casi la dimostrazione matematica è la dimostrazione logica e garantisce l'indipendenza dal caso particolare. Nella usuale dimostrazione in matematica sono in gioco aspetti *semantici* che non vanno confusi con aspetti *sintattici*: la dimostrazione tiene conto, infatti, dei *significati* dei termini presenti nell'enunciato oggetto di dimostrazione (significato, ad esempio, di "rette parallele", "rette perpndicolari", di equazione, ...) e consiste in una successione *finita* di affermazioni che tengono conto, via via, dei fatti matematici *supposti* (*ipotesi*) e termina con la constatazione dell'affermazione desiderata (*tesi*).

"Anzitutto è necessario far capire la necessitá di assumere alcuni termini primitivi e alcuni assiomi: per evitare circoli viziosi e rinvii all'infinito, bisogna prendere qualche termine senza averlo definito e qualche affermazione senza averla dimostrata" ([28], p.72). L'allievo eviterá affermazioni senza senso, talora prive anche di "senso comune".

"E' facile constatare sui libri di testo che è data una diversa rilevanza didattica tra gli assiomi o postulati della Geometria e le cosiddette *proprietá formali* dell'Aritmetica e dell'Algebra. Quest'ultime non vengono neppure "etichettate" con il nome di assioma e la trattazione dell'Aritmetica e dell'Algebra che segue, di solito, non presenta una corretta e completa derivazione dei vari risultati dalle proprietá...A sostegno della geometria c'è forse la possibilitá di una fonte dell'intuizione spaziale, per alcuni più immediata, avente riscontro nel mondo visibile. Tuttavia chi sostiene questa posizione, si deve rendere conto che l'intuizione forse rende facili le *argomentazioni*, presentate a sostegno della scelta dei postulati, ma non rende più semplice ed intuitivo il procedimento dimostrativo. Ne fa fede il fatto che le cosiddette dimostrazioni sintetiche sono spesso meno praticate" ([21], pp.131 - 133).

Terza fase.

Se l'attenzione allo *spazio euclideo* viene maturata sottolineando la portata delle scelte fondazionali, si determina per l'insegnante un momento significativo sul piano didattico per operare esplicitamente scelte diverse introducendo, ad esempio, ad un primo livello, il problema delle geometrie non euclidee.

Una tale scelta contenutistica sarebbe utile per la formazione di una mentalitá critica nel giovane non accontentandosi delle usuali asettiche presentazioni della geometria.

Una domanda *chiave* in tale direzione potrebbe essere formulata in modi diversi. Dipende dal discorso matematico oggetto di discussione della classe. Ne propongo quattro.

- E' possibile oltrepassare l'esperienza sensibile?
- Come mostrare che il quinto postulato di Euclide puó essere negato?
- Come mostrare che sono possibili geometrie diverse da quella euclidea?
- Se si oltrepassa l'esperienza sensibile, chi ci garantisce la coerenza di una teoria della geometria?

C'è una via didattica? Forse la via dei *contro - modelli* è da favorire, perchè le proprietá di oggetti matematici non siano presentate "come se si trattasse di cose ovvie e scontate". Il modello di "piano" non euclideo di Klein (Fig. 5) e il modello di "superficie curva nello spazio" di Riemann, non necessariamente una sfera (Fig. 6) nell'ambito della geometria euclidea, offrono un'interazione tra *rappresentazione* e *linguaggio geometrico* e *teoria*. E' neccessario un atteggiamento problematico ([3], pp. 324-342, [26]) di rapportarsi con i *fondamenti* della matematica, altamente formativo per portare a livelli più alti lo spirito *critico di uno studente delle superiori.*

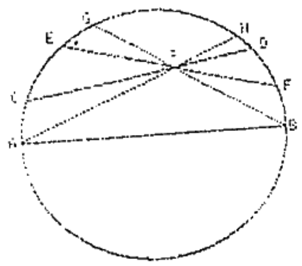


Fig.5

"Punti" sono i punti del cerchio euclideo privato della circonferenza. "Rette" sono le corde. Data una "retta", per un punto non appartenente ad essa passa piu' di una parallela. Il postulato dell'unicita' della parallela non vale nel modello di Klein.

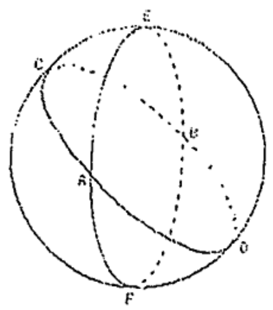


Fig. 6

"Punti" sono coppie di punti diametralmente opposti della superficie sferica euclidea. "Rette" sono l'insieme delle coppie di punti diametralmente opposti che giacciono su una circonferenza massima. Data una "retta" ed un "punto" che non le appartiene, non esistono "rette" parallele ad essa: ogni coppia di "rette" ha in comune un "punto". Non esistono "rette" parallele nel modello di Riemann.

Di fronte a tale situazione in cui l'intuizione non è abbandonata, l'allievo vive momenti di stupore e sorpresa e si pone tante domande, bellissime per una mente che *pensa* e che *non ripete* :

- Le *rette* non sono più quelle che conoscevo?
- Gli angoli non sono più coi lati *rettilinei?*
- La somma degli angoli interni di un triangolo *sulla sfera non* è più 180 gradi! *Vedo una somma maggiore,* se penso al reticolato geografico dei meridiani e dei paralleli! Come verificarlo col modello? E nel "piano" cosa accade? Sará minore? Come verificarlo?
- Se considero il modello della sfera, è possibile verificare l'assioma dell'unicitá della retta per due punti?
- Quale la Geometria valida per lo *spazio fisico*?
- La Terra si puó approssimare ad una sfera. Forse puó essere più conveniente una geometria diversa da quella euclidea?...

..."l'assoluta fede in Euclide e nell'intuizione spaziale è costretta a ritirarsi dal sensibile visivo ad un campo più astratto,... e in buona parte è sostituita dal rigore delle dimostrazioni...Per accertare l'ammissibilitá di diverse geometrie si fa ricorso a rappresentazioni, o modelli, in cui si

vedono concretati i postulati...Una teoria è accettata (3) non tanto per quel che descrive, quanto perchè esiste qualcosa in cui puó essere interpretata, e quindi non è contraddittoria" ([25].
E' rotto il secolare rapporto geometria - spazio sensibile. La costruzione di *modelli* interpretativi delle geometrie non - euclidee segna la crisi dell'*evidenza* nei processi di matematizzazione (su questi insistono i nuovi programmi della scuola italiana).
E' in gioco la *libertá* di fare geometria con sacrificio dell'intuizione geometrica euclidea. Importante è non fare scelte acriticamente imposte o non espresse, perchè imprigionano la mente di chi criticamente vuol apprendere.
L'obiettivo: "Un mito da sfatare è la totale certezza, chiarezza e staticitá dei concetti matematici, il cui corollario è una affidabilitá che prevede discussioni" ([26]).

Alcune riflessioni conclusive.

Nei tre itinerari didattici si è insinuata la logica con un ruolo trasversale finalizzato ad un apprendimento critico della matematica con attenzione ai linguaggi, agli atteggiamenti propri del pensiero matematico (quali l'astrazione, la generalizzazione) e all'organizzazione logica delle conoscenze. Giocano un forte ruolo la sensibilitá culturale dell'insegnante e la sua capacitá didattica nel far cogliere, in modo adeguato al livello scolastico dell'allievo, aspetti critici nei contenuti oggetto di insegnamento, per evitare una visione distorta della matematica fatta di aride formule e di dimostrazioni da imparare a memoria senza un significato e senza comprensione. Occorre allora il superamento di una *trasmissione sistemata* e *definitiva* di contenuti con una scelta pedagogico - didattica di *smontaggio, critica, reinvenzione del fatto culturale.* Di conseguenza l'attivitá didattica rimane centrata sulla successione "problema

(3) Il termine "accettare" vuol significare "non è da rifiutare"; ben altro è il problema di quale teoria scegliere.

- concetti - modelli - teorie - applicazioni - metodi di ricerca" con attenzione alla sostanza del discorso e alla esigenza di cautela nelle precisazioni. E questo comporta per prima cosa nell'insegnante una presa di coscienza dell'idea della matematica che vuole insegnare con conseguente scelta didattica. Se guarderá alla matematica come modello di pensiero, mezzo di indagine della realtá, in una visione non definitiva e non assoluta, risponderá allo scopo di formazione critica dei giovani, in collaborazione con le altre discipline e in misura non diversa.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Bernardi, La logica matematica: metodo e contenuti, Notiziario UMI., Novembre 1987, Supplemento al n.11, pp.22 - 29.

[2] R. Bonola, La geometria non - euclidea. Esposizione storico - critica del suo sviluppo, Zanichelli, 1975.

[3] R. Courant e H. Robbins, Che cos'è la matematica, Boringhieri, 1950.

[4] B. De Finetti, Saper vedere in matematica, Loescher, 1988.

[5] F. Enriques - G. De Santillana, Compendio di storia del pensiero scientifico dall'antichitá fino ai tempi moderni, Zanichelli, 1936.

[6] F. Enriques, Le matematiche nella storia e nella cultura, Zanichelli, 1982.

[7] R. Ferro, La didattica della teoria degli insiemi, in questo Quaderno.

[8]* R. Ferro, Alcune osservazioni per l'insegnamento della logica nel programma di matematica, Intervento I.R.R.S.A.E. Veneto.

[9]* R. Ferro, Iniziazione alla logica matematica, Intervento al Convegno CIIM di Grosseto, ottobre 1992.

[10]* R. Ferro, Definire, argomentare, dimostrare: il ruolo della logica, Atti Internuclei Scuola Superiore, Genova 1991.

[11] E. Fischbein, Il ruolo dei modelli intuitivi nell'apprendimento della matematica, Processi cognitivi e

apprendimento della matematica nella scuola elementare, a cura di Giovanni Prodi, La Scuola, 1987, pp.26 - 33.

[12] E. Fischbein, I concetti di accettazione intuitiva e di modello, Numeri e operazioni nella scuola di base, a cura di Liliana Artusi Chini, Zanichelli, 1985, pp.14 - 17.

[13] A. Iacomella, Valori culturali della Matematica nella formazione del futuro diplomato della Scuola Secondaria Superiore, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 12, n. 2, (Febb. 1989), 427-431.

[14] A. Iacomella, Questione di metodo, in La vita Scolastica, giugno 1992, n. 18.

[15] A. Letizia, I Polinomi e gli interi relativi, in questo quaderno.

[16] Lobacevskij N., Nuovi principi della geometria, Boringhieri, 1978.

[17] S. Maracchia, La matematica come sistema ipotetico - deduttivo, Le Monnier, 1975.

[18] C. Marchini, Problematiche dell'insegnamento della logica nella scuola elementare, Intervento al Seminario IRRSAE - Puglia per la formazione di Esperti in matematica, Gallipoli (Le) 26/02/87 e 13/03/87.

[19] C. Marchini, Le sostituzioni e la didattica della matematica, Bollettino U. M. I. (7) 4 A (1990), 145 - 153.

[20] C. Marchini, Modelli e Logica, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 12, n. 2, (Febb. 1989), 187-192).

[21] C. Marchini, Argomentazione e dimostrazione. Alcune riflessioni sugli aspetti didattici, in L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 1o, n. 2, (Febb. 1987), 121-140).

[22] C. Marchini, Dall'"insiemistica " alla teoria degli insiemi. 1. (Introduzione alla teoria di Zermelo e Fraenkel), la Matematica e la sua didattica, Anno II, n. 3, 1988, pp. 6-13).

[23] C. Marchini, Dall'"insiemistica " alla teoria degli insiemi. II. (I naturali di Von Neumann), la Matematica e la sua didattica, Anno III, n. 1, 1989, pp. 22-28).

[24] G. Polya, Come risolvere i problemi di matematica, Feltrinelli, 1967.

[25] G. Polya, La scoperta matematica, voll. 1/2, Feltrinelli, Mi, 1983.

[26] G. Sambin, Alla ricerca della certezza perduta. Forma - contenuto nei fondamenti della matematica, Atti del Convegno sul tema "Forma, rappresentazione, struttura", organizzato dall'Istituto Italiano per gli Studi Filosofici e dall'Universitá degli Studi di Padova, Padova, 3 - 6 Dicembre 1986.

[27] F. Speranza, Nuove prospettive per la Geometria nelle Scuole Superiori. 1, Nuova Secondaria, n. 8 (15 aprile 1990), pp.73 - 75.

[28] F. Speranza, Nuove prospettive per la Geometria nelle Scuole Superiori. 2, Nuova Secondaria, n. 9 (15 maggio 1990), pp. 65 - 67.

[29] F. Speranza, La razionalizzazione della geometria, lavoro eseguito nell'ambito delle attivitá finanziate dal M. P. I. (Progetto "Ricerche teoriche e sperimentali sull'insegnasmento della Matematica") e dal Comitato per le Scienze Matematiche del C. N. R. (contr. n. 8800297.01).

[30] A. Tarski, Veritá e dimostrazione, Le Scienze, Numero 50, Ottobre 1972, pp.70 - 79.

---

* Gli articoli [8]*, [9]*, [10]*, pubblicati o resi disponibili tra la presentazione di questo lavoro e la pubblicazione del Quaderno, sono stati citati data la forte pertinenza al tema.

IL RUOLO DELLE SOSTITUZIONI NELL' INSEGNAMENTO / APPRENDIMENTO. (**)

PASQUALINA MARGIOTTA (*)

1. - INTRODUZIONE.

La Logica, considerata da Piaget come modello che consente la completa formulazione delle operazioni mentali raggiungibili nei vari livelli di sviluppo, sta incontrando nella Scuola grande interesse: nei **Programmi Didattici per la Scuola Elementare** si parla di Educazione logica intesa come argomento di riflessione e di cura continua da parte dell'insegnante piuttosto che come oggetto di insegnamento esplicito e formalizzato, onde favorire e stimolare lo sviluppo cognitivo del fanciullo e scoprire eventuali carenze o difficoltà; nei **Nuovi Programmi per la Scuola Media del '79** ([39]), si punta l'attenzione sull' opportunità di concorrere alla chiarificazione del linguaggio e del pensiero logico attraverso una riflessione sull'uso dei connettivi, in considerazione del particolare momento evolutivo dell'allievo che gradualmente passa da

---

(*) I.P.S.I.A., Vl. S. G. Bosco, Galatina, (Le). - Membro del Nucleo di Ricerca Didattica - Progetto M.U.R.S.T. 40% - " Ricerche di Matematica ed Informatica per la Didattica", operante presso il Dipartimento di Matematica dell' Università di Lecce.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito delle attivita' del Nucleo e presentato in un seminario nel quadro delle attivita' del Progetto Pluriennale di ricerca: "Collaborazione tra Universita' e Scuola Secondaria Superiore, Problemi Culturali e didattici nei nuovi programmi di Matematica ed Informatica per la S.S.S.- Aggiornamento, ricerca e sperimentazione" nell' a.a. 1990 / '91.

modelli concettuali intuitivi e naturali a modelli più formali (cfr.[2]). Nella scuola dell'obbligo, però, l'attenzione è più rivolta agli aspetti semantici che non a quelli sintattici.

Nei **Programmi del Biennio della Scuola Secondaria Superiore** si avverte la spinta nelle direzioni della matematizzazione della realtà e della formalizzazione, direzioni che anziché contrapporsi si intrecciano tra loro con reciproco vantaggio, arricchendo e completando la valenza formativa dell' insegnamento matematico.

L'uso dei linguaggi di programmazione, nei quali la logica dei predicati diventa strumento per descrivere problemi, fa acquisire un risvolto decisamente operativo alla trattazione della Logica.

La pratica del calcolatore rende continuamente necessaria la distinzione tra aspetti linguistici e metalinguistici, tra livello sintattico e livello semantico.

Secondo H. Poincaré, in matematica, occupandoci delle relazioni tra enti ci interessiamo degli aspetti riguardanti le forme delle scritture piuttosto che della natura degli enti stessi, dal momento che è possibile sostituire alcuni enti con altri lasciando inalterate le relazioni.

Da questo punto di vista appare utile la trattazione di aspetti riguardanti la forma delle scritture e le regole che consentono il passaggio da una rappresentazione ad un' altra.

Ciò richiede una corretta manipolazione ed una gestione consapevole di simboli, attività, queste, sulle quali ancora ci si interroga per stabilire se si tratta del frutto di abilità acquisite o di capacità innate.

2. - SOSTITUZIONI : GENERALITÀ.

Le sostituzioni (ss) introdotte in Logica Matematica (cfr.[34]), costituiscono una "soglia" sulla quale inciampano i logici, e pertanto sono argomento di studio approfondito come oggetto matematico.

Le ss, i cui caratteri essenziali sono:

(CI) Configurazione Iniziale,
(CD) Codice,
(CF) Configurazione Finale,

si possono classificare (cfr. [18]) in ss **dirette** (assegnati CI e CD, determinare la CF) e ss **inverse** (assegnate CI e CF, determinare il CD).

La complessità del CD dipende dal numero di enti presenti (univoco, o plurivoco) e dal suo modo di operare sulle configurazioni assegnate.

Il **CD** può essere:
rilevante (se modifica la CI dando luogo ad una CF diversa, per es.

[CI] PASTA, [CD] P = C , [CF] CASTA),

irrilevante (se non modifica la CI, per es.

[CI] PASTA, [CD] B = Z , [CF] PASTA),

o **ambiguo** (se opera su enti ripetuti o già presenti, per es.

[CI] PASTA, [CD] A = S , [CF] PSSTS, PASTS, PSSTA, PSATS).

3. - SOSTITUZIONI E APPRENDIMENTO.

E' noto che tre sono i **requisiti principali per l' apprendimento: motivazione, attenzione, imitazione**. In queste note non ci si vuol soffermare su di essi in quanto molto è stato scritto e detto in sedi più idonee (per es. cfr.[1], [11], [15], [26], [28], [31], [32], [35], [37]); piuttosto, si vuol puntare l'attenzione su altri aspetti, meno noti ma particolarmente significativi ai quali è opportuno dare adeguato risalto.

Ai requisiti su citati occorre aggiungere la **discriminazione uditiva** che spesso incide in maniera determinante sull' apprendimento, in quanto un deficit uditivo può provocare, in relazione all' entità, un ritardato, mancato, o alterato sviluppo del linguaggio.

Un ritardo semplice del linguaggio comporta difficoltà a livello fonologico e fonetico; un ritardo specifico del linguaggio, invece, comporta alterazioni a livello fonetico, fonologico, sintattico, lessicale, semantico .

E' interessante rilevare, senza entrare in questioni tecniche, che dal punto di vista logopedico (cfr.[12]) la **sostituzione** intesa come **produzione di un suono linguistico diverso da quello richiesto** (per esempio cane → tane) rientra (assieme con l'omissione e la distorsione) tra i **disturbi fono-articolatori** ed è un **processo fisiologico e patologico**:

- **fisiologico**, legato allo sviluppo e all'evoluzione del linguaggio che avviene nei primi 4-5 anni di vita del bambino (**dislalie evolutive**: per es. **sole** diventa **tole**);
- **patologico**, il cui campo di applicazione è estremamente vasto e complesso, basti pensare alla **dislalia** (disturbo fono-articolatorio che permane dopo i 5 anni, in cui si ha la sostituzione di fonemi, per es. **l** al posto di **r**), alla **dislessia** (in cui si sostituiscono i grafemi), alla balbuzie, ecc...

Questo mostra come i concetti logici di sostituzione intervengano nella diagnosi precoce di difficoltà e carenze.

Nell'insegnamento / apprendimento, le ss rivestono un importante ruolo al quale occorre dare adeguato risalto in quanto esse intervengono, spesso inconsapevolmente, nell'interazione concreto - astratto, nel passaggio da una rappresentazione ad un'altra, e si rivelano essere un "termometro" sensibile alla determinazione di carenze cognitive.

A questo proposito è necessario chiarire **cosa intendere**, in queste note, per **soggetti con difficoltà di apprendimento in contesti d'insegnamento / apprendimento**: concordando con il pensiero di S.Soresi (cfr. [9],[35],[36]), intendiamo riferirci a **soggetti con doti intellettive normali, ma con difficoltà nell' apprendimento della matematica** (non a soggetti demotivati), cioè **con difficoltà in settori specifici; soggetti**, quindi, **con abilità normali** in tutti gli ambiti **tranne che in alcuni aspetti**, per es. **nel settore logico-matematico, e che richiedono interventi educativi mirati e centrati sul tipo specifico di difficoltà.**

Per **difficoltà logico-matematiche** intendiamo:

- difetti di logica in relazione alle sintesi spaziali;
- difficoltà nella progettazione dell' azione per la soluzione di un problema;
- difficoltà nella perseveranza di procedure (attività che facilita il mantenimento dell'apprendimento, anche se ostacola la generalizzazione);
- difficoltà di calcolo.

Alcuni materiali didattici incentrati sulle sostituzioni, tendenti ad indagare sulle capacità/abilità di effettuare ss, somministrati a ragazzi di scuola media (per i dettagli si rimanda a [22]) hanno fornito interessanti indicazioni e stimoli evidenziando che alcune difficoltà nell'apprendimento possono essere determinate dall' insufficiente comprensione dei meccanismi di sostituzione che consentono il passaggio da una rappresentazione ad un'altra.

A queste difficoltà si possono aggiungere problemi percettivi, espressivi e di comunicazione, che incidono in modo rilevante sull'apprendimento, generalmente determinati da:

- disturbi nella percezione di relazioni spaziali;
- disturbi motori e percettivi;
- difficoltà linguistiche;
- difficoltà di memoria (a breve o a brevissimo tempo);
- difficoltà a livello di pensiero rappresentativo.
- esperienze inadeguate d'insegnamento,

Dall'analisi dei materiali testati sono emerse, infatti, fondamentalmente:

- difficoltà linguistiche (insufficiente comprensione di semplici testi);
- non adeguata comprensione /acquisizione del concetto di sequenza di simboli o parole;
- difficoltà nel riconoscere elementi variabili ed elementi costanti (aspetto fondamentale per avviare un discorso di tipo informatico);
- difficoltà nell'effettuare sostituzioni simultanee, da cui la necessità di svolgere attività con le sequenze, effettuando sostituzioni nelle stesse, giungendo alla sostituzione simultanea di più elementi;
- difficoltà nel seguire istruzioni;
- difficoltà nella comprensione della distinzione tra scambi e sostituzioni;
- problemi di lateralizzazione.

I materiali testati hanno offerto una significativa correlazione tra l'incapacità di effettuare correttamente sostituzioni e difficoltà nell' apprendimento sul piano generale, nonché nella percezione visiva, nell' orientamento spaziale o temporale, nella lateralizzazione in generale, e nelle capacità espressive.

Da ciò, la necessità di indagare fin dai primi giorni di scuola in tale direzione, per individuare carenze e/o difficoltà di questo tipo ([38]),intervenire adeguatamente, stimolare e favorire lo sviluppo delle capacità logiche dell' allievo (cfr.[11],[15], [16],[28],[29],[30],[31]).

4. - SOSTITUZIONI E INTERDISCIPLINARIETÀ.

Le ss non trovano un'esplicita collocazione nei Programmi della scuola dell'obbligo, compaiono solo in quelli per la Scuola Secondaria Superiore, eppure i ragazzi le incontrano e le manipolano più spesso di quanto non si possa immaginare, sia in ambiti non scolastici (es. sostituzione di una lampadina, di una foto in un album, ecc.), che in molteplici attività didattiche delle varie discipline in tutto l'arco scolare.

In molti casi, il concetto di sostituzione è già presente nei ragazzi, anche se non ben definito: l'insegnante può e deve valorizzarlo richiamandolo all'attenzione quando interviene, in situazioni anche non matematiche. Per questo è interessante mettere in luce, nello svolgimento delle varie materie, la presenza delle sostituzioni.

La gestione corretta e consapevole delle ss può facilitare la comprensione e l'acquisizione dei contenuti in una **visione interdisciplinare intesa come fatto intrinseco di ogni conoscenza.**

Applicazioni delle ss s' incontrano, infatti, in vari campi (per i dettagli si rimanda a [23]) e rivestono una grande importanza didattica e scientifica:

- in Geografia: il larghissimo e disinvolto uso di notazioni convenzionali (codici) per sostituire elementi della realtà (per es.[7],[8],[14]) richiede una gestione rigorosa delle ss per la corretta lettura e interpretazione di una carta geografica,di una piantina,ecc.; scale numeriche e grafiche, coordinate geografiche, strumenti statistici quali istogrammi, areogrammi, ideogrammi, diagrammi cartesiani, sono rappresentazioni grafiche che diventano significative e leggibili solo quando si associa loro un codice di lettura (la legenda): sostituendo anche un solo elemento di essa si può modificare radicalmente la situazione.

- in Storia: rappresentazioni visive, mediante diverse colorazioni di regioni, dell'intensità di determinati fenomeni (per es. la densità di popolazione) o di situazioni (per es. l'estensione dell' Impero Romano) (per es.

[3],[13]); drappi di uno o più colori (bandiere) associati secondo ben precisi disegni dalla configurazione geometrica talvolta piuttosto complessa, richiedono una corretta interpretazione dei codici di lettura;

- in Lingua: i linguaggi verbali e non verbali presentano una casistica molto vasta di applicazioni di sostituzioni, per es.l'elisione, l'apocope, ecc.(cfr.[10],[24],[25]).

- in Educazione Musicale: le ss intervengono nella valutazione della correttezza di una battuta in un tempo prefissato: ad una misura si sostituisce un gruppetto di note di valore complessivo equivalente, per es. ad una minima si sostituiscono due semiminime, oppure due crome ed una semiminima; inoltre, le attività con le ss favoriscono: - la simbolizzazione di suoni e rumori con l'invenzione di forme spontanee di notazione; - la registrazione grafica, mediante segni convenzionali, della durata e delle caratteristiche di un evento sonoro; - l'adozione di sistemi "facili" per la lettura e l'interpretazione.
Anche l'operazione di "trasporto di tonalità" è un problema da affrontare con ss.

- in Matematica, tra le innumerevoli applicazioni, ricordiamo:
  -- le ss (una inversa ed una diretta) necessarie per individuare frazioni equivalenti ad un frazione assegnata;
  -- le trasformazioni geometriche;
  --le ss di costanti (valori numerici,espressioni letterali o numeriche) alle variabili che intervengono nelle formule esprimenti relazioni tra enti geometrici e algebrici.
  -- le ss intervengono nella trasformazione di un'equazione del tipo

$$(*) \qquad (2x^2 - x - 4)^2 = (x^2 - x - 1)^2$$

in modo da poterla risolvere applicando la legge di annullamento del prodotto: assumendo la (*) come configurazione iniziale (CI) e applicando il codice

(CD) $$\begin{cases} A = 2x^2 - x - 4 \\ B = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

si ottiene la configurazione finale :

(CF) $$A^2 = B^2 \quad ,$$

da cui :

$$(3x^2 - 2x - 5) * (x^2 - 3) = 0$$

e quindi :

$$(x + 1)*(x - 5/3)*(x + \sqrt{3})*(x - \sqrt{3}) .$$

-- Inoltre, le ss intervengono profondamente nello studio delle relazioni nella determinazione dei domini semantici, nel passaggio dalla rappresentazione insiemistica della relazione a quella sagittale; sono essenziali per la formulazione di alcune leggi fondamentali della Logica Matematica, quali la caratterizzazione assiomatica dell' uguaglianza tra le relazioni di equivalenza:

per ogni x,y $(x = y \rightarrow (A(x,x) \rightarrow A(x,y)))$

(Principio di Indiscernibilità degli Identici).

--In campo algebrico, le ss conservano le operazioni di (+) e di (*) rivelando la propria natura di **omomorfismo**, per es.

(CI) $x + 2 * x * y \quad ,$

(CD) $x = 4 , \quad y = 3 \quad ,$

(CF) $4 + 2 * 4 * 3 \quad .$

-- Esse intervengono, inoltre, in: equazioni, sistemi, disequazioni algebriche, espressioni letterali; metodo di sostituzione, ...

E' importante sottolineare come il problema della soddisfacibilità porti con sè la sostituzione con costanti.

Manipolando opportunamente le sostituzioni e familiarizzando gradualmente con variabili e costanti, è possibile acquisire consapevolezza nella determinazione dei domini semantici, usare in modo adeguato e preciso alcuni strumenti tecnico-matematici, superare alcune difficoltà operative e introdurre concetti importanti, quali, ad esempio, quello di funzione e della sua rappresentazione grafica, in modo molto naturale (per i dettagli si rimanda a [21]), anche senza richiedere particolari prerequisiti matematici.

5. - CONCLUSIONI.

L'attenzione alle sostituzioni come "oggetto matematico" non è finalizzata ad uno sterile arrichimento delle materie curriculari, ma vuol recuperare il ruolo che le ss hanno di significativo ed efficace "organizzatore intrinseco" delle varie discipline.

Nell' insegnamento / apprendimento le ss intervengono nell'evoluzione del linguaggio e ricoprono un significativo ruolo didattico contribuendo a migliorare sia la comprensione dei metodi e dei ragionamenti (matematici e non) che l'acquisizione dei contenuti, favorendo e stimolando lo sviluppo cognitivo dell'alunno.

Pertanto, è consigliabile rendere partecipi delle problematiche tutti gli insegnanti curriculari per individuare comuni strategie didattiche mirate ad aiutare i ragazzi nel processo di astrazione, nella concettualizzazione e nella matematizzazione della realtà.

BIBLIOGRAFIA

[1] **D.P. AUSUBEL**, Educazione e processi cognitivi. Guida psicologica per gli insegnanti., Edizione ital. a cura di D.Costamagna, Franco Angeli Editore, Milano, 1983.

[2] **F. Arzarello**, La logica nella scuola media, Atti del Convegno 'Matematica e sue applicazioni nell'insegnamento della scuola secondaria (11-19 anni)', L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,Vol.12 N.2- Febbr.1989.

[3] **C. CARTIGLIA**, Uomini Fatti Storia,1°, Loescher ,Torino 1989.

[4] **F. CATINO - M. MICCOLI**, Le sostituzioni e i colori , Giochi nella scuola d'infanzia, preprint.

[5] **V. CHECCUCI - G. PRODI**, Proposte didattiche per la Matematica, La Scuola, Brescia 1983.

[6] **A. CHIRENTI - C. MARCHINI**, Le sostituzioni con l'ausilio del calcolatore, Informatica, Telematica e Scuola, 2, n.4, Luglio 1988, pp.14 - 22.

[7] **G. CORBELLINI**, Il Marcopolo : Italia ,Marietti Scuola, Casale Monferrato, 1990.

[8] **G. CORBELLINI**, Il Marcopolo : Strumenti, Marietti Scuola, Casale Monferrato, 1990.

[9] **C. CORNOLDI - S. SORESI**, La diagnosi psicologica nelle difficoltà di apprendimento, ERIP Editrice, Pordenone, 1980.

[10] A. DIATTO - R. MORTARA, Come parli, come scrivi. Schede per l'accertamento della competenza linguistica all'inizio della prima media, G.B. Petrini, Torino, 1979.

[11] G. DI STEFANO, Lo sviluppo cognitivo, Giunti Barbera, Firenze, 1973.

[12] F. Fanzago, Trattamento logopedico delle dislalie e delle insufficienze velo-faringee, Quaderno di Acta Phoniatrica Latina n.2, Padova, 1983.

[13] G. FERRARI - A. MARINELLI - G. MONTI, Pagine del Tempo, 1°, Istituto Geografico De Agostini, Novara, 1986.

[14] G. FORTE - M. TANARA UBERTAZZI, Geografia, 1°, Istituto Geografico De Agostini, Novara,1989.

[15] J. LANGER, Teorie dello sviluppo mentale, Giunti Barbera, Firenze, 1973.

[16] R. MAGER, Gli obiettivi didattici, Lisciani e Zampetti, Teramo, 1977.

[17] C. MARCHINI, Le Sostituzioni e la didattica della Matematica, Bollettino U.M.I.(7) 4-A , 1990 , pp. 145 - 153.

[18] C. MARCHINI, Le sostituzioni e le relazioni, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 13 - n.7, Luglio 1990, pp. 732 - 744.

[19] C. MARCHINI, Attività del Gruppo di Lecce nella Didattica della Logica per le scuole primarie, Atti del XII Incontro di Logica Matematica, Roma 6 - 9 Aprile 1988, (1989), pp.255 - 260.

[20] C. MARCHINI, Modelli e Logica, Atti del Convegno su Matematica e sue Applicazioni nell' Insegnamento della Scuola Secondaria (11-19 anni), Marina d'Aurisina, 27-29 Ottobre 1988, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 12 - n.2 , Febbr. 1989, pp. 187 - 192.

[21] P. MARGIOTTA, Sostituzioni e Cubiche in prima media: una proposta didattica, L' Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 13 - n.4, Aprile 1990, pp.427 - 438.

[22] P. MARGIOTTA, Un' esperienza con le sostituzioni nella Scuola Media, La Matematica e la Sua Didattica, Anno V, n.2, Aprile - Giugno 1991, pp. 32 - 36.

[23] P. MARGIOTTA, Le sostituzioni in un' ottica inter-disciplinare, L'Educazione Matematica, Anno XII-, Serie III, Vol. 2, n.1 - Aprile 1991, pp. 23 - 44.

[24] F. MARIUCCI MARINI, Il Primo Libro :40 schede di verifica, G. D'Anna, Firenze,1988.

[25] F. MARIUCCI MARINI, Il Primo Libro.L'Educazione Linguistica, G. D'Anna, Firenze, 1988.

[26] A. MEDNICK SARNOFF, Psicologia dell' apprendi-mento, trad. e present. di P. Tampieri, Martello, Milano, 1971.

[27] E. MENDELSON, Introduzione alla Logica Matematica, Boringhieri, Torino, 1972.

[28] P. OLERON, Le attività intellettive, Giunti Barbera, Firenze, 1973.

[29] M. PELLEREY, Progettazione Didattica, S.E.I., Torino, 1984.

[30] **J. PIAGET**, I meccanismi percettivi, Giunti Barbera, Firenze, 1975.

[31] **C. PONTECORVO - M. PONTECORVO**, Psicologia dell' Educazione. Conoscere a scuola, Il Mulino, Bologna, 1986.

[32] PROCESSI di apprendimento e applicazioni psicologiche, Scritti di: Adelman, Barp, Calegari,... A cura di C.Cornoldi, Franco Angeli Editore, Milano, 1983.

[33] **G. PRODI**, Processi cognitivi e apprendimento della Matematica nella Scuola Elementare, La Scuola, Brescia , 1984.

[34] **H. RASIOWA - R. SIKORSKI**, Mathematics of metamathematics, PWN, Warszawa, 1963.

[35] **S. SORESI**, Guida all' osservazione in classe, Giunti Barbera, Firenze, 1983.

[36] **S. SORESI - G. TAMPIERI - L. DOMENIS**, Griglia per l'esplorazione delle abilità di base, ERIP Editrice, Pordenone, 1985.

[37] **E. TOLMAN**, L' uomo psicologico. Saggi sulla motivazione e l'Apprendimento, Ed. ital. a cura di C. Cornoldi ed E.Sanavio, Milano, 1976.

[38] **A. VARI**, Nuovi esercizi di prelettura e prescrittura, La Scuola, Brescia,1979.

[39] **C. VENTURI**, Programmi e Programmazione: Scuola Media Anni 80, Zanichelli, Bologna, 1982.

[40] **P. VIGHI - M. MICHELOTTI VENE' - P. AVANZINI FERRABINI**, La statistica e i mass media, La Matematica e la sua Didattica, Anno II, n.2, Maggio - Agosto 1988, pp 33- 40.

Le definizioni e le convenzioni, un problema didattico.(*)

Carlo Marchini (**)

Introduzione. Il tema prescelto può sembrare poco stimolante, ma a mio parere è assai profondo ed ha notevoli influenze sulla didattica in quanto la comprensione delle definizioni e delle convenzioni influisce fortemente sull'apprendimento. Scrivendo queste note ho pensato ad una loro fruizione per docenti di Scuola Secondaria Superiore, però le riflessioni sull'argomento possono essere utili anche ad insegnanti di altri tipi di scuola.

Inizio traendo spunto dalla conversazione con una collega [1]; secondo la sua esperienza, che per altro credo condivisa da chi insegna Matematica nei primi anni di Facoltà scientifiche. Alcuni studenti pur esperti risolutori di esercizi, si trovano imbarazzati nel "gestire" i concetti mediante definizioni ed i simboli usando le notazioni, senza giungere a comprendere cosa farne, come giustificarne la presenza e l'uso, talvolta confondendo definizioni con dimostrazioni [2]. E' troppo facile darne colpa all'insegnamento pre-universitario: il problema ha radici profonde e non ne esiste un rimedio semplice.

La mia tesi è che le difficoltà palesate dagli studenti nascano da ostacoli epistemologici. Senza dubbio una maggiore attenzione al tema eviterebbe gli errori più grossolani. Ma c'è da chiedersi se, come e quanto è utile che i docenti "perdano tempo" per fare riflettere gli allievi sull'argomento, vista anche la quantità di nozioni previste dai programmi e soprattutto, la sventurata articolazione *sperimentale* dell'esame di maturità. Certo, un'analisi delle notazioni e delle definizioni, delle modalità

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività di ricerca finanziate con contributi MURST 40% e 60%.

(**) Indirizzo: Carlo Marchini, Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Strada D'Azeglio 85/A - 43100 - PARMA

1 La Prof. D. Monteverdi, Docente di Istitutioni di Matematica per Scienze Biologiche a Parma, che qui ringrazio per le fruttuose discussioni sul tema.

2 Questa confusione purtroppo non è solo degli studenti. Si pensi ai manuali che per *definire* la potenza con esponente zero, a^0, fanno una piccola "dimostrazione" osservando che $1 = a^2 : a^2 = a^{2-2} = a^0$.

di introduzione e dei loro usi può avvenire solo al termine del corso di scuola superiore, in quanto è un tipico esempio di quella richiesta, prevista dai nuovi programmi, di riesame critico su quanto si è appreso. Per svolgere questa attività dai forti connotati filosofici è indispensabile un'intensa sinergia tra docenti di Matematica, Lingua, Storia e di Filosofia. Mi rendo conto che si tratta di un'utopia che si scontra con le difficoltà di linguaggio tra insegnanti di formazione diversa. Temo però che l'ostacolo maggiore sia la disattenzione, su temi di vasto respiro, di una scuola i cui ultimi tre anni sembrano finalizzati al superamento della prova di Maturità divenuta insufficiente per i collegi professionali e le Università, vista la richiesta sempre più diffusa di esami di ammissione.

Ciononostante il mio lavoro ha la presunzione di fornire qualche indicazione didatticamente utile e stimolante. Esso è articolato in quattro sezioni: nella prima introduco gli aspetti logici ed epistemologici delle definizioni, nella seconda approfondisco la differenza tra definizioni e notazioni, nel terzo paragrafo tratto alcuni aspetti più didattici, il quarto è dedicato ad alcune considerazioni conclusive. L'argomento delle definizioni viene qui trattato da un punto di vista generale. Non mi soffermo sui vari tipi di definizione che potrebbero da soli essere argomento di un altro articolo.

1. Aspetti logici ed epistemologici delle definizioni. Lo stile con cui oggi si parla di Matematica è quello di matrice euclidea (e quindi aristotelica) in cui il linguaggio si articola utilizzando termini definiti a partire da termini primitivi. L'origine e le motivazioni possono essere ritrovate nel testo degli Analitici Secondi di Aristotele [3]: una *Scienza deduttiva* è costituita da un insieme S di enunciati tale che:

I) POSTULATO DI REALTÀ. Ogni enunciato di S deve riferirsi ad uno specifico dominio di enti reali.
II) POSTULATO DI VERITÀ. Ogni enunciato deve essere vero.
III) POSTULATO DI DEDUTTIVITÀ. Se certi enunciati appartengono ad S, ogni conseguenza logica di questi enunciati deve appartenere a S.
IV) POSTULATO DI EVIDENZA (per termini). Ci sono in S un numero (finito) di termini tali che

3 Tratto da E.W. Beth, **The foundations of Mathematics**, North Holland, Amsterdam, 1959.

(a) il significato di questi termini è ovvio e non richiede ulteriori spiegazioni (termini primitivi);

(b) ogni altro termine è *definibile* per mezzo di questi termini.

V) POSTULATO DI EVIDENZA (per assiomi). Ci sono in S un numero (finito) di enunciati tali che

(a) la verità di questi enunciati è ovvia e non richiede ulteriori dimostrazioni (assiomi);

(b) la verità di ogni altro enunciato appartenente ad S deve essere stabilita mediante l'inferenza dagli enunciati dati (teoremi).

Le scritte tra parentesi sono una mia interpolazione. E' facile criticare oggi la presentazione di Aristotele, per la confusione tra linguaggio e metalinguaggio, per la mancata differenza tra aspetti semantici e sintattici, per le ipotesi ontologiche sottintese e per il privilegio dato al linguaggio, visto come strumento di conoscenza con funzione universale. Tuttavia le idee aristoteliche sono notevoli ed hanno permeato la Scienza da allora ai giorni nostri. Non analizzo ulteriormente cosa venga inteso per Scienza deduttiva nel suo complesso, ma mi soffermo sui punti che mi interessano di più.

I termini primitivi (come gli assiomi) sono posti per evitare un regresso all'infinito che toglierebbe valore conoscitivo alla scienza; altrimenti per comprendere ciò di cui si parla si deve interpretare correttamente tutto ciò che serve per giungere alla sua definizione, ma è impossibile in via di principio perché si dovrebbe avere una conoscenza infinita. Il mettere esplicitamente limiti al regresso fa pensare che, in linea di principio, attraverso il linguaggio sarebbe possibile un procedimento infinito in cui ogni ente trova una definizione a partire da concetti più semplici. Aristotele indica nell'evidenza (e nel buonsenso) il limite di tale analisi all'indietro. Ciò vuol dire scegliere tra gli innumerevoli enti quelli che hanno due connotati fondamentali: sono di significato ovvio e mi permettono di riottenere gli altri attraverso le definizioni. Il compito delle definizioni, in tale visione, è quella di servire come strumento per articolare una conoscenza *già posseduta*, per porre ordine ad una realtà che per altre strade è nota. Forse sotto questo aspetto è motivata l'interpretazione di J. Barnes [4] : «la teoria ... non viene mai intesa come uno strumento per guidare o

[4] J. Barnes, *Aristotle's Theory of Demonstration* in **Articles on Aristotle, 1. Science** a cura di J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, London, Duckworth, 1975, citato da C. Cellucci *La Logica fra Filosofia, Matematica e Informatica.* Notizie di Logica, anno X, n. 2/3 1991, 13 - 23

formalizzare la ricerca scientifica: riguardava solo l'insegnamento di fatti già acclarati.»

La trattazione euclidea della Geometria, forse perché nata con intenti didattici, si conforma largamente ai requisiti aristotelici, è però possibile rilevare un'importante differenza: le definizioni (e i teoremi) vengono introdotti geneticamente, vale a dire in una definizione intervengono soltanto termini definiti precedentemente, non quelli definiti successivamente (risp. vengono utilizzati nelle dimostrazioni teoremi precedentemente dimostrati). Ciò non viene chiarito dalla presentazione della Scienza deduttiva. Le possibili spiegazioni di siffatta "carenza" sono due, in antitesi: il procedimento è dato per scontato oppure non è necessario. Personalmente ritengo più probabile che Aristotele si conformi alla seconda ipotesi: le definizioni sono abbreviazioni di scrittura tutte eliminabili in favore dei termini primitivi, non importa il grado di "complicazione" raggiunto da una definizione, cioè quanto essa sia "lontana" dai termini primitivi, essa può essere sempre eliminata. Una definizione in cui intervengano enti che verranno definiti in seguito, anche se ciò potrebbe essere causa di circoli viziosi, è da ritenersi accettabile, purché sia possibile ricondurla ai termini primitivi. La prima ipotesi prevederebbe una sorta di "disattenzione" al tema metacognitivo che francamente non mi sembra si possa attribuire al nostro filosofo.

Il procedimento genetico è invece necessario se si attribuisce alla definizione un ruolo fondante della conoscenza. Essa è giustificata dalla richiesta di evitare i circoli viziosi che minerebbero la fiducia che solitamente si ripone in una scienza deduttiva.

Da un altro punto di vista, la scelta di termini primitivi e di assiomi conferisce un significato convenzionale alla conoscenza scientifica, o almeno alla sua presentazione in forma comunicabile. Nel convenzionalismo ricade ogni dottrina secondo cui la verità di una proposizione o di un insieme di proposizioni fisiche o matematiche dipende sempre da un precedente accordo (esplicito o tacito) stipulato da coloro che devono far uso di queste proposizioni. L'accordo può riguardare direttamente le proposizioni in questione (e ciò accade nella scelta delle assunzioni iniziali di un sistema deduttivo, siano esse assiomi o termini primitivi) o può riferirsi indirettamente ad esse tramite regole inferenziali opportune sulla cui base viene accettata o rifiutata la verità delle proposizioni. Nel convenzionalismo, pur ispirato o motivato dall'esperienza, l'esperienza stessa viene negata in modo assoluto in quanto la possibilità di decidere circa la verità della scelta di un gruppo di assiomi deve obbedire soltanto al postulato di deduttività.[5] Perciò il sapiente aristotelico non ha bisogno utilizzare il cannocchiale galileano perché sa, a priori, che le macchie solari non esistono, per definizione.

Non voglio dire che anche oggi il modo di guardare alle definizioni sia rimasto fermo alle concezioni dei greci: il modello concettuale odierno integra, ma non prescinde da quello antico.

Vengo ora ad una prima indicazione di carattere didattico: mi sorge spontanea la domanda se quel patto che il convenzionalismo richiede tra coloro che devono utilizzare gli strumenti matematici è mai stato esplicitato tra docente e studente o se è rimasto sempre tacito, da parte del docente, ed incompreso nella sua sostanza da parte del discente. Forse solo gli aspetti deleteri di questa posizione gnoseologica hanno trovato modo di attraversare la comunicazione didattica.

Ad esempio il convenzionalismo inibisce l'empiria, così se un problema è mal posto o mal compreso uno studente liceale può rispondere che qualora 10 kg di mele costino 8.000 lire, un kg di mele costa 0,00125 lire al kg, senza svolgere un controllo sui risultati, ispirandosi all'esperienza quotidiana. Analoga attitudine si incontra anche negli utilizzatori degli strumenti matematici, essi talvolta rifiutano i dati che non si accordano con modelli scelti a priori, abbandonando la difficile strada di adeguare i modelli alla realtà, preferendo piegare quest'ultima nelle strettoie di un trattamento matematico inadeguato.

Ci avviciniamo di più ai nostri giorni presentando un'analisi, in gran parte dovuta alla scuola filosofica polacca, Lésniewski e Tarski, che incentra la definizione nell'ambito logico. L'importanza di tale proposta consiste nel mostrare che le definizioni non si collocano solo in ambito linguistico come forse si può ritenere in un primo momento, ma in esse intervengono pesantemente aspetti sintattici [6]. Il punto di partenza è una teoria T espressa in un linguaggio L; non ha importanza se si tratta della logica del primo ordine o di ordine superiore. Ciò che ha rilevanza è che ci si muove in un contesto rigorosamente formalizzato. Sia **k** un simbolo non appartenente al linguaggio L. Limitandosi al primo ordine, **k** potrebbe essere una costante individuale, oppure un simbolo funzionale (operatore) o un predicato, ma ciò che segue si applica a tutti i casi. La richiesta che **k** non appartenga a L conferma che si procede geneticamente, di cui si diceva prima. Sia L' il linguaggio ottenuto con l'ag-

[5] Tratto da **Enciclopedia Garzanti di Filosofia.**

[6] Cfr. R. Rogers, **Mathematical logic and formalized theories**, North Holland, Amsterdam, 1971.

giunta del nuovo simbolo e sia φ una formula di L' contenente il nuovo simbolo, così $L \subseteq L'$ dunque ogni formula di L è anche formula di L'. Sia T' la teoria che ha per assiomi quelli di T e la formula φ. Perché φ possa essere considerata una definizione di **k** rispetto a T, si devono verificare le due seguenti condizioni:

(a) per ogni formula ψ di $L' - L$ esiste una formula ϑ di L tale che $\vdash_{T'} \forall(\psi \leftrightarrow \vartheta)$, avendo indicato col quantificatore universale una (la) chiusura universale della formula in parentesi;

(b) Per ogni formula α di L se $\vdash_{T'} \alpha$, allora $\vdash_{T} \alpha$.

La teoria T' così ottenuta si dice *estensione per definizione* di T.

Tale presentazione mutua dalle idee di Aristotele il primo requisito. Esso si interpreta come la *eliminabilità* della definizione in quanto ogni formula contenente il nuovo simbolo è dimostrabilmente equivalente ad una che in cui non compare il simbolo aggiunto. La seconda richiesta, sconosciuta nella presentazione aristotelica, sancisce la *non creatività* della definizione assunta come nuovo assioma: non si dimostrano in T' "vecchie" formule che non siano già teoremi di T. Il fatto che si definisca volta per volta un nuovo simbolo a partire da una teoria e dal suo linguaggio è garanzia di quel procedere genetico che impedisce i circoli viziosi. Una sostanziale novità è che l'ovvietà non è più il referente privilegiato per decidere quali siano gli enti da assumere come termini primitivi; la nozione di definizione dipende da una teoria vale a dire un insieme qualunque di formule (o enunciati).

Vedremo tra poco come sia possibile esplicitare le richieste distinguendo tra i vari tipi di simboli che vengono introdotti, voglio solo soffermare un attimo l'attenzione sul fatto che la definizione è data in relazione ad una teoria; pertanto una stessa formula può essere ritenuta una definizione rispetto ad una teoria e non rispetto ad un'altra e di ciò mostrerò un esempio. Una definizione non è solo un fatto linguistico, in essa entra pesantemente anche l'apparato dimostrativo, cioè le regole d'inferenza, e la scelta degli assiomi di una teoria.

Nella Logica del primo ordine si trattano separatamente i casi dei predicati, dei simboli funzionali e delle costanti. Se si vuole definire un predicato A, n-ario, La formula φ da aggiungere alla teoria T per definire un predicato A, n-ario, è data da $\forall x_1, \ldots, x_n\, (A(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \vartheta)$, ove $x_1, \ldots, x_n$ sono indeterminate distinte e la formula ϑ è formula del linguaggio L in cui sono libere, al più, solo le indeterminate $x_1, \ldots, x_n$. Se si deve aggiungere un simbolo funzionale f, m–ario ci sono due possibili modi diversi: il primo è quello di richiedere come formula φ la seguente $\forall x_1,\ldots,x_m,y(f(x_1,\ldots,x_m) = y \leftrightarrow \vartheta)$, ove $x_1,\ldots,x_m$, y sono indeterminate distinte e ϑ è formula del linguaggio L in cui sono libere, al più, solo le indeterminate $x_1,\dots, x_m,y$ ed inoltre la formula ϑ garantisce l'unicità, nel senso che $\vdash_T \forall x_1,\dots,x_m \exists y \forall z(z = y \leftrightarrow \vartheta)$, con z indeterminata diversa dalle altre. Il secondo modo, forse quello più utilizzato, richiede la presenza di un termine t di L. In tal caso φ è la formula $\forall x_1,\dots,x_m(f(x_1,\dots,x_m) = t)$, purché in t compaiano, al più, le indeterminate $x_1, \dots, x_m$. Nel primo modo è essenziale la richiesta di unicità, altrimenti la definizione diviene creativa. Lo si mostra con un semplice esempio. Si consideri il linguaggio con un solo predicato binario che si scrive infisso, indicandolo col simbolo "<". La teoria T è data dagli assiomi di un ordine stretto totale e il simbolo (di operazione) "♥" è "definito" con la formula $\forall x,y,z(x \heartsuit y=z \leftrightarrow x<z \wedge y<z)$. Per l'unicità si deve provare in T la formula $\forall x,y \exists w \forall z(z=w \leftrightarrow x<z \wedge y<z)$ che non è un teorema di T in quanto che nel modello di T sui numeri naturali si ha $2<6 \wedge 3<6$ e pure $2<5 \wedge 3<5$, da cui $2 \heartsuit 3 = 6$ e $2 \heartsuit 3 = 5$, quindi $5 = 6$. Di più, si prova che la teoria T' ottenuta aggiungendo a T la formula φ, è contraddittoria, quindi in essa si possono dimostrare tutte le formule, anche quelle di L che non sono teoremi di T, pertanto la definizione è creativa.

Nel caso della definizione di una costante si possono seguire due strade, come per i simboli funzionali. Nel primo modo si usa una formula φ del tipo $\forall y(c=y \leftrightarrow \vartheta)$, ove y è l'unica indeterminata libera eventualmente presente in ϑ, formula del linguaggio L; bisogna però richiedere l'unicità nella forma $\vdash_T \exists y \forall z(z = y \leftrightarrow \vartheta)$, con z indeterminata diversa da y. Il secondo modo, solitamente più utilizzato, richiede che esista un termine t di L, in cui non compaiono indeterminate libere e la formula φ è data da $c = t$.

Per gli assiomi di una teoria ci si può chiedere se alcuni sono dipendenti da altri, problema che, come sappiamo, applicato sul problema del postulato delle parallele ha portato allo sviluppo delle Geometrie non euclidee. L'indipendenza di un assioma φ di una teoria T, si prova mostrando un modello di T ed un modello in cui sono veri tutti gli assiomi di T tranne φ. Una situazione simile vale per la definibilità: dato un simbolo **k** di un linguaggio L ed una teoria T in L, ci si può chiedere se **k** è definibile in T. Ciò avverrà se c'è in T una formula che possa essere utilizzata come una definizione di **k**, rispetto alla teoria T − **k**, cioè quella che si ottiene nel linguaggio privato di **k**, e senza gli assiomi in cui interviene **k**. Analogo è il problema di determinare quando un simbolo del linguaggio *non* è definibile, affrontato e risolto da A. Padoa nel 1900: il simbolo **k** non è definibile in T se esistono due modelli di T che differiscano solo per l'interpretazione di **k**. Dall'analisi del principio di Padoa, E.W. Beth ha tratto poi il suo famoso teorema del 1953. Per introdurlo [7] devo premettere cosa si intende per definibilità *implicita* ed *esplicita.* Tratto, per brevità, solo il caso dei predicati. Siano dati una teoria T espressa in un linguaggio L, un predicato n-ario A di L ed una formula α di L in cui compare il predicato A. Si dice che α definisce *implicitamente* il predicato A, rispetto alla teoria T, se considerato un predicato nuovo A' che non appartenga a L e considerata la teoria T nel linguaggio ampliato L' sia α' la formula ottenuta sostituendo in α tutte le occorrenze di A con A', si ha $\alpha \wedge \alpha' \vdash_T \forall x_1,\ldots,x_n(A(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow A'(x_1,\ldots,x_n))$, ove $x_1, \ldots, x_n$ sono indeterminate distinte e non sono libere nella formula α. Si dice invece che α definisce *esplicitamente* il predicato A, rispetto alla teoria T, se esiste una formula β di L in cui compaiono libere le indeterminate di α e pure $x_1,\ldots,x_n$ tale che $\alpha \vdash_T \forall x_1,\ldots,x_n(A(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \beta)$. Ebbene il teorema di Beth è l'affermazione che ogni simbolo implicitamente definibile è esplicitamente definibile.

Ritorno brevemente alle richieste di eliminabilità e non creatività delle definizioni. Sul piano logico questi requisiti sono essenziali, ma dal punto di vista epistemologico tale posizione è troppo riduttiva. Si possono giustificare le definizioni e le notazioni come strumenti suggeriti per realizzare economia di pensiero. Invece di ricordare e di utilizzare lunghe sequenze di simboli, si trattano gli stessi enti in modo compatto e sintetico risparmiando tempo, carta, energia, ma soprattutto memoria. Perciò le definizioni e le notazioni svolgono il ruolo di una sorta di stenografia del pensiero. Ma se il compito fosse solo questo, sarebbe poca cosa. Quando una definizione o una notazione sono ben scelte, esse rendono accessibili alla nostra intuizione intere aree del sapere matematico. Ne è un esempio clamoroso la definizione di gruppo introdotta da Galois per risolvere equazioni algebriche e che successivamente ha trovato applicazioni in quasi tutti i rami della Matematica ed anche al di fuori, come ben sanno i cristallografi e gli strutturisti chimici. Così pure si fa risalire alla notazione posizionale dei numeri naturali lo sviluppo della Matematica dal Rinascimento in poi. In conclusione, le definizioni sono logicamente non creative ed eliminabili, ma il contributo che danno alla conoscenza è enorme ed insostituibile, sono dunque creative e non eliminabili.

Il tema delle definizioni è poi motivo d'innesco di una polemica da tempo in atto tra scuole diverse di pensiero filosofico. La discussione si può riassumere nella do-

---

[7] Tratto da H. Hermes, **Einführung in die mathematische Logik**, Teubner, Stuttgart, 1969.

manda se la Matematica sia una scoperta o una invenzione. Sul tema fino ad oggi non ci sono risultati così chiari e conclusivi che fanno propendere per una posizione piuttosto che l'altra. Una verifica indiretta è data dal "successo" dei due approcci.

La Matematica cosiddetta classica è pensata come scoperta; in essa le definizioni sono semplicemente descrizioni di enti che esistono di per sé e delle mutue relazioni tra essi, anche se il linguaggio che uso per descriverli può essere manchevole. Pertanto sono logicamente possibili definizioni impredicative che per altri motivi, lasciano abbastanza perplessi. Dice H. Poincaré «Le definizioni impredicative sono definizioni mediante una relazione tra l'oggetto da definire e tutti gli oggetti di una certa specie della quale lo stesso oggetto da definire è supposto far parte (o almeno da alcuni oggetti che dipendono per la loro definizione dall'oggetto che deve essere definito». Un esempio è l'insieme di tutti gli insiemi: per costruirlo bisogna avere costruito tutti gli insiemi e quindi anche l'insieme cui tutti appartengono. Si tratta di un esempio centrale nell'analisi dei paradossi matematici proposta da Poincaré (ed anche da Russell col cosiddetto principio del *circolo vizioso*): nelle antinomie di Burali-Forti, di Cantor e nel paradosso di Russell si applica l'astrazione a formule impredicative.

Un esempio di impredicatività è fornito dalla definizione di estremo superiore di un insieme di numeri reali. Si dice *maggiorante* di un insieme A di numeri reali un numero $a \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in A$, $x \leq a$. Si dice *estremo superiore* di un insieme A di numeri reali il minimo dell'insieme dei maggioranti. Nella definizione compaiono un elemento, chiamiamolo b, ed un insieme, chiamiamolo B, cui b appartiene e la definizione di b richiede la conoscenza di B che si ha solo se sono noti tutti gli elementi di B, ma tra essi c'è proprio lo stesso b. C'è una specie di circolo vizioso che rende la definizione concettualmente poco chiara e scientificamente poco affidabile. Ma la nozione di estremo superiore è centrale nella teoria dei numeri reali: l'assioma di continuità dei reali si può formulare asserendo che ogni insieme superiormente limitato di numeri reali ha estremo superiore.

Se la Matematica si inventa, prima di "inventare" b devo avere "inventato" B cioè devo avere "chiamato all'esistenza" tutti i suoi elementi, tra cui b e ciò ha l'aspetto di un circolo vizioso. I risultati tradizionalmente insegnati nelle scuole superiori sui numeri reali, su derivate ed integrali sono tutti (o quasi) da scartare perché basati sulla continuità. Le ricostruzioni dell'Aritmetica e dell'Analisi in forma predicativa mostrano quanto sia difficile evitare trappole del genere, in agguato in vari contesti tradizionali. D'altra parte il sistema formale di teoria degli insiemi proposto da Von Neumann, Bernays e Gödel assume come uno dei principi fondamentali l'astrazione limitata alle formule predicative e questa limitazione è fruttuosa perché si può provare che il sistema è finitamente assiomatizzabile [8]. Si ricostruisce buona parte della Matematica in tale ambito, il che mostra come sia possibile fare a meno delle definizioni impredicative.

Se invece la Matematica si scopre, non c'è nulla di male nell'usare le formule impredicative, in quanto il ricorso alla totalità per definirne un elemento, come nella definizione di estremo superiore, dipende solo dalla incapacità umana di trovare altre definizioni che non incorrono nel "difetto" della impredicatività.

Il ruolo della definizione cambia drasticamente secondo la scuola di pensiero che si adotta. Nella Matematica classica la definizione serve a identificare con un nome un concetto importante di per sé, già esistente. Non tutte le definizioni hanno però la stessa "potenza" conoscitiva: la definizione ben scelta è come la chiave che permette di aprire nuove stanze nel palazzo iperuranio in cui hanno sede i concetti. «D'altra parte il nome non è meno importante della cosa. Il nome, dice Wittgenstein significa l'oggetto e l'oggetto è il suo significato; e nella proposizione il nome è il "rappresentante dell'oggetto"» [9].

Per coloro che ritengono che la Matematica si inventi, il primo momento ed anche più importante dell'invenzione è la nascita di una definizione che in un qualche senso deve contenere (nella sua chiusura convessa) i risultati che si possono poi dimostrare a partire da essa.

2. Differenza tra definizioni e notazioni. In quanto precede c'è una risposta al quesito sulle differenze tra definizioni e notazioni. Una notazione è limitata al fatto linguistico, una definizione ha dietro di sé una teoria logica, possibile traduzione di un concetto matematico. L'approccio qui esposto è volutamente e necessariamente grossolano e qualche esempio mi permetterà di chiarire meglio.

Solitamente le definizioni e le notazioni per le relazioni (predicati) si presentano nella forma definiendum $\leftrightarrow$ definiens. Le operazioni (simboli funzionali) e le costanti vengono introdotte secondo lo schema collaudato: definiendum = definiens. Nella scrittura compare un simbolo di eguaglianza che solitamente e

---

[8] Invece il sistema formale proposto Morse e Mostowski, che differisce da quello di Von Neumann, Bernays e Gödel solo perché ammette l'astrazione anche sulle formule non predicative, non è finitamente assiomatizzabile.

[9] Da S. Bajini, *Gli orribili giochi che si fanno con le parole*, Ca' de Sass, Milano, **116**, dic. 1991, 60–63.

giustamente ci si affretta a dire che non è una eguaglianza [10]. Ciò viene messo in mostra con simboli diversi: $=_{def}$, $:=$, $\stackrel{\Delta}{=}$. Invece che un'eguaglianza si tratta di una sostituibilità; il simbolo va letto: tutte le volte che mi serve posso sostituire una scrittura con l'altra. Pertanto la = relazione non è un'eguaglianza perché non è riflessiva, né transitiva. Non è neppure simmetrica nel senso stretto: si sostituisce una scrittura con un'altra solo in certi contesti dimostrativi. Ribadisco che ciò vale sia per le definizioni che per le notazioni, sicché le differenze non appaiono evidenti in questo contesto.

Un esempio. L'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sarà risolubile nei reali se

(*) $$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0.$$

Così scrivendo abbiamo introdotto il *discriminante* dell'equazione, che viene generalmente indicato con la lettera Δ. Lo schema definitorio è quello detto sopra, a sinistra c'è il simbolo nuovo, a destra l'espressione, meglio il termine, scritto con i simboli che compaiono in precedenza. Per essere super pignoli, bisogna osservare che Δ è una funzione dei coefficienti: bisognerebbe scrivere $\Delta(a,b,c)$. Adesso si può decidere se si tratta di una notazione o di una definizione. Se si tratta di una notazione, non ci sarebbe bisogno di utilizzare un nome proprio per denotare tale differenza. Basterebbe il simbolo. E' questo il sentire degli studenti che nel risolvere l'equazione parlano del *delta* . Dunque per essi la (*) non è una definizione, ma una notazione, non è un ente di una qualche importanza, solo uno strumento per la risoluzione. Quando l'insegnante propone ed insiste sul termine preciso di *discriminante,* il suo puntiglio non viene compreso, lo studente cerca di accontentarlo con lo stesso stato d'animo con cui si condiscende alle richieste di una persona non sana di mente. Forse per il docente la (*) è da ritenersi una definizione, in quanto fa riferimento alla teoria dei numeri reali e gli è noto che in ogni equazione algebrica il *discriminante* è un *risultante* della equazione e dell'equazione "derivata" [11]. La teoria T cui si fa riferimento è la teoria dei numeri reali, argomento irto di difficoltà.

---

[10] Cfr. A. Barnaba, M. Barnaba, A. Peluso, G. Russo, *Problemi didattici del concetto di eguaglianza*, in stampa su L'Educazione Matematica

[11] Ricordo che dati due polinomi $p(x)$ e $q(x)$, si dice *risultante* dei due polinomi una funzione razionale dei loro coefficienti, di grado minimo, che si annulla se e solo se essi hanno una radice in comune. Tale funzione è determinata a meno di un fattore di proporzionalità. Se si scrivono i polinomi come $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$, $q(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+ \ldots+ b_{m-1}x^{m-1} +b_mx^m$ un loro risultante è ottenibile col metodo dialitico di Sylvester dal determinante di ordine $n+m$

Da questo esempio si può cogliere la differenza tra notazione e definizione. La notazione resta a livello linguistico, non fa intervenire la teoria e i concetti che invece sono sottostanti la definizione. Una notazione ha aspetti particolari, ha un che di temporaneo in quanto serve in un certo contesto, ma nulla vieta che un simbolo introdotto con una notazione possa essere riutilizzato in seguito con altro significato. La definizione assume un aspetto più definitivo e tratta concetti universali: la si può ritenere una descrizione di un ente matematico che si manifesta all'attenzione dello studioso.

Raramente si riflette sulla strada che ha portato da una notazione ad una definizione ed è un'occasione didattica sprecata. La storia delle definizioni sarebbe molto interessante. Un esempio per tutti. All'inizio del calcolo differenziale col simbolo di integrale si denotava l'operazione inversa della derivazione (Barrow). L'approfondimento successivo del calcolo integrale ha trasformato la notazione in a definizione e questa nel teorema fondamentale del calcolo.

Inoltre la forma di intuizione che suggerisce una notazione è solitamente più superficiale e formale, meno sostanziale. Le notazioni sono suggerite dall'uso e richiedono che si sappia cogliere in varie occasioni una parte costante nelle scritture, spesso facendo uso della capacità di eseguire sostituzioni inverse, cioè quelle in cui si richiede il codice [12]. Si ha quindi ancora a che fare con l'eguaglianza e le sue

---

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Questo procedimento lo si applica alle equazioni. E' facile vedere che se il polinomio $p(x)$ ammette radici multiple, allora esse sono anche radice del polinomio $p'(x)$ ottenuto facendo la derivata prima di $p(x)$. Per trovare se $p(x)$ le radici multiple basta considerare un risultante tra $p(x)$ e $p'(x)$. Ad esempio se $p(x) = ax^2 + bx + c$, il polinomio derivato è dato da $p'(x) = 2ax + b$, per cui un risultante si ottiene dal seguente determinante di ordine 3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 2a & b \\ 2a & b & 0 \end{vmatrix}$$

Sviluppando il determinante si ha $2ab^2 - 4a^2c - ab^2 = a\cdot(b^2 - 4ac) = a\cdot\Delta$ che a meno del fattore di proporzionalità non nullo a è la solita espressione. Dato che $a \neq 0$, il determinante è nullo se e solo se $b^2 - 4ac = 0$, quindi l'annullarsi di questa espressione porta all'esistenza di radici coincidenti, date da $x = -\dfrac{b}{2a}$.

12 Per questi aspetti sulle sostituzioni si veda ad esempio C. Marchini, *Le sostituzioni e le relazioni*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate. **13** - n. 7 (Luglio 1990), 732 -

proprietà. Per la definizione bisogna essere in grado di padroneggiare oltre alla parte formale, anche la parte concettuale.

La distinzione tuttavia non è così grossolana come è qui presentata. Ci sono ambiti in cui solo una scelta opportuna di notazioni permette di procedere, prima fra tutti la già ricordata notazione posizionale per i numeri naturali. Per un altro esempio considero la 6-pla ordinata $\langle 1,2,4,0,6,7\rangle$ e ad essa associo la 6-upla ordinata $\langle 1,0,2,6,4,7\rangle$; considero poi la 9-pla ordinata $\langle 1,3,5,4,2,6,8,9,7\rangle$ e ad essa associo la 9-pla ordinata $\langle 1,4,8,3,2,9,5,6,7\rangle$. Il problema è quello di trovare un'*unica* espressione della legge che mi fa passare da una n-pla ordinata a quella associata. La risposta è più semplice di quanto non appaia a prima vista: invece di scrivere sotto forma di n-ple ordinate scrivo sotto forma di *matrici*: a $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 6 & 7\end{pmatrix}$ corrisponde $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 6\\ 4 & 7\end{pmatrix}$; a $\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 4 & 2 & 6\\ 8 & 9 & 7\end{pmatrix}$ corrisponde $\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ 3 & 2 & 9\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix}$; con tali notazioni è chiaro che l'operazione cercata è la *trasposizione*, cioè lo scambio delle righe con le colonne. La scrittura in forma di matrice, che in questo contesto è solo una convenzione, permette di risolvere semplicemente il problema. Ma le matrici, solitamente introdotte come uno schema di numeri, quindi come una notazione, hanno altre ragioni che le fanno ritenere un concetto da definire e non una semplice stipulazione.

Prima di lasciare l'argomento della differenza tra definizioni e notazioni, voglio osservare che quando si deve definire un'operazione non sempre le definizioni assumono la forma definiendum = definiens. L'esempio tratto dal lavoro A. Barnaba, M. Barnaba, A. Peluso, G. Russo già citato, è quello del logaritmo: $\log_a b = c$ se e solo se $a^c = b$. Si definisce il logaritmo (ed è una definizione perché il concetto è importante nel resto della Matematica, in quanto si tratta di un isomorfismo di $\langle \mathbb{R}^+,\cdot\rangle$ in $\langle \mathbb{R}, +\rangle$), mediante il primo modo previsto dalla trattazione di Lésniewski. Viene a mancare una prova di unicità, legata alla formula $a^c = b$. Lo stesso accade per il concetto di limite [13]. Il fatto che log e lim si presentino in detta forma, non sarà forse uno dei motivi delle difficoltà di apprendimento delle definizioni che traducono questi concetti ?

In entrambi i casi della definizione e della notazione il linguaggio gioca un ruolo di rilievo. E spesso una delle difficoltà dei discenti è quella di avere distinto tra i co-

---

744, oppure P. Margiotta, *Le sostituzioni in un'ottica interdisciplinare*, L'Educazione Matematica **12** (3) Vol. 2 (1 Aprile 1991), 23 - 44.

[13] Devo l'esempio al Prof. D. Lenzi di Lecce. Per il limite, solitamente si prova un teorema di unicità, che invece manca per il logaritmo.

dici linguistici del linguaggio comune e quello della Matematica. Se la differenza non è fatta propria, l'uso di esempi per chiarire una definizione può risultare controproducente [14]. Quando l'insegnante usa senza troppa attenzione locuzioni come "in parole povere" oppure "in pratica", scivola su un piano liguistico diverso da quello formale e matematico. E non è detto che lo studente sappia poi rielaborare in termini formali la "suggestione, fornitagli mediante considerazioni più intuitive, riconoscendo in essa la definizione data dall'insegnante.

3. Alcune considerazioni didattiche. Molto spesso gli sforzi dei docenti per far comprendere lo scopo di notazioni e definizioni portano lo studente a pensare: «Come sarebbe bello lasciar perdere alcuni degli ammassi di parole che ho imparato a scuola - imparato perché anche gli insegnanti devono pur vivere, suppongo» [15]. Ci si può chiedere quale sia la strategia migliore per favorirne l'apprendimento. Forse il docente che legge queste note penserà che tra i molti concetti importanti che la sua materia introduce, una meta-riflessione su come presentare i concetti mediante le definizioni sia un "lusso" che ci si può permettere solo in condizioni eccezionali. Ma ciò che propongo è così usuale e banale che forse riuscirà sorprendente. Lo strumento che suggerisco potrebbe essere indicato col nome di *strategia della stanchezza*. Credo si tratti di una tecnica poco usata, data la cronica carenza di tempo per svolgere il programma. Essa consiste nel non praticare "sconti", offrendo sempre esercizi che si risolvono... da soli, tanto sono ben congegnati. Inoltre il docente non dovrebbe anticipare i tempi, proponendo prima la soluzione dei problemi da ripetere come schema esercitativo, ma, nell'ottica del problem-solving, far giungere alle soluzioni. Soltanto ciò che si conquista con fatica è destinato a permanere. Se lo studente tocca con mano che l'introduzione di nuovi simboli permette semplificazioni al suo lavoro, apprezza e comprende l'uso delle definizioni e notazioni che gli si propongono, «avviando via via i giovani a lavorare da sé, a ricrcare da sé da scoperta delle verità, anziché porgerne loro la semplice notizia; aiutandosi, ove occorra, con qualche illustrazione storica per chiarire il senso dei problemi e dei

---

14 Cfr. G. Sacks, **Saturated Model Theory**, Benjamin, Reading, 1972, p. 4: «As a rule examples are presented by authors in the hope of clarifying universal concepts, but all examples of the universal, since they must of necessity be particular and so partake of the individual, are misleading» (Di regola gli esempi sono presentati dagli autori nella speranza di chiarire i concetti universali, ma tutti gli esempi dell'universale, poiché di necessità devono essere particolari e così prendono parte dell'individuale, sono fuorvianti)

15 Pensiero di C.H. Hinton riportato su R.Rucker, **La mente e l'infinito**, Franco Muzzio Ed., Padova, 1991.

metodi.» [16]. Diversamente tutto quanto gli viene proposto assume la stessa importanza, che spesso è quella di superare in modo soddisfacente la prossima interrogazione programmata.

Un esempio, in cui intervengono delle notazioni ben ... note. Si debba calcolare il prodotto di $8{,}25$ e $7{,}75$, oppure $42\cdot 38$, ci si accorge che $8{,}25\cdot 7{,}75 = 63{,}9375 = 64-0{,}0625 = (8+0{,}25)\cdot(8-0{,}25)$ e $42\cdot 38 = 1596 = 1600-4 = (40+2)\cdot(40-2)$ e da questi ed altri esempi comprendere l'importanza dell'eguaglianza $a^2-b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$,

Solo "smontando" i pezzi delle definizioni e delle notazioni, mediante contromodelli che ne facciano capire l'esigenza, è possibile affinare il linguaggio. Un semplice esempio. Se si vuole definire la relazione d'ordine stretto nei numeri naturali usando l'addizione, si potrebbe dire $n < m$ sta per $\exists p(m = n+p)$, sbagliando. La frase "sta per" è la doppia implicazione presente nella trattazione di Lésniewski per la definizione di un predicato. La teoria che interviene è l'Aritmetica con l'operazione di addizione. Il contromodello è offerto immediatamente considerando che tra i numeri naturali c'è anche 0, per cui dalla eguaglianza $0 = 0+0$ si ottiene $0 < 0$. Per questo controesempio è indispensabile "complicare" la scrittura del definiens ponendo $n < m$ sta per $\exists p(p \neq 0 \wedge m = n+p)$.

Nonostante la banalità, è assai frequente riscontrare errori del genere, sia negli studenti che nei libri di testo, errori originatisi da una specie di *horror vacui* che colpisce il numero 0. Si incontra ad esempio, su certi manuali, che 0 è un numero naturale, poi però si "definisce" il minimo comune multiplo di due numeri (ma anche di due polinomi) dicendo: $\mathrm{mcm}(p,q)$ è *il più piccolo* multiplo comune di p e q, senza specificare che qui "piccolo" non si riferisce all'ordine naturale, ma a quello della divisibilità, in cui 0 è il massimo (idem per i polinomi introducendo il grado). Ciò forse è originato da un malinteso senso di analogia con il il massimo comune divisore: $\mathrm{MCD}(p,q)$ è il massimo dei divisori comuni, sia che "massimo" si interpreti con l'ordine naturale, sia con la divisibilità e questa è una "fortuna" non sufficientemente apprezzata. Passando a mcm, viene spontaneo ripetere, mutatis mutandis, la definizione, cadendo così nel tranello teso da 0.

Avevo osservato nel primo paragrafo che una formula può essere una definizione rispetto ad una teoria e non esserlo rispetto ad un'altra. Qui ne abbiamo un esempio. Se si considera la formula $n < m \leftrightarrow \exists p(p \neq 0 \wedge m = n+p)$ rispetto

[16] Citazione dal R.D. 6 maggio 1923 n. 1054, in cui vengono presentati i programmi della scuola superiore riformata dal ministro G.Gentile.

all'Aritmetica ho la definizione di <, se si considera la stessa formula rispetto la teoria dei numeri interi relativi con le loro proprietà, non si ottiene il consueto ordine: $-6 = 2 + (-8)$, $-8 \neq 0$, ma non si ha $2 < -6$.

C'è grande differenza tra chi ha capito i motivi di una definizione e chi l'ha imparata a memoria solo per i motivi scolastici del momento. Questi due atteggiamenti si colgono immediatamente analizzando il linguaggio con cui lo studente risponde ad una domanda di chiarimento su una definizione. Chi la possiede è capace di ripeterla con i termini appropriati usati al posto ed al momento giusto, richiesto di esemplificazioni, è in grado di fornirne alcune diverse da quelle apprese dal docente. Chi è ancora lontano dalla comprensione usa termini che al più possono avere significati sinonimici, intercala spesso con l'avverbio "praticamente", perché quello che sa fare è usare la definizione "in pratica" negli esercizi standard, scambia spesso i ruoli dei soggetti con quelli dei predicati e sovente utilizza pezzi del definiens per esplicitare il definiendum, non sa fornire esempi propri. Se tale "patologia" viene riscontrata dal docente, passare sopra al problema porta alle situazioni lamentate all'inizio.

Nella scuola elementare si usano esercizi di definizione. Essi potrebbero utilmente essere ripresi alla scuola superiore. Gli esercizi sono del seguente tipo: un gruppo di bambini è incaricato di dare un nome una forma geometrica inconsueta. Viene poi invitato a spiegare ad un altro gruppo di bambini come disegnare la figura geometrica, senza però mostrarla. Il nome viene accettato se il disegno del secondo gruppo corrisponde alla forma geometrica in esame. Esercizi di questo genere si possono svolgere anche con argomenti diversi dalla Geometria.

Alle superiori l'esercizio potrebbe essere ripetuto proficuamente. Ad esempio il concetto di funzione si presta assai bene ad un'attività didattica per tentativi ed errori, che sostanzialmente ripercorra le tappe che hanno portato alla definizione attuale; in tal caso la storia sarebbe veramente maestra e porterebbe anche a capire come non si tratti di un concetto "sedimentato" da lungo tempo, ma ancora in fase di sviluppo. Un possibile itinerario didattico è quello che passa attraverso le operazioni, ad esempio l'addizione sui naturali, con il primo addendo fissato, vista come "macchina" che associa ad un numero un altro. E' però bene introdurre contemporaneamente un controesempio ottenuto considerando la relazione "è divisore di". Si possono analizzare in parallelo queste due situazioni in modo che gli studenti colgano nell'unicità del corrispondente di un elemento in una funzione il carattere distintivo tra le due corrispondenze. Passando al grafico cartesiano delle corrispondenze, consiglio di studiarne l'andamento. E' possibile estrapolare la situazione precedente passando alla operazione di addizione pensata come funzione binaria. Ripetendo gli esempi di funzione e di non-funzione, si può introdurre il concetto con una definizione giustificata dalle esperienze; bisogna però, come l'avvocato del diavolo, avere sempre pronti gli esempi (controesempi) che servano per mettere in discussione parti della definizione che possano sembrare banali. Un percorso siffatto potrebbe avvalersi degli "errori" dei matematici del passato, motivati dal loro modo di concepire l'argomento e dallo sviluppo dello strumento linguistico disponibile. Un procedimento del genere è analogo a quello esplicitato nel bel libro di I. Lakatos, **Dimostrazione e confutazione** edito da Feltrinelli.

Ed ancora prima di introdurre le derivate si possono trovare esempi di rapporti incrementali di funzioni in Geometria, in Fisica, ecc. Studiandone le proprietà più semplici dei rapporti e dei loro limiti si può giungere alla definizione di derivata, apprezzandone le ragioni. Ovviamente più i concetti sono astratti, più difficile è l'opera di concettualizzazione e di apprendimento da parte degli studenti.

Il nodo è dunque qui: l'abito formale imposto alle definizioni, spesso il solo che viene malamente appreso e ritenuto, non è un capriccio degli insegnanti, «perché anche gli insegnanti devono pur vivere», ma è l'esito di un processo che ha portato a tradurre concetti in parole, in formule di un opportuno linguaggio. Capire i limiti e la valenza del linguaggio, in una parola impadronirsi di una definizione, può essere fatto solo da chi ha fatto esperienza personale con i concetti sottintesi e ne ha fatto applicazione anche perché «Una Nozione Matematica definita esplicitamente non può essere compresa in tutte le sue ... sfaccettature dalla frase o dalla sequenza di frasi che si usano nella sua definizione» [17]. La comprensione avverrà solo quando l'ente il cui nome è dato mediante definizione, viene utilizzato con le sue proprietà senza bisogno di eliminarne la definizione. Basti pensare cosa succederebbe del sapere matematico se ogni volta che si applicano enti definiti si dovesse fare all'indietro il procedimento che li ha generati per giungere al livello dei termini primitivi: si provi ad esprimere l'eguaglianza, banale, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ applicando le definizioni degli integrali, dei limiti, delle funzioni, dei numeri reali e delle operazioni e delle relazioni su essi, dei numeri razionali e delle operazioni e delle relazioni su essi, per fermarsi ai numeri naturali ed alle loro proprietà. Il tempo per arrivare a scrivere questa eguaglianza eliminando le definizioni penso supererebbe

[17] A. Avantaggiati, *Argomentazioni per una didattica scientifica*, Quaderno del Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate, Roma, 1991.

abbondantemente il numero di ore da dedicare in un anno all'intero programma. Ma anche ci si riuscisse, verrebbe senza dubbio perduta la *banalità* della relazione divenendo anzi un difficile compito dimostrativo.

La dialettica sulla Matematica come scoperta o come invenzione, presentata sopra, non va sottovalutata. Essa è un vero e proprio nodo che può ostacolare la comprensione. Non credo che gli allievi abbiano la capacità di analizzare le cause delle difficoltà che incontrano con le definizioni; questo compito spetta al docente che non dovrebbe sfuggire alla presentazione di temi di filosofia della Matematica sull'argomento, visto che essi forniscono un aiuto all'apprendimento. Purtroppo è frequente l'impostazione della lezione "frontale" come strumento di trasmissione del sapere: l'insegnante enuncia concetti, li fa seguire da spiegazioni ed esempi, poi assegna gli esercizi sull'argomento e sul loro svolgimento valuta gli allievi. E' una tecnica didattica che ha grandi vantaggi, soprattutto di economia di tempo, ma nelle aule se ne vedono i limiti. Sovente i concetti non vengono analizzati dal punto di vista del loro sviluppo storico, delle possibili alternative, del loro inquadramento in ambito fondazionale, né vengono visti come risposta ad un bisogno ad un'indagine dai connotati filosofici.

4. Riflessioni conclusive. Ritengo di avere così dimostrato che il problema della natura della Matematica entra pesantemente nell'insegnamento, per esempio, attraverso il problema delle definizioni. I docenti della nostra materia hanno l'obbligo di rendersi conto che trasferiscono assieme ai concetti anche le loro idee filosofiche: «la posizione epistemologica degli insegnanti (ne siano più o meno coscienti) interviene, quasi spontaneamente, nella pratica dell'insegnamento» [18]. Ciò traspare da come svolgono la lezione, da quali esercizi scelgono, dall'importanza che attribuiscono ad una parte piuttosto che ad un'altra. Gli studenti assorbono senza sapere questi aspetti e così si tramanda una non chiarita idea sulla natura della Matematica, frutto di un tacito *contratto epistemologico*. Ma non tutti gli allievi accettano a livello inconsapevole quanto viene loro implicitamente proposto. Nascono così delle incomprensioni e delle difficoltà che possono essere causate dalla mancata condivisione di specifici concetti oppure di tutto il quadro generale. I laureati in Matematica che si dedicano all'insegnamento, negli anni di studio universitari dovrebbero iniziare riflessioni di sapore epistemologico che contribuiscono

---

[18] Tratto da C. Sitia, *Storia, Epistemologia e Didattica della Matematica*, L'Educazione Matematica, suppl. IV - 1 - 1983, 3 - 18.

all'impostazione di una corretta programmazione didattica. Un docente conscio di quanto è nascosto anche negli aspetti più semplici della nostra materia, è in grado di proporre lo stesso argomento da angolazioni diverse, per trovare quelle più idonee all'apprendimento, inoltre può offrire un quadro interpretativo assai discosto dal dogmatismo e dal "calcolismo" imperanti.

Ma tale curriculum universitario si realizza assai raramente: attualmente la riflessione su temi di epistemologia della Matematica trova poco spazio, se non nullo, nella preparazione del laureato in Matematica; non c'è dunque da stupirsi che i rischi ed i difetti di questo sistema si scoprano ogni giorno nelle aule universitarie ed in quelle in cui si celebrano i riti dell'esame di maturità.

Il motivo sostanziale è che per accostarsi a tale analisi è necessaria una salda cultura matematica, un'approfondita conoscenza dei metodi e dei linguaggi della Logica Matematica, coniugati ad una riflessione sui Fondamenti, non disgiunti da un'attitudine filosofica. Detti argomenti trovano poco spazio nei corsi universitari compressi nelle 15 annualità, intoccabili persino ai venti della riforma dei piani di studio ed all'autonomia universitaria, che hanno travolto altri corsi di laurea. Ma la causa più importante è che la società scientifica italiana non ha forse capito fino in fondo l'urgenza di un mutamento di prospettiva, anche se non mancano accorati appelli contro l'eccessiva specializzazione su ristretti temi di ricerca [19].

Concludo augurandomi che il mio intervento possa fare qualcosa per smuovere, almeno nella scuola superiore, uno stato di stagnazione. La situazione attuale è forse la causa principale di un paradosso che si vive in questi giorni: nei corsi di laurea scientifici vi è un crescente fabbisogno di strumenti matematici nelle applicazioni e nei piani di studio per conseguire le lauree scientifiche si assiste ad una costante contrazione delle ore dedicate alla nostra materia, perché mal intesa.

---

19 Ad esempio l'intervento di G. Prodi, Notiziario U.M.I, Anno XIX, N. 1 - 2, 146 - 150.

Gabriele Lucchini [1]

Matematizzazione e de-matematizzazione. [2, 3]

0 - PREMESSA.

0.1 - Per questa esposizione mi sono proposto due obiettivi:
1) sostenere l'importanza della consapevolezza sul ruolo della *de-matematizzazione* (intesa nel senso indicato nei §§ 2.0 e 2.1) nell'*insegnamento della Matematica*, accanto a quello della *matematizzazione* (cfr. §§ 1.0 e 1.1), abitualmente più considerato;
2) stimolare riflessioni sul ruolo dell'*apprendimento della Matematica* nella formazione integrale della persona (cfr. § 4.2).

0.2 - *Matematizzazione* e *de-matematizzazione* interessano, quindi, come:
1) argomenti in sé;
2) occasioni per suscitare e sviluppare interesse allo studio di argomenti di Matematica, con particolare riferimento alla scuola secondaria superiore;
3) occasioni per suscitare e sviluppare interesse alla conoscenza di possibilità e di caratteristiche attuali della Matematica, anche come punto di partenza per stimoli alla riflessione su:
   a) idea della Matematica,
   b) conoscenza della Matematica,
   c) insegnamento della Matematica;
4) aspetti significativi della presenza della Matematica nella nostra vita e dell'insegnamento della Matematica nella scuola, non solo per utilizzazioni professionali;
5) riferimenti formativi e conoscitivi, non solo per la Matematica;
6) punto di partenza per riflessioni sulla formazione e sulla conoscenza.

Chiaramente, questi aspetti possono essere strettamente collegati tra loro, se insegnamento e apprendimento della Matematica sono realizzati in funzione della formazione integrale della persona: purtroppo, però, questo non sempre avviene.

NB – In relazione agli obiettivi indicati nel § 0.1 mi è parso opportuno delineare un quadro complessivo, più che approfondire singoli aspetti, e suggerire spunti per riflessioni e approfondimenti.

1 - MATEMATIZZAZIONE.

1.0 - Introduzione.

Matematizzazione interessa, qui, non solo come *traduzione e trattazione in termini matematici* di fatti, situazioni, dati, problemi per *leggere, conoscere, interpretare, capire, descrivere*, per *cercare soluzioni*, per *comunicare*, per *operare*, individuando o esprimendo caratteristiche (e, quindi, sia come *strumento* che come *veicolo* di conoscenze), ma anche come *sistemazione in trattati e in teorie* e come *ripensamento su risultati e teorie*.

---

[1] Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano.

[2] Lavoro svolto nell'ambito dei contratti CNR "La Matematica nella formazione integrale della persona" e dei progetti 40% MURST "Ricerche di Matematica ed Informatica per la didattica".

[3] Il testo è redatto seguendo gli schemi su trasparenti per lavagna luminosa preparati per l'incontro del 30 gennaio 1992 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce, con alcune aggiunte; in particolare, è conservata la numerazione, con inserimento di paragrafi "0".

— **Z. Krigowska** (*Cenni di didattica della matematica, 1*, "Quaderni dell'Unione Matematica Italiana", n. 12, Bologna, Pitagora, 1979, p. 64; titolo originale: *Zarys dydaktiki matematyki - 1*)
Chiameremo matematizzazione nell'insegnamento:
1°) la costruzione dello schema matematico per una certa relazione, espressa dopo l'analisi di una certa situazione reale, inventata, astratta o precisata in un'altra scienza;
2°) la costruzione di uno schema razionale ancora semidimostrato, il quale in seguito potrebbe essere trasformato o aggiunto ad uno schema matematico già completo.

— **H. G. Steiner** ("Mathematization processes in class as a collective learning process", p. 119) [6]
- the mathematization process basically consists in the development of a small applicable *mathematical theory* growing out of a *combined inductive-deductive* (quasi empirical) approach, leading in part to a very simple *axiomatic system.*

— **C. F. Manara** ("La matematizzazione della realtà nei suoi sviluppi storici. 1", *Didattica delle scienze*, n. 95, p. 22) [7]
... intendiamo indicare con questo termine di matematizzazione una evoluzione, un processo storico che si esplica con l'adozione di un determinato linguaggio simbolico, il quale permette di rappresentare la realtà con certezza e precisione molto maggiore di quelle del linguaggio comune, e di dedurre con maggiore facilità e generalità di quanto non si possa fare col metodo sillogistico classico.

TAVOLA 2 - ESEMPI DA LIBRI E ARTICOLI DI MATEMATICI di **L. Mauromicali** (cfr. [4]).

— SCUOLA PRIMARIA (DPR 12/2/1985)
Non è possibile giungere all'astrazione matematica senza percorrere un lungo itinerario che collega l'osservazione della realtà, l'attività di matematizzazione, la risoluzione dei problemi, la conquista dei primi livelli di formalizzazione.
NB – Ci sono altre indicazioni, senza uso esplicito del termine "matematizzazione".

— SCUOLA MEDIA (DM 9/2/1979)
– Verrà dato ampio spazio all'attività di matematizzazione, intesa come interpretazione matematica della realtà nei suoi vari aspetti (naturali, tecnologici, economici, linguistici, ...) con la diretta partecipazione degli allievi.
– L'introduzione degli elementi di statistica descrittiva e della nozione di probabilità ha lo scopo di fornire uno strumento fondamentale per l'attività di matematizzazione di notevole valore interdisciplinare.
NB – Ci sono varie indicazioni, senza uso esplicito del termine "matematizzazione".

— BIENNIO DELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE (Piano Nazionale per l'introduzione dell'Informatica nelle scuole e Commissione Brocca)
– Coerentemente con questo processo l'insegnamento della matematica si è sempre estrinsecato e continua a esplicitarsi in due distinte direzioni: a "leggere il libro della natura" ed a matematizzare la realtà esterna da una parte, a simboleggiare ed a formalizzare, attraverso la costruzione di modelli interpretativi, i propri strumenti di lettura dall'altra, direzioni che però confluiscono, intrecciandosi ed integrandosi con reciproco vantaggio, in un unico risultato: la formazione e la crescita dell'intelligenza dei giovani.
– Alla fine del biennio lo studente dovrà essere in grado di:
7. matematizzare semplici situazioni problematiche in vari ambiti disciplinari.
NB – Ci sono altre indicazioni, senza uso esplicito del termine "matematizzazione".

TAVOLA 3 - *MATEMATIZZAZIONE* IN PROGRAMMI DI INSEGNAMENTO DELLA REPUBBLICA ITALIANA di **L. Mauromicali** (cfr. [4]).

[6] La relazione tenuta a Bratislava nell'agosto del 1988 è pubblicata nei *Proceedings of the international symposium on research and development in mathematics education – August 3-7, 1988 Bratislava*, 1989.
[7] Le successive tre parti dell'articolo sono pubblicate nei nn. 97, 98, 99.

— **H. G. Steiner** (*opera citata* nella tavola 2, p. 120)
The terms *mathematization* and *mathematical model-building* came into use mainly during the 60ies in connection with new mathematical approaches to problems in fields such as the social sciences which thus far had not utilized mathematics in a constitutive and profound conceptual way.
— **G. Papy** ("Méthodes et techniques de présentation des nouveaux concepts de mathématiques dans les classes du premier cycle de l'enseignement secondaire", *Mathématiques modernes*, Paris, OCDE, 1964, p. 79 – traduzione di **L. Mauromicali**)
Per poter utilizzare in modo fecondo la matematica nelle situazioni reali (...) la prima e la più grande difficoltà consiste nel riconoscere che una situazione è suscettibile di un trattamento matematico e determinarlo. A questo scopo, si tratterà di idealizzare e matematizzare la situazione concreta con la quale si ha a che fare.
— **B. Croce** (Dalla voce "matematizzare" del *Grande dizionario della lingua italiana* della UTET)
– Il matematico non esiste in concreto, se non come uomo intero, e quando apre la bocca per parlare, parla (...) come un uomo che parla e non già e non solo come un uomo che matematizza.
(da *Conversazioni critiche*, 1950-1951)
– Intese (Galileo) l'ufficio costitutivo che spetta alle matematiche nelle scienze fisiche e naturali per l'astrazione e semplificazione dei dati e per la determinazione delle leggi, distinguendo nettamente quel serio matematizzare dalle fantasticherie del volgare pitagorismo dei numeri.
(da *Storia dell'età barocca in Italia*, 1929)
– Tutto quel sapere non ancora ridotto o non riducibile a percezione chiara e distinta e a deduzione geometrica, perdeva ai suoi occhi (di Cartesio) valore e importanza. Tale la storia, che si fonda sulle testimonianze; l'osservazione naturalistica, non ancora matematizzata: (...)
(da *La filosofia di Giambattista Vico*, 1911).

TAVOLA 4 - ESEMPI DI DATAZIONE DEL VOCABOLO di **L. Mauromicali** (cfr. [4]).

1.2 - La matematizzazione nella storia della Matematica.

Su *la matematizzazione nella storia della Matematica* mi limito a indicare tre ordini di considerazioni e a riportare una ben nota citazione.

1) La Matematica come ricerca di soluzioni di problemi, con:
   a) ricerca di strumenti (ad esempio: sistemi di numerazione e operazioni sui numeri),
   b) scelta di strumenti (ad esempio: "riga e compasso"),
   c) intuizione, creatività, fantasia (ad esempio: **L. Euler** e i ponti di Königsberg [8]),
   d) tenacia (ad esempio: **J. Kepler** e la "guerra con Marte" [9]),
   e) risposta a esigenze di sistemazione e di ripensamento (ad esempio: assiomatizzazioni).

   NB – È del tutto ovvia la necessità di disporre di strumenti adeguati.
   NB – Chiaramente, è molto significativo il rapporto tra stimoli esterni e sviluppi interni alla Matematica.

---

[8] Cfr., ad esempio, *Momenti del pensiero matematico* di **C. F. Manara e G. Lucchini**, Milano, Mursia, 1976. Il lavoro di **L. Euler** (1707-1783) è intitolato *Solutio problématis ad geometriam situs pertinentis*; fu presentato alla Accademia delle Scienze di Pietroburgo il 26 agosto 1736 e pubblicato nel 1741 nei *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, volume 8 (relativo al 1736), pp. 128-140.

[9] Cfr., ad esempio:
– *La rivoluzione astronomica - Copernico Keplero Borelli* di **A. Koyré**, Milano, Feltrinelli, 1966 (ed. or.: *La révolution astronomique*, Paris, Hermann, 1961),
– *The Sleepwalkers - A history of man's changing vision of the Universe* di **A. Koestler**, Hutchinson of London, 1959,
– "How did Kepler discover his first two laws?" di **C. Wilson**, *Scientific American*, marzo 1972 (traduzione italiana: "Le prime due leggi di Keplero", *Le Scienze*, giugno 1972).

2) La Matematica come sistemazione in trattati e in teorie (ad esempio: geometria greca come primo passo di matematizzazione della realtà e *Elementi* di **Euclide**).

3) La Matematica come ripensamento su risultati e teorie.

NB – Particolare interesse ha, accanto allo sviluppo della Matematica, l'evoluzione dell'idea di Matematica (cfr. [19]).

4) La citazione, tratta (e tradotta) da una lettera di **C. G. J. Jacobi**, è la seguente:

... Fourier era del parere che lo scopo principale della matematica fosse l'utilità sociale e la spiegazione dei fenomeni naturali; un filosofo come lui tuttavia avrebbe dovuto sapere che l'unico fine della scienza è l'onore dello spirito umano, e che, da questo punto di vista, un problema relativo ai numeri ha la stessa portata di un problema che riguarda il sistema del mondo. [10]

NB – Sul ruolo degli errori rimando al ben noto articolo di **F. Enriques** (pubblicato con la firma *A. Giovannini*, a causa delle leggi razziali) "L'errore nelle matematiche", *Periodico di Matematiche*, 1942, pp. 57-65.

NB – Sulla consapevolezza di successi e limiti della matematizzazione segnalo, in particolare, *Succès et limites de la mathématisation* di **C. F. Manara**, Relazione al Congresso mondiale di Filosofia, Düsseldorf, 1968.

NB – Sui cambiamenti operativi, culturali e sociali portati dai successi della matematizzazione pare superfluo soffermarsi.

1.3 - Fasi della matematizzazione – Matematizzazione ristretta e matematizzazione estesa di fatti, situazioni, dati, problemi.

In relazione alla matematizzazione come *traduzione* e come *trattazione* in termini matematici di fatti, situazioni, dati, problemi, ritengo importante proporre una suddivisione in *fasi*, distinguendo, appunto, *traduzione*, come "matematizzazione ristretta", e *traduzione e trattazione* (con discussione), come "matematizzazione estesa". [11]

1) *Matematizzazione ristretta*, o traduzione in termini matematici, in sei fasi successive:

a→b→c→d→e→f.

a) fatti, situazioni, dati, problemi (realtà).

b) razionalizzazione della conoscenza sulla realtà che si considera.

NB – Come esempio particolarmente significativo, anche se non strettamente matematico, riporto un brano di **G. Peano** [12]:

Data l'altezza dell'albero maestro d'una nave, trovare l'età del capitano.

È questo un celebre esempio di problema, dato come insolubile. Il filosofo-matematico Richard se ne occupò nella Revue de Métaphisique *a. 1920.*

---

[10] La citazione è ripresa da *L'arte dei numeri - Matematica e matematici oggi* di **J. Dieudonné**, Milano, Mondadori, 1989. Il titolo originale è *Pour l'honneur de l'esprit humain - Les mathématiques aujourd'hui* (Paris, Hachette, 1987), con evidente riferimento alla citazione di **Jacobi** (1804-1851) messa come citazione preliminare:

... M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde.

C. G. J. JACOBI, lettre (en francais) à Legendre, 2 juillet 1830.
Gesammelte Werke, Vol. I, Berlin (Reimer), 1881, p. 454.

(La punteggiatura è quella dei testi citati.)

[11] *Traduzione* è, qui, intesa nel senso che un certo discorso concepito secondo il linguaggio della parola deve essere reso in linguaggio matematico.

[12] Problema pratico n. 10 (p. 60) di *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*, prima edizione: Torino, Paravia, 1924; riedizione, con presentazione di **G. C. Argan** e prefazione di **U. Bottazzini**: Firenze, Sansoni, 1983.

Il problema si risolve sapendo che quella nave si trovava presso Genova; alla capitaneria di porto trovasi la descrizione delle navi che frequentano il porto. Da questo registro deduciamo il nome della nave; in altro registro leggiamo il nome del capitano, e dall'ufficio di anagrafe ricaviamo la sua età.
Quasi tutti i problemi che si presentano in pratica sono della natura di questo. Chi deve risolverli, cercherà gli elementi che mancano; ovvero li supporrà, dicendo ben chiaro che cosa suppone. (...)

c) scelta degli elementi da matematizzare, tra quelli che è possibile matematizzare.
d) scelta degli strumenti matematici [tra quelli utilizzabili (noti e ammessi)], con eventuale revisione della scelta c.
   NB – I vari strumenti di matematizzazione, che sono stati elaborati nei secoli, consentono, spesso, diverse matematizzazioni di una stessa realtà, con scelte legate a diversi elementi. In particolare, interessa richiamare, qui, la possibilità di matematizzare nel *discreto* o nel *continuo* in modo da avere i necessari collegamenti (come, ad esempio, per le cosiddette *leggi finanziarie*) e la possibilità di tradurre in formulazioni diverse le varie ipotesi che si possono fare nell'interpretazione di un fenomeno, anche per vagliarne l'attendibilità con gli strumenti matematici (come si può fare, ad esempio, per i cosiddetti *modelli economici* [13]).
   NB – Gli elaboratori elettronici offrono, chiaramente, significative possibilità anche per l'utilizzazione di strumenti matematici tradizionalmente ignorati nella scuola per difficoltà di utilizzazione (come, ad esempio, le equazioni algebriche di grado superiore al secondo non addomesticabili con la *regola di Ruffini*). Ovviamente, occorre saper dominare le possibilità di errore insite nel modo di operare di queste macchine.
   NB – È possibile che gli strumenti utilizzabili, perché noti o perché ammessi, non consentano una buona matematizzazione della realtà o consentano solo una trattazione parziale o approssimata.
   NB – Nella scelta degli strumenti per matematizzare può essere opportuno considerare il *costo* di acquisizione o di utilizzazione degli strumenti dal punto di vista sia di effettive spese che di tempi di studio o di lavoro.
e) formulazione matematica e simbolizzazione (rappresentazione matematica della realtà).
   NB – È opportuno osservare l'importanza di questa fase e, in particolare, quella della simbolizzazione, che verrà ripresa a proposito della fase g, e della standardizzazione dei simboli.
f) eventuale "trasformazione" con altri strumenti matematici.
   NB – Di questa fase interessa, qui, soprattutto l'aspetto di utilizzazione di strumenti matematici per rendere più agevoli dimostrazioni di proprietà e risoluzioni di problemi già espressi matematicamente.

NB – La disponibilità di strumenti matematici può condizionare sia modi di matematizzazione (ad esempio: *sezione aurea* [14] negli *Elementi* di **Euclide** e con le equazioni di secondo grado) che esistenza e interpretazione di risultati (ad esempio: *geometria analitica* e *campo complesso*).

NB – La scelta degli strumenti per matematizzare può avere rilevanti implicazioni sui rapporti tra formulazione matematica e realtà, in parte ravvisabili nell'uso del termine *modello* con significato diverso da quello di *traduzione*. Come è ben noto, ci sono matematizzazioni che *impoveriscono* e matematizzazioni che *arricchiscono*, togliendo o aggiungendo elementi (ad esempio: *geometria analitica*).

---

[13] Cfr., ad esempio, *Elementi di Economia matematica* di **C. F. Manara** e **P. C. Nicola**, Milano, Viscontea, 1967

[14] Come è noto, *sezione aurea* non è denominazione euclidea: cfr., ad esempio, *Geschichte der Elementar-Mathematik* di **J. Tropfke**, III ed., IV vol., Berlin, De Gruyter, 1940.

2) *Matematizzazione estesa*, o traduzione e trattazione matematica, con altre quattro fasi:

$$(a \to b \to c \to d \to e \to f) \to g \to h \to i \to l.$$

g) elaborazione sui simboli secondo le regole dello strumento utilizzato e deduzione dalla rappresentazione simbolica.

NB – La possibilità di lavorare sui simboli invece che sulla realtà è una caratteristica fondamentale della matematizzazione: se le *regole* per operare sui simboli sono state stabilite bene e se è stata operata bene la matematizzazione, i risultati della elaborazione e delle deduzioni non possono non corrispondere alle operazioni sulla realtà.

h) interpretazione matematica dei risultati.

i) valutazione dell'aderenza dei risultati alla realtà.

l) eventuale revisione delle scelte c, d, e, f.

NB – Come è del tutto ovvio, si possono considerare altre suddivisioni in fasi; mi limito a segnalare la suddivisione in quattro fasi di **G. Polya** [15].

1.4 - Alcuni aspetti della matematizzazione.

Ritengo opportuno segnalare alcuni aspetti della matematizzazione, anche se non è possibile analizzarli qui.

1) Matematizzazione e Matematica come linguaggio:

a) Matematica come linguaggio e linguaggio matematico;

b) aspetti quantitativi e aspetti qualitativi;

c) consapevolezza delle particolarità e dei livelli del linguaggio matematico;

d) funzioni del linguaggio matematico;

e) matematizzazione e comunicazione.

NB – È opportuno tenere presente la distinzione tra linguaggio e lingua, anche se non sempre rispettata, e quella tra descrizioni intersoggettive e interpretazioni soggettive.

NB – È opportuno tenere ben presente che la formulazione in linguaggio matematico implica, normalmente, elaborazioni e deduzioni secondo le regole dei simboli utilizzati (cfr. § 1.3, fase g).

2) Matematizzazione in grande e matematizzazione in piccolo [16]:

a) *matematizzazione in grande* di scienze o di teorie scientifiche;

b) *matematizzazione in piccolo* nella risoluzione di singoli problemi.

---

[15] Cfr. *Come risolvere i problemi di matematica*, Milano, Feltrinelli, 1967 (ed. or.: *How to solve it*, Princeton University Press, 1945).
Le quattro fasi sono: 1) comprensione del problema, 2) compilazione di un piano, 3) sviluppo del piano, 4) alla fine (esame della soluzione ottenuta).
Lo schema originale è più incisivo, per l'efficacia dell'impostazione grafica.

[16] **R. Descartes** ha scritto nella IV delle *Regulae ad directionem ingenii* (*Oevres de Descartes*, X vol., Paris, Vrin, 1974, pp. 377-378):

> *Quod attentius consideranti tandem innotuit, illa omnia tantum, in quibus ordo vel mensura examinatur, ad Mathesim referri, nec interesse utrum in numeris, vel figuris, vel astris, vel sonis, aliove quovis objecto, talis mensura quaerenda sit; ac proinde generalem quamdam esse debere scientiam, quae id omne explicet, quod circa ordinem & mensuram nulli speciali materiae addictam quaeri potest, eamdemque, non ascititio vocabulo, sed jam inveterato atque usu recepto, Mathesim universalem nominari, quoniam in hac continetur illud omne, propter quod aliae scientiae Mathematicae partes appellantur.*

3) Matematizzazione obbligata, vincolata, libera:
   a) *matematizzazione obbligata*, se c'è una unica possibilità;
   b) *matematizzazione vincolata*, se occorre rispettare determinati vincoli;
   c) *matematizzazione libera*, se si può scegliere senza vincoli.

4) Matematizzazione esterna e matematizzazione interna alla Matematica:
   a) matematizzazione diretta di aspetti della realtà;
   b) matematizzazione della realtà attraverso le scienze della natura [17];
   c) matematizzazione delle scienze [18];

---

[17] Riporto il celebre passo di **G. Galilei** ne *Il saggiatore* (da *Le Opere di Galileo Galilei - edizione nazionale*, vol. VI, p. 232, r. 11-18, Firenze, Barbèra, 1896):

> *La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.*

[18] Segnalo, in particolare, *Le scienze matematiche*, Bologna, UMI-Zanichelli, 1973, raccolta di saggi a cura del *Comitato per la Promozione della Ricerca nelle Scienze Matematiche* del Consiglio Nazionale delle Ricerche degli Stati Uniti d'America (ed. or.: *The Mathematical Sciences*, Mass. Inst. of Technology, 1969).
L'indice è il seguente:

Sulla *applicabilità della Matematica* segnalo, anche:
– "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Science" di **E. P. Wigner** (Richard Courant Lecture in Mathematical Sciences delivered at New York University, May 11, 1959), *Communications on Pure and Applied Mathematics*, volume XIII, 1960, pp. 1-14;
– "L'universo è matematico?", *Sfera*, n. 29, pp. 6-9 e *Perché il mondo è matematico?*, Bari, Laterza, 1992, di **J. D. Barrow**.

d) matematizzazione della Matematica [19]:
— matematizzazione di strumenti e teorie;
— assiomatizzazioni e trattazioni formalizzate.

e) altre matematizzazioni, e in particolare:
— matematizzazione della Logica;
— matematizzazione di informazioni in "probabilità";
— matematizzazione di raffigurazioni e rappresentazioni.

5) Matematizzazione e ottimizzazione.

6) La matematizzazione dopo le assiomatizzazioni della Matematica.

7) Matematizzazione come patrimonio culturale e di conoscenze (cfr. § 4.1.1):
a) componenti operative, formative, culturali della matematizzazione;
b) difficoltà di matematizzazione.

8) Matematizzazione e umorismo (cfr. § 3.4).

NB – Come è ben noto, si è parlato e si parla di *Matematica come linguaggio della scienza.* [20].
NB – Su matematizzazione e elaboratori elettronici cfr. § 1.3, fase d.
NB – Sulla necessità di disporre di strumenti di matematizzazione cfr. § 1.3.
NB – Su successi e limiti della matematizzazione e sull'importanza dei successi rimando al testo di **C. F. Manara** citato nel § 1.2.
NB – Per ulteriori riflessioni e dichiarazioni sulla matematizzazione e per esempi di trattazioni rimando ai testi citati.

---

[19] Riporto due brani, rispettivamente di **L. Campedelli** e di **Z. Krygowska**:

> *Ma intanto, via via che lo studioso avanza per la strada intrapresa, si determinano in lui nuove esigenze: egli sente il bisogno non tanto di acquisire nuovi risultati quanto di esaminare più minutamente il cammino percorso, e di rendersi conto del mezzo, dello strumento, di cui si è valso; vuole conoscere l'essenza, l'impalcatura, l'ossatura più intima della sua costruzione.*
> *Così egli viene lentamente condotto ad allontanarsi sempre più dagli "oggetti" di cui si parla in questo o quel capitolo della matematica, per volgere invece la sua attenzione ai loro minuti rapporti e legami, alle leggi a cui obbediscono, al meccanismo del dedurre; e giunge a creare in sé il bisogno di comprendere e dominare dall'alto, nella ricerca di una unità di sempre più vasta portata, e di una economia di pensiero che gli consenta di non smarrirsi.*
> *Questo passaggio dalla matematica guardata dal "di fuori" a quella vista "dal di dentro" (...) corrisponde al percorso seguito dalla matematica nel suo continuo progredire, e che approda a quei capitoli oggi noti come "algebra moderna", "teoria delle strutture", etc.. Sono queste che vengono dette "matematiche moderne", in contrapposto alle quali quelle tradizionali si chiamano "matematiche classiche".*

(da *I modelli geometrici*, cap. VIII di *Il materiale per l'insegnamento della matematica* di **AA. VV.**, Firenze, La Nuova Italia, pp. 144-145; edizione originale: *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques*, Neuchâtel & Paris, Delachaux & Niestlé, 1958);

> *Ma il matematico allontana con piacere lo sguardo dalla realtà, e può farlo perché i legami logici garantiscono un veloce progresso. Cosí viene formato "il forziere" degli esperimenti matematici, il quale deve essere sistematizzato a sua volta. Con quali strumenti? Ovviamente con strumenti matematici. In questo modo viene matematizzata la matematica.*

(da *Cenni di didattica della Matematica, 1*, "Quaderni dell'Unione Matematica Italiana", n. 12, Bologna, Pitagora, 1979, p. 106; titolo originale: *Zarys dydaktiki matematyki - 1*).

[20] Segnalo, in particolare:
– *Il numero, linguaggio della scienza* di **T. Dantzig**, Firenze, La Nuova Italia, 1965 (ed. or.: *Number: The Language of Science*, New York, Macmillan, 1930 e 1954);
–"Il linguaggio della scienza" di **C. F. Manara**, *Didattica delle scienze*, nn. 102 e 103.

1.5 - La matematizzazione nell'apprendimento e nell'insegnamento.

Anche qui, come nel § 1.4, segnalo alcuni aspetti, anche se non è possibile analizzarli.

1) Comprensione dell'importanza dei successi della matematizzazione per:
   a) utilizzazioni della vita quotidiana;
   b) utilizzazioni specialistiche;
   c) lo sviluppo della Matematica;
   d) la cultura [21].
2) Acquisizione di capacità di matematizzazione per:
   a) conoscenza e padronanza di strumenti e metodi matematici, anche per matematizzare;
   b) attività della vita quotidiana;
   c) attività di lavoro;
   d) conoscenza della Matematica.
3) La matematizzazione come via alla Matematica:
   a) matematizzazione come aggancio a conoscenze degli alunni;
   b) matematizzazione come risposta a esigenze degli alunni;
   c) difficoltà di aggancio a esperienze di alunni e conseguente rischio di *astrusità*;
   d) matematizzazione e insegnamento per problemi.
4) Matematizzazione e interdisciplinarità [22].
5) Valore formativo della matematizzazione in relazione a razionalità critica e comportamento.

   NB – Su questo aspetto, invito a meditare la seguente affermazione di **F. De Bartolomeis** [23]:

   > *Nessuna persona che abbia conosciuto a fondo un matematico (nei suoi comportamenti, nelle sue valutazioni riguardanti problemi pratici o altri settori del sapere) potrebbe dare credito all'idea secondo cui il valore principale della matematica consiste nell'educare l'intelligenza.*
6) La matematizzazione come oggetto di insegnamento:
   a) implicito;
   b) esplicito.

   NB – Su matematizzazione e programmi di insegnamento cfr. tavola 3.

   NB – In relazione a un insegnamento esplicito della matematizzazione pare auspicabile una adeguata attenzione degli autori di libri di testo, come pure degli "aggiornatori", anche con una *guida* alla matematizzazione (che cosa e come matematizzare, con quali strumenti, ...).

NB – Sul collegamento con l'*idea di Matematica* e con l'*idea di conoscenza della Matematica* cfr. §§ 4.1 e 4.2.

---

[21] Cultura sia nel senso *primario* di correlazione alla *natura dell'uomo*, sia nel senso *secondario* di correlazione alle *opere dell'uomo*: cfr., in particolare, l'*Allocuzione all'UNESCO* di **S. S. Giovanni Paolo II** e il *mondo 3* di **K. R. Popper.**

[22] Intendo *interdisciplinarità* nel senso specifico chiarito dall'accostamento a multidisciplinarità, pluridisciplinarità, disciplinarità composita, transdisciplinarità riproposto in *Interdisciplinarità e scuola* di **T. Russo Agrusti** sulla base della trattazione di **J. Jantsch** nel testo del *CERI* (Centre pour la recherche et l'innovation dans l'enseignement) *L'interdisciplinarité, problems d'enseignement et de recherche dans les Universités*, Paris, OCDE, 1972.

[23] *Sistema dei laboratori*, Milano, Feltrinelli, 1978, p. 143.

2. - DE-MATEMATIZZAZIONE.

2.0 - Introduzione.

De-matematizzazione non risulta essere un vocabolo codificato, anche se la costruzione (evidenziata dal trattino) ne stabilisce il collegamento con *matematizzazione.*
Quindi, *de-matematizzazione* interessa, qui, non solo come capacità di *riconoscere, comprendere, esplicitare* aspetti matematizzati in traduzioni e trattazioni in termini matematici (eventualmente presentati solo come *formulazione* o come *risultato*), ma anche come capacità di *comprendere* le sistemazioni in trattati e teorie e i ripensamenti su risultati e teorie, innanzitutto per quanto riguarda lo *spirito* di queste attività.
Mi pare importante osservare che, se si prescinde da alcuni casi particolari (conti, descrizioni con vocaboli suggeriti dalla Matematica, ...) e da utilizzazioni professionali, si incontrano più frequentemente situazioni già matematizzate o presentate con strumenti matematici (anche se, a volte, senza spiegazioni o impropriamente) che situazioni da matematizzare.

2.1 - Su vocabolo, concetto e programmi di insegnamento.

Come si è implicitamente indicato con il collegamento a *matematizzazione*, il vocabolo *de-matematizzazione* può essere utilizzato con vari significati e a diversi livelli di estensione del concetto, per i quali il riferimento è, ovviamente, quanto visto per *matematizzazione* (cfr. §§ 1.0 e 1.1).
Mi limito, quindi, a tre indicazioni.

1) Il vocabolo e il trattino.
   Come già accennato, utilizzo il trattino per evidenziare la costruzione del vocabolo e il collegamento con *matematizzazione.*
2) Il concetto nei programmi di insegnamento delle scuole della Repubblica Italiana.
   Nei programmi di insegnamento delle scuole della Repubblica Italiana il vocabolo *de-matematizzazione* non compare (con o senza trattino), ma il concetto è presente con l'indicazione esplicita di attività che rientrano nella *de-matematizzazione.*
3) Altri aspetti del concetto.
   Rispetto a quanto risulta dai programmi, ritengo importante segnalare esplicitamente (nei §§ 2.2-2.4) altri aspetti della *de-matematizzazione*, auspicando che possano trovare posto nell'apprendimento della Matematica, anche nella scuola.

2.2 - Tipi di de-matematizzazione.

In senso stretto la *de-matematizzazione* riguarda:

1) ritorno al linguaggio comune per l'interpretazione delle formulazioni o dei risultati;
2) de-matematizzazione del significato di condizioni o conseguenze (ad esempio: perché *gruppi di trasformazioni* nella *visione kleiniana* della Geometria).

In senso lato si possono considerare anche:

3) utilizzazione diretta di formulazioni e di risultati in simboli o in termini matematici;
4) lettura matematica diretta, con ragionamento in termini matematici (ad esempio: *derivate, riconoscimento di coniche mediante invarianti*);
5) rielaborazione matematica, con ragionamento in termini matematici (ad esempio: *equazioni differenziali, geometria descrittiva*).

NB – Su linguaggio matematico e linguaggio comune rimando a quanto già detto.
NB – Va tenuta presente la possibilità di componenti soggettive e di errori nella comprensione diretta di testi matematizzati.

2.3 - Ambiti della de-matematizzazione.

1) De-matematizzazione nella vita quotidiana:
   a) comprensione di descrizioni, interpretazioni, spiegazioni;
   b) comprensione di informazioni e di istruzioni;
   c) comprensione di risultati;
   d) deduzione di informazioni nascoste (ad esempio: lato della strada sul quale si trova la casa con un certo numero civico, almeno in alcune città; scompartimento nel quale si trova il posto con un dato numero).

   NB – Va tenuto presente che la de-matematizzazione può presentare difficoltà e portare a errori.

   NB – Va tenuto presente che, a volte, l'utilizzazione di strumenti matematici può essere non necessaria, impropria o con errori e che, quindi, è spesso opportuna una valutazione critica, anche per l'individuazione di errori.
2) De-matematizzazione nella scuola:
   a) in Matematica;
   b) in altre materie.
3) De-matematizzazione nel lavoro:
   a) per capire;
   b) per eseguire.
4) De-matematizzazione nella divulgazione scientifica.
5) De-matematizzazione nella cultura (ad esempio: leggi della prospettiva, cubismo, quadri di **C. M. Escher**, *Flatland* di **E. A. Abbott**).

NB – Ovviamente, la de-matematizzazione richiede la conoscenza e la padronanza di strumenti matematici, con collegamenti a livelli scolastici e culturali.

2.4. - La de-matematizzazione nell'insegnamento.

1) Esigenze di de-matematizzazione:
   a) nella vita quotidiana;
   b) nella scuola;
   c) nel lavoro;
   d) nella divulgazione scientifica;
   e) nella cultura.
2) Educazione *alla* de-matematizzazione e *con la* de-matematizzazione. Sul valore formativo della de-matematizzazione.

   NB – Non solo le scienze e la tecnica, ma pure giornali, trasmissioni televisive, presentazioni, istruzioni propongono occasioni opportune, anche in relazione a difficoltà e rischi accennati nel § 1.5.3.
3) De-matematizzazione come via alla Matematica.
4) De-matematizzazione e interdisciplinarità [22].
5) La de-matematizzazione come oggetto di insegnamento.

   NB – La de-matematizzazione non compare esplicitamente in programmi di insegnamento (cfr. § 2.1.2), ma sembra di poter dire che questo non è un impedimento a occuparsi di de-matematizzazione nell'insegnamento.

   NB – In relazione a un insegnamento *esplicito* valgono considerazioni analoghe a quelle del § 1.5.6.

   NB – Accanto a attività ben note, come la stesura di testi che corrispondano a una data matematizzazione o la descrizione dei processi seguiti per una de-matematizzazione, segnalo la ricerca di assiomatiche *implicite* in ragionamenti, argomentazioni, comportamenti.

NB – Sul collegamento con l'*idea di Matematica* e con l'*idea di conoscenza della Matematica* cfr. §§ 4.1 e 4.2.

3. - ESEMPI.

3.0 - Introduzione.

Una *raccolta sistematica di esempi* sarebbe molto interessante e utile, sia come documentazione delle considerazioni precedenti, sia come servizio agli insegnanti.
Ma, anche al livello attuale di raccolta personale, la pubblicazione porrebbe esigenze di spazio e di illustrazioni che portano ben al di là degli obiettivi di questa esposizione.
Mi limito, quindi, a proporre, qui, qualche spunto, a ricordare che varie proposte sono state preparate da *Nuclei di ricerca didattica* (CNR, MPI, MURST) e a segnalare nella nota [24] tre articoli contenenti altri esempi significativi.

3.1 - Esempi "veri" da portare in classe.

Giornali, riviste, presentazioni e istruzioni per prodotti commerciali, offerte d'acquisto con possibilità di rateazione forniscono esempi "veri" che possono essere utilizzati, anche criticamente, in classe.
Inoltre, non è raro trovare errori e imprecisioni stimolanti.
Come *controesempio* segnalo quello della *commutatività* tra IVA e sconto per l'acquirente, proposto da **M. Pellerey** [25] senza tenere conto della non-commutatività per il venditore (e, quindi, della improponibilità come situazione "vera").
NB – Particolare interesse hanno gli esempi che propongono o che consentono discorsi sull'ottimizzazione o sulla utilizzazione di strumenti diversi per matematizzare la stessa situazione.

3.2 - Giochi e problemi.

Anche *giochi* e *problemi* forniscono occasioni ben utilizzabili, a volte con possibilità di riferimenti storici [come, ad esempio, alcuni problemi trattati da **N. Tartaglia** nel *General trattato di numeri et misure* (1556-1560) [26]] e di collegamenti a film e audiovisivi [27].
NB – Ovviamente, spesso è necessario che giochi o problemi siano stati preliminarmente matematizzati. Esempi significativi sono offerti dalla ricerca di *strategie* e dalla nozione stessa di *strategia* [28].
NB – Interessanti possibilità sono offerte dall'utilizzazione di *personal computer*.

3.3 - Interpretazioni di fatti e situazioni.

Si trovano facilmente fatti e situazioni che offrono possibilità interessanti, come, ad esempio, simmetria di posate e di altri oggetti (dal punto di vista non solo descrittivo ma anche interpretativo), forme di oggetti (ruote, porte e finestre, ...), carte stradali, fotografie, informazioni deducibili da utilizzazioni improprie di numeri, "dadi" su "poliedri" diversi dal cubo.

---

[24] – "La teoria dell'informazione e alcuni giochi matematici", *Periodico di matematiche*, vol. XLVI, n. 5 (1968);
– "L'ottimizzazione nella scuola dell'obbligo", *Didattica delle scienze*, nn. 54, 55, 56 (1974-1975);
– "Invito a l'ottimizzazione nella scuola dell'obbligo", *Incontri sulla matematica*, Roma, Armando, 1984.

[25] *Materiali didattici – esplorazioni di matematica*, Milano, Mursia, 1985, pp. 27-28.

[26] Cfr., ad esempio, *Momenti del pensiero matematico* di **C. F. Manara** e **G. Lucchini**, citato in [8].

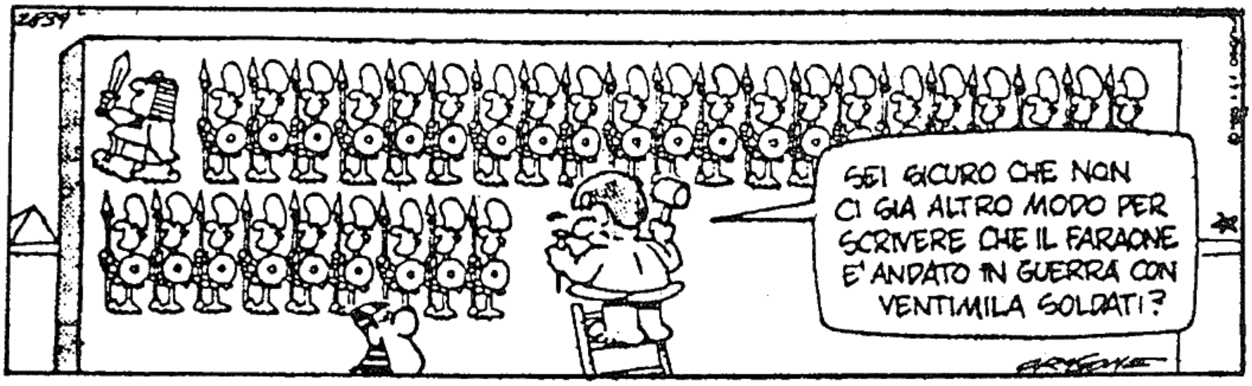
[27] Segnalo, in particolare, l'uso di una versione del gioco del *nim* nel film *L'année dernière à Marienbad* di **A. Resnais** su sceneggiatura di **A. Robbe-Grillet**. La sceneggiatura è stata pubblicata in lingua italiana: *L'anno scorso a Marienbad*, Torino, Einaudi, 1962.

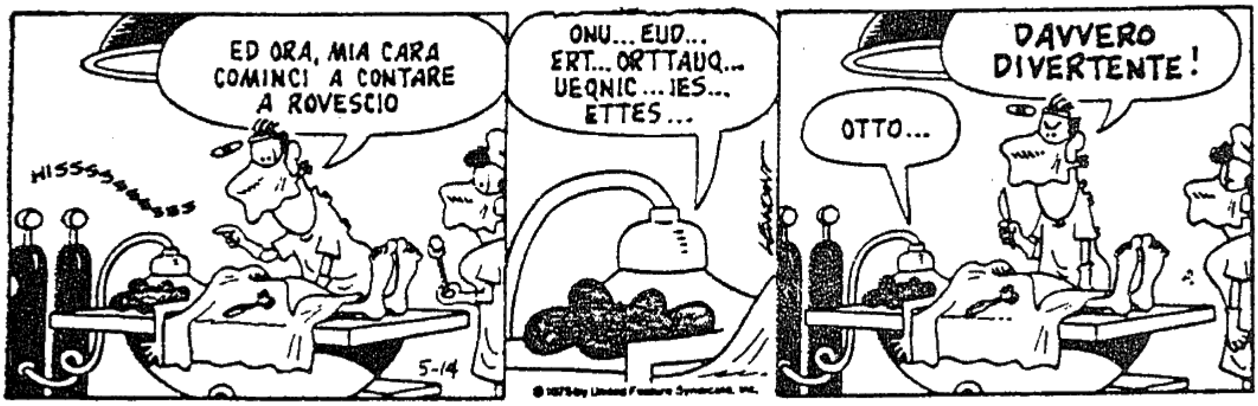
[28] Cfr., ad esempio, il primo dei testi citati alla [24].

3.4 - Matematica e umorismo.

L'ultimo filone che voglio richiamare esplicitamente è quello dell'*umorismo* (già accennato nel § 1.4), sia dal punto di vista del *comprendere* testi e disegni che utilizzino aspetti matematici, sia dal punto di vista dell'*umanizzare* la Matematica anche sorridendo o vedendola utilizzata in questo ordine di idee [29].

Come esempi propongo tre *strip*, rispettivamente di *Nilus* di **A. & F. Origone**, *Dottor Smock* di **G. Lemont**, *Mafalda* di **Quino**, segnalando che alcune parole dei testi potrebbero essere migliorate dal punto di vista matematico.





---

[29] Non potendo riprodurli qui, segnalo i due testi seguenti:
- "Cuore epurato - una disgrazia" in *Mondo candido 1946-1948* di **G. Guareschi**, Milano, RCS Rizzoli, 1991 (pp. 22-25) e in *Candido* del 9 febbraio 1946, con il maestro che accetta le votazioni che portano a "7x8=53";
- La "gara mondiale di matematica" del XVI capitolo di *Parliamo tanto di me* di **C. Zavattini**, riportata in *L'infinito* di **L. Lombardo Radice**, Roma, Editori Riuniti, 1981 (p. 8), con il babbo che singhiozza "Se avessi detto più due avrei vinto io".

4 - STIMOLI ALLA RIFLESSIONE SU:
— IDEA DI MATEMATICA,
— IDEA DI CONOSCENZA DELLA MATEMATICA,
— IDEA DI INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA (nelle scuole).

4.0 - Introduzione.

Anche in relazione a quanto esposto su *matematizzazione* e *de-matematizzazione*, propongo alcuni stimoli alla riflessione su tre *idee*:
a) l'idea di Matematica;
b) l'idea di conoscenza della Matematica;
c) l'idea di insegnamento della Matematica (nelle scuole).

4.1 - Sull'idea di Matematica.

Sull'*idea di Matematica* propongo due spunti.

1) L'importanza per l'insegnamento e per gli insegnanti dell'*idea di Matematica* pare del tutto ovvia e non considererei l'argomento se non avessi dovuto constatare che, troppo spesso, lo stato di conoscenze sull'evoluzione della Matematica è tale da rendere sostanzialmente incomprensibile la ben nota e significativa definizione di **B. Russell**, riportata nella tavola n. 5 con la traduzione e la presentazione di **F. Enriques**. [30]

   NB – Il discorso potrebbe essere ampliato agli studi successivi sul cosiddetto *statuto epistemologico* della Matematica, ma, qui, pare sufficiente segnalare la questione.

Thus mathematics may be definied as the subject in which
we never know what we are talking about,
nor whether what we are saying is true.

(**B. Russell**, "Recent Work on the Principles of Mathematics", *International Monthly*, luglio 1901, p. 84.)

... E così riescono a definire le matematiche come studio dei sistemi ipotetico-deduttivi *di proposizioni. Appunto a questo concetto si riferisce la definizione paradossale di BERTRAND RUSSELL: "Le matematiche sono quella scienza, in cui non si sa di che cosa si parla e in cui non si sa se quello che si dice sia vero.".*

(**F. Enriques**, *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna, 1938 e, in ristampa anastatica, 1971, p. 141.)

NB – Alla definizione di **B. Russell** è dedicato l'articolo di **G. Vailati** "La più recente definizione di matematica", *Leonardo*, giugno 1904.

Tavola n. 5

[30] Segnalo, in particolare, che, nel rispondere al questionario che propongo all'inizio del corso di *Matematiche complementari*, la gran parte degli studenti qualifica non "accettabile" la definizione e quasi tutti quelli che la considerano "accettabile" adducono motivazioni insostenibili alla luce dell'evoluzione della Matematica. Riporto alcune risposte: "... perché se si comincia a studiare matematica è ben chiaro di cosa si parla", "Perché tutto quello che si afferma è dimostrabile", "quello che in matematica è dimostrato, è dimostrato in ogni caso", "sì, quando non capisco quello che studio", "... è vero che spesso ciò di cui si parla non si capisce bene cosa sia ...", "... sono state sviluppate teorie di cui non si conosce a priori l'utilizzo ...".

2) Accanto alla questione dell'evoluzione e dello statuto epistemologico della Matematica, segnalo quella di *costruzione del sapere matematico* e di *costruzione del sapere sulla Matematica* (come patrimonio dell'umana famiglia) con la tavola n. 6.

---

costruzione del sapere matematico

— "elementare", "medio", "superiore" —

come patrimonio (in sviluppo) dell'umana famiglia

↙ ↘

stimoli "esterni" | stimoli "interni"

↘ ↙

— strumenti e metodi
  — simboli, regole, teorie
— riflessioni critiche
  — collegamenti e unificazioni
  — evoluzione
  — statuto epistemologico
— assiomatizzazioni

↓ ↑

costruzione del sapere sulla Matematica

— problemi "interni"
— aspetti operativi
— aspetti formativi
— aspetti culturali
— pedagogia della Matematica
— sociologia della Matematica
— psicologia della Matematica
— didattica della Matematica

— didassi della Matematica

↙ ↘

"archivio" (in sviluppo)
del sapere matematico

— strumenti e metodi
— sistemazioni teoriche
— riflessioni critiche
— assiomatizzazioni

— trattazioni storiche

"archivio" (in sviluppo)
del sapere sulla Matematica

pedagogia —
sociologia —
psicologia —
didattica —

didassi —

Tavola n. 6

4.2 - Sull'idea di conoscenza della Matematica.

Anche sull'*idea di conoscenza della Matematica* propongo due spunti.
1) Distinzione degli aspetti della conoscenza della Matematica in:
  a) dichiarativi;
  b) procedurali;
  c) culturali.

2) Necessità di acquisizioni personali, indicate nella tavola n. 7, con possibili difficoltà di apprendimento.

NB – È opportuno tenere ben presenti il passaggio a una *scuola di massa* e le indicazioni ricavabili dalle considerazioni sull'*apprendimento per schemi* accanto all'*apprendimento per concetti* [31] e sulla cosiddetta *mentalità mass-mediale.*

NB – Va tenuto presente, anche, il ruolo di *esercizi* e *errori.*

Acquisizioni personali (scolastiche, extrascolastiche)
di elementi del sapere matematico e del sapere sulla Matematica

— formazione di concetti matematici (astrazione) e schemi [31]
— conoscenza di strumenti e metodi matematici
— comprensione di strumenti e metodi matematici
— padronanza di strumenti e metodi matematici
— utilizzazioni per:
  — "leggere il libro della natura" (cfr. tavola n. 3)
  — elaborare trattazioni matematiche
  — matematizzare (cfr. § 1)
  — ottimizzare (strumenti; mentalità)
  — comunicare
  — de-matematizzare (cfr. § 2)
  NB – Vanno tenute presenti possibilità di uso di elaboratori elettronici.
— riflessioni sulle utilizzazioni
— conoscenza di riflessioni critiche e di assiomatizzazioni
— consapevolezza sull'importanza dell'introduzione di strumenti e di metodi "adeguati"
  — terminologia, simboli, regole, teorie
— consapevolezza sull'importanza della scelta di strumenti e regole
  — "riga e compasso", ...
— consapevolezza sull'importanza delle riflessioni critiche
  — collegamenti e unificazioni
  — evoluzione
  — statuto epistemologico
— consapevolezza sull'importanza e sul significato delle assiomatizzazioni

---

Tavola n. 7

4.3. - Sull'idea di insegnamento della Matematica (nelle scuole).

1) Cinque domande, una scelta e un brano di **R. Godement.**

a) le domande:
  1) perché far apprendere Matematica nella scuola?
  2) che cosa far apprendere di Matematica e sulla Matematica nella scuola?
  3) come far apprendere Matematica nella scuola?
  4) da chi far apprendere Matematica nella scuola?
  5) a chi far apprendere Matematica nella scuola?

b) la scelta tra:
  — visione MATEMATICOCENTRICA (o matematicolatrica),
  — visione ANTROPOCENTRICA (ma non antropolatrica).

---

[31] Cfr., ad esempio, "Come pensiamo il pensiero? Costruttivismo e integrazionismo" di **G. Cavallini,** *Scuola e città*, 1992, n. 1.

b) educazione CON la Matematica:
— strutture del pensiero;
— capacità operative generali;
— capacità interpretative generali;
— capacità di ragionamento e di argomentazione;
— capacità di riflessione critica;
— mentalità critica;
— consapevolezza culturale;
— collegamenti interdisciplinari.

c) educazione IN presenza della Matematica:
— presenza operativa;
— presenza formativa:
— presenza culturale.

3) raccomandazioni conclusive:
— gestire l'accumulo;
— gestire i programmi di insegnamento;
— insegnamento esplicito, anche su:
  - valore della Matematica per l'uomo;
  - rapporti con la realtà;
  - sviluppi interni della Matematica;
  - su insegnamenti dell'evoluzione della Matematica (in particolare: assiomatiche implicite);
— insegnare a imparare;
— insegnare a gestire l'accumulo;
— testimoniare amore per la Matematica.

5. - SUI DATI BIBLIOGRAFICI.

I dati bibliografici dei testi citati sono riportati nel testo o nelle note.
Per ulteriori dati segnalo *Revisiting Mathematics Education* di **H. Freudenthal**, Dordrecht, Kluver, 1991, ampiamente presentato nel "Supplemento bibliografico n. 26" di *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* (giugno 1992).

6. - CONCLUSIONE.

Ringrazio il prof. **R. Ferro** per avermi dato l'occasione di presentare anche per iscritto le considerazioni precedenti e ringrazio i Lettori per l'attenzione, invitando a farmi avere segnalazioni, suggerimenti, osservazioni.

c) il brano di **R. Godement** [32]:

A rischio di suscitare, in alcuni, i sentimenti di orrore e di costernazione che **Paolo Uccello** *ha così meravigliosamente rappresentato nella PROFANAZIONE DELL'OSTIA, dobbiamo d'altronde dire, poiché la questione si pone sempre di più, il nostro disaccordo con le numerose personalità che, attualmente, chiedono agli scienziati in generale, e ai matematici in particolare, di formare le migliaia di tecnici dei quali, a quanto sembra, avremmo urgente bisogno per sopravvivere.*

Stando così le cose, ci sembra che, nelle "grandi" nazioni sopra-sviluppate scientificamente e tecnicamente nelle quali viviamo, il primo dovere dei matematici, e di molti altri, sarebbe piuttosto, quello di fornire ciò che non viene loro richiesto, cioè degli uomini capaci di riflettere da soli, di scovare le argomentazioni false e le frasi ambigue, e agli occhi dei quali la diffusione della verità fosse infinitamente più importante, ad esempio, della televisione planetaria a colori e in rilievo: degli uomini liberi, e non dei robot per tecnocrati.

È tristemente evidente che il modo migliore di formare questi uomini che ci mancano non è quello di insegnare loro le scienze matematiche e fisiche, queste branche del sapere la cui buona norma consiste, in primo luogo, nel far finta di ignorare perfino la stessa esistenza di problemi umani, e alle quali le nostre società altamente civilizzate danno, ciò che dovrebbe risultare miope, il primo posto.

Ma anche insegnando matematica si può almeno tentare di dare alle persone il gusto della libertà e della critica, e abituarle a vedersi trattare da esseri umani dotati della facoltà di capire.

NB – Le idee di uomo, di formazione e apprendimento, di cultura hanno, ovviamente, implicazioni sulle idee di scuola, di insegnamento e di ruolo della scuola nel quadro delle sollecitazioni (natura, famiglia, società, gruppo).

NB – L'idea di Matematica ha, ovviamente, implicazioni sull'idea di quello che l'apprendimento della Matematica può dare all'uomo che si sta formando nella scuola (attuale o prossima).

NB – Sul rapporto insegnante–alunno–classe riporto un brano di **G. Peano** [33]:

La differenza tra noi e gli allievi affidati alle nostre cure sta solo in ciò, che noi abbiamo percorso un più lungo tratto della parabola della vita. Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Nè vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori. Dobbiamo prendere gli allievi come sono, e richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura. Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore, eccita odio contro sè e la scienza che insegna, non solo il suo insegnamento sarà negativo, ma il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui un continuo tormento. Ognuno si fabbrica la sua fortuna, buona o cattiva. Chi è causa del suo mal pianga sè stesso. (...)

2) educazione A, educazione CON, educazione IN.

a) educazione A la Matematica:

— acquisizioni "iniziali", "medie","superiori";
— utilizzazioni "elementari", "medie", "superiori";
— riflessioni sulle utilizzazioni "elementari", "medie", "superiori".

[32] Tradotta da *Cours d'Algèbre*, II ed., Paris, Hermann, 1966, pp. 16-17.

[33] Da *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*, cfr. [12], p. 63 (punteggiatura e accenti sono quelli del testo.)

I N D I C E