

## Capitolo 2

# La sfera

*...come veggian le terreni menti  
non capere in triangolo due ottusi*  
Dante, Paradiso XVII, 14-15

La sfera, nell'immaginario collettivo, ha avuto sempre una grande importanza come espressione di ordine e di armonia, simbolo di bellezza e di perfezione.

N.Copernico (1473–1543), nel suo primo trattato di astronomia, il *Commentariolus*, così scrive:

*I nostri antenati hanno immaginato un gran numero di sfere celesti per una ragione speciale: spiegare il movimento apparente dei pianeti attraverso il principio di regolarità. Essi infatti giudicavano assurdo che un corpo celeste non si muova sempre a una velocità uniforme in un cerchio perfetto.*

Il fatto che la terra fosse sferica è attribuito ora a Pitagora, ora a Parmenide, ora ad entrambi. Per i Pitagorici attorno alla sfera terrestre girano il Sole, la Luna e i pianeti, fissati a sfere concentriche. Le vivaci rotazioni di questi corpi producono la cosiddetta *armonia delle sfere*, che non è solo un'invenzione poetica, ma un concetto scientifico - come è messo bene in evidenza da A.Koestler [K]: "Dopo un'immensa deviazione, alla fine del XVI secolo, un certo Johann Kepler s'invaghì del sogno di Pitagora e su quel fondamento di fantasia, per mezzo di ragionamenti altrettanto azzardati, si mise a costruire il solido edificio dell'astronomia moderna".

Verso la fine del V secolo a.C., Filolao, eminente esponente del pitagorismo, pensò la Terra muoversi intorno ad un cerchio occupato da un "fuoco centrale", ma non ebbe l'idea di farla girare intorno al suo asse. Questo passo fu fatto da Eraclide Pontico (IV sec. a.C.), che così riuscì a spiegare l'alternarsi del giorno e della notte, ma non era ancora spiegato il movimento annuo dei pianeti. Chi pose al centro dell'universo planetario il Sole e non la Terra fu Aristarco di Samo

(circa 310 a.C.), che si può considerare il “Copernico greco”. Aristarco morì senza discepoli e non ebbe successori e ancora A.Koestler dice: “Per quasi due millenni il sistema eliocentrico venne dimenticato (o è il caso di dire rimosso?) fino a che un oscuro canonico di Varnia, nei lontani avamposti della cristianità, riprese il filo che aveva lasciato l’astronomo di Samo”.

Quando si perde la memoria storica e si procede basandosi solo sulle apparenze, senza chiedersi il perché, è possibile che si sia “condannati” dopo secoli a riscoprire ciò che già era stato intuito, forse con anticipo sui tempi non ancora maturi per quelle “rivoluzionarie” scoperte.

## 2.1 La sfera della geometria elementare

Nel libro XI dei suoi *Elementi*, dedicato alla trattazione della geometria elementare, Euclide così definisce la sfera:

### Definizione 2.1.1 (Euclide)

1. *Sfera è la figura che viene compresa quando, restando immobile il diametro di un semicerchio, si faccia ruotare il semicerchio intorno al diametro finché non torni nuovamente nella posizione da cui si cominciò a farlo muovere.*

2. *Centro di una sfera è quello stesso punto che è anche il centro del semicerchio.*

Ne segue che la *superficie sferica* è la superficie generata da una semicirconferenza quando compie un giro completo attorno al suo diametro. È chiaro che la superficie sferica è caratterizzata dall’aver tutti i punti equidistanti da un punto fisso, ma questa definizione è di Teodoro di Bitinia (II sec. a.C.), anche se sembra possa risalire a Eudosso di Cnido (IV sec a.C.).

Apollonio di Perga (225 a.C.) definisce la superficie sferica come *luogo dei punti dello spazio per i quali il rapporto delle distanze da due punti fissi è una costante  $k \neq 1$* .

Naturalmente le due definizioni sono equivalenti come abbiamo provato nel caso analogo della circonferenza.

Osserviamo che se  $k = 1$  si ottiene il piano diametrale rispetto ad  $A$  e  $B$ . Il piano così si può pensare come una “sfera di raggio infinito”.

**Osservazione 2.1.2** La sfera può essere caratterizzata in altri modi, ad esempio come l’unica superficie i cui *profili* e le cui *sezioni piane* sono circonferenze (vedi [HV]). Questa proprietà è stata usata per riconoscere che la terra è rotonda, osservando durante le eclissi che la sua ombra è circolare. Un’altra caratterizzazione, molto interessante è la seguente.

**Teorema 2.1.3** *L’unica superficie (connessa) di rotazione, simultaneamente intorno a due rette incidenti, è la sfera.*

**Dimostrazione.** Diamo solo un cenno. Siano  $r$  e  $s$  i due assi di rotazione incidenti in  $O$  e  $\Sigma$  la superficie di rotazione simultaneamente intorno ad  $r$  e ad  $s$ . Se  $P$  è un punto di  $\Sigma$ , la superficie  $\tilde{S}$  generata da  $P$  intorno alle due rette è una porzione di sfera (di centro  $O$  e raggio  $OP$ ), contenuta in  $\Sigma$ . Ripetendo il ragionamento per i punti di  $\tilde{S}$  si conclude che tutta la sfera  $S$  di centro  $O$  e raggio  $OP$ , appartenente a  $\Sigma$ . Per la connessione di  $\Sigma$  si conclude che  $\Sigma \equiv S$ .  $\square$

Si osservi che qui, a differenza del caso piano, l'angolo tra le rette incidenti può essere arbitrario.

Usando questo teorema, L.Tonelli ha dimostrato elementarmente il *teorema isoperimetrico dello spazio*:

**Teorema 2.1.4** *Fra tutti i solidi di uguale area laterale, la sfera è quello che ha volume massimo.*

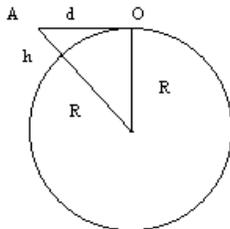
*Fra tutti i solidi di uguale volume, la sfera è quello che ha l'area superficiale minima.*

Per lo spazio la disuguaglianza perimetrica è: se  $\mathcal{V}(F)$  è il volume del solido  $F$  e  $\mathcal{A}(F)$  l'area della sua superficie, allora

$$\mathcal{A}(F)^3 \geq 36\pi\mathcal{V}(F)^2.$$

## 2.2 Un'applicazione geografica

Si legge che fin dai tempi più lontani una delle prove della rotondità della terra era offerta dal fatto che, quando una nave si avvicinava a riva, se ne scorgeva dapprima la sommità degli alberi e solo successivamente lo scafo. È questa prova davvero attendibile? Se indichiamo con  $O$  l'osservatore,  $h$  l'altezza dell'albero della nave al di sopra del livello del mare,  $d$  la distanza tra l'osservatore e la sommità dell'albero della nave e  $R$  il raggio della terra, si vede che ([SV])



$$(h + R)^2 = d^2 + R^2$$

e quindi

$$h^2 + 2hR = d^2.$$

Tenendo presente che  $R \sim 6,3 \cdot 10^6 m$ , si ha che il termine  $h^2$  è trascurabile rispetto a  $2hR$ , per cui

$$d \sim \sqrt{2hR} \sim 3,54 \cdot 10^3 \sqrt{h}.$$

Ad esempio, se volessimo calcolare da che distanza sarebbe visibile il campanile del Duomo di Lecce (alto 68,38 m) se non ci fossero ostacoli, avremmo che il campanile è visibile da circa 29 km di distanza.

Comunque, il metodo più preciso per la determinazione della forma sferica della Terra è quello astronomico.

### 2.3 La sfera $\mathbb{S}^n$

Sia  $\mathbb{R}^{n+1}$  lo spazio euclideo standard. Se  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $r > 0$  si dice *sfera di raggio  $r$  e centro  $\mathbf{x}_0$*

$$\mathbb{S}_{\mathbf{x}_0}^n(r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r\},$$

dove, come è usuale, se  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n+1}^2}.$$

In particolare poniamo

$$\mathbb{S}^n(r) := \mathbb{S}_{\mathbf{0}}^n(r); \quad \mathbb{S}^n := \mathbb{S}^n(1);$$

$\mathbb{S}^n$  si dice la *sfera unitaria* di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Se  $k$  è un numero intero tale che  $1 \leq k \leq n+1$ , si chiama  *$k$ -sottosfera* l'intersezione di  $\mathbb{S}^n(r)$  con un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{n+1}$  di dimensione  $k+1$ . Se  $k=1$  tale intersezione viene chiamata *cerchio massimo*.

Osserviamo che se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono punti di  $\mathbb{S}^n(r)$  e  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ , allora esiste un unico cerchio massimo contenente  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

Se  $V$  è il sottospazio  $(k+1)$ -dimensionale individuato dalle  $n-k-1$  equazioni lineari

$$\begin{cases} x_{k+2} = 0 \\ x_{k+3} = 0 \\ \vdots \\ x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

si ha

$$\mathbb{S}^n(r) \cap V = \mathbb{S}^k(r).$$

Infatti un punto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  appartiene a  $\mathbb{S}^n(r) \cap V$  se e solo se le sue coordinate verificano il sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2 \\ x_{k+2} = 0 \\ x_{k+3} = 0 \\ \vdots \\ x_{n+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = r^2 \\ x_{k+2} = 0 \\ x_{k+3} = 0 \\ \vdots \\ x_{n+1} = 0, \end{cases}$$

cioè  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^n(r) \cap V$  se e solo se  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^k(r)$ .

Si ricordi che si dice *sottospazio affine  $k$ -dimensionale* di  $\mathbb{R}^{n+1}$  un insieme del tipo

$$A = V + \mathbf{a} = \{\mathbf{v} + \mathbf{a} : \mathbf{v} \in V\}$$

dove  $V$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{n+1}$  di dimensione  $k$  e  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ; si vede facilmente che se  $\mathbf{a}$  non appartiene a  $V$ ,  $A$  non è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Si chiama  *$k$ -sfera piccola* l'intersezione  $\mathbb{S}^n(r) \cap A$ , dove  $A$  è un sottospazio affine  $(k+1)$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^{n+1}$  tale che  $\mathbb{S}^n(r) \cap A \neq \emptyset$ . Tale intersezione risulta essere la traslazione di una  $k$ -sottosfera di raggio minore di  $r$ .

Chiameremo *polo nord* di  $\mathbb{S}^n(r)$  il punto  $N = (0, \dots, 0, r)$ , *polo sud* il punto  $S = (0, \dots, 0, -r)$ , *equatore* la  $(n-1)$ -sottosfera intersezione di  $\mathbb{S}^n(r)$  con l'iperpiano di  $\mathbb{R}^{n+1}$  di equazione  $x_{n+1} = 0$ .

Se  $\mathbf{x}$  è un punto di  $\mathbb{S}^n(r)$ , si dirà *iperpiano tangente* in  $\mathbf{x}$  a  $\mathbb{S}^n(r)$ , e si indicherà con  $T_{\mathbf{x}}(\mathbb{S}^n)$ , l'iperpiano affine passante per  $\mathbf{x}$  ed ortogonale ad  $\mathbf{x}$ ; i suoi elementi saranno detti *vettori tangenti* a  $\mathbb{S}^n(r)$  in  $\mathbf{x}$ .

L'*angolo* di due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , non nulli, tangenti a  $\mathbb{S}^n(r)$  in  $\mathbf{x}$  sarà come al solito

$$\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \in [0, \pi[.$$

La topologia naturale di  $\mathbb{S}^n(r)$  sarà quella indotta da  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

In seguito faremo riferimento alla sfera in  $\mathbb{R}^3$  di centro  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e raggio  $r > 0$ , cioè a

$$\mathbb{S}_{P_0}^2(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}.$$

Per semplicità di notazione scriveremo  $\mathbb{S}_{P_0}(r)$ ,  $\mathbb{S}(r)$ ,  $\mathbb{S}$  intendendo rispettivamente  $\mathbb{S}_{P_0}^2(r)$ ,  $\mathbb{S}^2(r)$ ,  $\mathbb{S}^2$ .

Osserviamo che  $\mathbb{S}_{P_0}(r)$  corrisponde alla superficie sferica definita da Euclide, però successivamente diremo semplicemente sfera invece di superficie sferica.

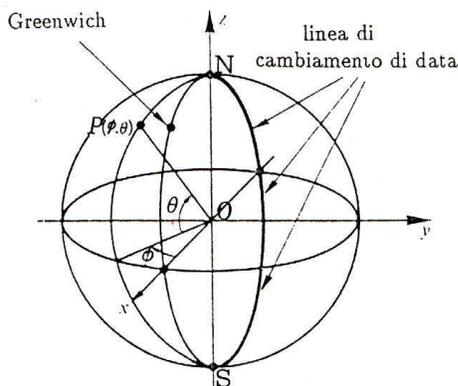
## 2.4 Rappresentazione della sfera in coordinate geografiche

Consideriamo la sfera  $\mathbb{S}(r)$  di  $\mathbb{R}^3$ . Per ogni  $P \in \mathbb{S}(r)$  si chiama *latitudine*<sup>1</sup> di  $P$  il numero reale

$$\theta(P) = \frac{\pi}{2} - (\widehat{ON, OP})$$

<sup>1</sup>da *latitudo* =larghezza e da *longitudo*=lunghezza, perché nella direzione Nord-Sud il mondo conosciuto dagli antichi si estendeva di meno che in quella Est-Ovest

dove  $(\widehat{ON, OP})$  è l'angolo assoluto (non orientato) tra le semirette  $ON$  e  $OP$ , detto anche *colatitudine*. I punti dell'equatore hanno latitudine 0 mentre  $\theta(N) = \frac{\pi}{2}$  e  $\theta(S) = -\frac{\pi}{2}$ .



Se  $P \in \mathbb{S}(r) - \{N, S\}$  si chiama *longitudine* di  $P$  il numero reale  $\phi(P) \in ]-\pi, \pi[$ , misura dell'angolo orientato individuato dalle rette orientate  $OA$  e  $OP'$  dove  $A = (r, 0, 0)$  e  $P'$  è la proiezione di  $P$  sul piano  $xy$ .

Sia  $\Gamma$  il semicerchio massimo passante per  $N$ ,  $S$  e  $(-r, 0, 0)$ . Se  $P \notin \Gamma$  allora  $\phi(P)$  è ben determinata; per  $N$  e  $S$  è completamente indeterminata; per gli altri punti di  $\Gamma$  la longitudine va scelta tra i valori  $-\pi$  e  $\pi$ .

Gli elementi della coppia  $(\phi, \theta)$  si dicono *coordinate geografiche* sulla sfera.

Dalle definizioni segue che

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

dove  $\phi \in ]-\pi, \pi[$  e  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$ , sono anche equazioni parametriche della sfera (in coordinate terrestri).

I *meridiani*<sup>2</sup> (risp. *paralleli*) di  $\mathbb{S}(r)$  sono le curve dove la longitudine (risp. latitudine) è costante. Si vede che i meridiani sono le intersezioni della sfera con i piani passanti per l'asse  $z$  e che i paralleli sono le intersezioni della sfera con i piani perpendicolari allo stesso asse.

**Nota.** Nel 1884 nel corso di una conferenza internazionale tenutasi a Washington, si scelse come meridiano fondamentale, o meridiano di longitudine 0, quello passante per l'osservatorio di Greenwich (Londra); il meridiano  $\Gamma$  (di

<sup>2</sup>Da *meridies*, perché sulla terra uniscono punti che hanno il mezzogiorno nello stesso momento.

longitudine  $180^\circ$ ) è la linea di cambiamento di data che corre prevalentemente sull'Oceano Pacifico, incontrando quasi nessuna terra emersa.

Le coordinate geografiche di Lecce sono  $\theta = 40^\circ 23'$  Nord e  $\phi = 18^\circ 11'$  Est.

## 2.5 L'ellissoide terrestre

Come è noto l'equazione di un ellissoide  $\Sigma$  di rotazione riferito ai suoi assi si può porre nella forma

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

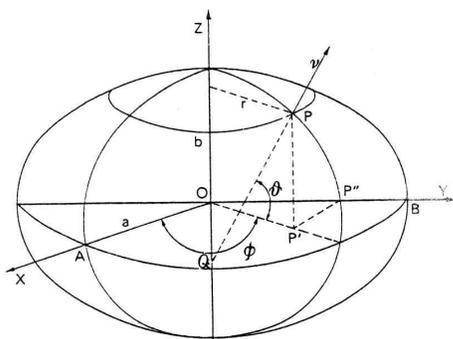
Supponiamo che  $a \geq b$  e poniamo

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad \alpha = \frac{a - b}{a}.$$

Il numero  $e$  si dice l'*eccentricità* dell'ellissoide e  $\alpha$  il suo *schacciamento*. Si vede che

$$e^2 = \alpha(2 - \alpha).$$

Le coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  di un punto  $P$  dell'ellissoide si chiamano *coordinate geocentriche*. Definiamo ora le *coordinate geografiche* di  $P$ .



Sia  $\nu$  la verticale per  $P$ , cioè la perpendicolare per  $P$  al piano tangente in  $P$  all'ellissoide. Chiamiamo *latitudine* di  $P$  l'angolo  $\theta$  che  $\nu$  forma col piano equatoriale (i.e. il piano  $z = 0$ ); chiamiamo invece *longitudine* di  $P$  l'angolo  $\phi$  tra il meridiano per  $P$  e il meridiano fondamentale, dove il meridiano per  $P$  è l'intersezione del piano passante per  $P$  e per l'asse  $z$  con l'ellissoide e il meridiano fondamentale è quello passante per  $A(a, 0, 0)$ .

Sia  $\mathcal{N}$  la "gran normale", cioè la misura del segmento  $PQ$ ; allora

$$\begin{cases} x = \mathcal{N} \cos \phi \cos \theta \\ y = \mathcal{N} \sin \phi \cos \theta \\ z = \mathcal{N}(1 - e^2) \sin \theta \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \phi = \arctan \frac{y}{x} \\ \theta = \arcsin \frac{z}{\mathcal{N}(1-e^2)}. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che

$$\mathcal{N} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta}}.$$

Naturalmente per  $e = 0$ , l'ellissoide diventa una sfera e  $\mathcal{N}$  è uguale al raggio della sfera.

**Nota.** L'Unione geodetica e geofisica internazionale ha stabilito, durante il congresso di Madrid del 1924, di assumere come ellissoide internazionale di riferimento quello calcolato da J.F.Hayford (1909) ponendo  $a=6378388$  m,  $\alpha=1/297$  e deducendo poi  $b = a(1 - \alpha)=6356912$  m.

## 2.6 Geometria della sfera

Chiamasi geometria della sfera lo studio delle proprietà delle figure appartenenti ad una superficie sferica. La geometria della sfera fornisce un esempio abbastanza semplice di “geometria non-euclidea”, che ispirò certamente B. Riemann (1826-1866) nella sua rifondazione della geometria. Valgono le seguenti proprietà elementari.

### Proposizione 2.6.1

1. *Da un punto di una superficie sferica escono quanti si vogliono cerchi massimi, i quali passano tutti anche per il punto diametralmente opposto a quello considerato.*
2. *Per due punti non diametralmente opposti passa uno ed un solo cerchio massimo.*
3. *Due cerchi massimi si incontrano sempre in due punti tra loro diametralmente opposti.*
4. *Due punti A e B sono situati da bande opposte di un cerchio massimo, se questo viene segnato dall'arco AB.*
5. *Due cerchi massimi dividono la superficie sferica in quattro parti dette angoli sferici. Tali angoli sferici risultano quindi delimitati da due semicirconferenze massime (dette lati) che si incontrano in due punti opposti (detti vertici).*

Per misura di un angolo sferico si intende la misura del diedro corrispondente e la sezione normale di tale diedro è per esempio individuata dall'angolo formato dalle tangenti ai lati uscenti dallo stesso vertice.

Tutta la nomenclatura in uso per gli angoli piani si trasporta integralmente agli angoli sferici, cosicché si parlerà di angoli adiacenti, consecutivi, opposti al vertice, ecc..

### 2.6.1 Triangolo sferico

Consideriamo tre semirette non complanari  $r_A, r_B, r_C$  di comune origine  $O$  e il triedro convesso intersezione dei semispazi delimitati dai piani  $r_A r_B, r_B r_C, r_C r_A$  e contenenti rispettivamente  $r_C, r_A, r_B$ .

Angoli piani o facce del triedro sono gli angoli convessi  $\widehat{r_A r_B}, \widehat{r_B r_C}, \widehat{r_C r_A}$ ; angoli diedri del triedro sono i diedri convessi di spigoli  $r_A, r_B, r_C$  intersezioni delle coppie di semispazi considerate.

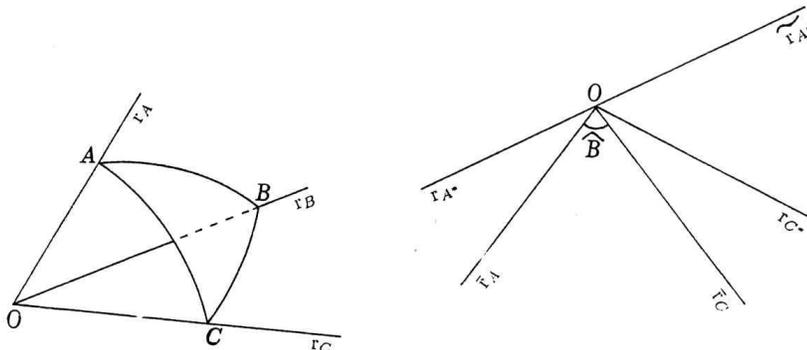
Indichiamo con  $\tau$  il triedro in considerazione;  $\tau \cap \mathbb{S}$  costituisce un *triangolo sferico* che ha per vertici  $A = r_A \cap \mathbb{S}, B = r_B \cap \mathbb{S}, C = r_C \cap \mathbb{S}$ ; per lati gli archi di cerchi massimi  $a = \widehat{BC} = r_B r_C \cap \mathbb{S}, b = \widehat{CA} = r_C r_A \cap \mathbb{S}, c = \widehat{AB} = r_A r_B \cap \mathbb{S}$ ; per angoli l'angolo  $\widehat{A}$ , che formano le semirette uscenti da  $A$  e tangenti agli archi  $\widehat{AC}$  e  $\widehat{AB}$  e gli angoli  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$  definiti analogamente.

Assumendo il raggio della sfera come unità di misura per le lunghezze, si ha che le misure (in radianti) degli angoli piani di  $\tau$  uguagliano le lunghezze dei corrispondenti lati del triangolo sferico e che le misure degli angoli diedri di  $\tau$  sono uguali alle misure degli angoli del triangolo sferico. Quindi la misura di ogni lato e di ogni angolo di un triangolo sferico è compresa tra 0 e  $\pi$ .

Al triedro  $Or_A r_B r_C$  si può far corrispondere un triedro  $Or_{A^*} r_{B^*} r_{C^*}$  che dicesi *polare* (o *supplementare*) dove

- $r_{A^*}$  è la semiretta perpendicolare al piano  $r_B r_C$ , situata dalla stessa parte di  $r_A$ ;
- $r_{B^*}$  è la semiretta perpendicolare al piano  $r_C r_A$ , situata dalla stessa parte di  $r_B$ ;
- $r_{C^*}$  è la semiretta perpendicolare al piano  $r_A r_B$ , situata dalla stessa parte di  $r_C$ .

Il triangolo sferico  $A^* B^* C^*$ , intersezione di  $Or_{A^*} r_{B^*} r_{C^*}$  con  $\mathbb{S}$  si chiama *polare* (o *supplementare*) di  $ABC$ .



**Teorema 2.6.2** *Per un triangolo sferico  $ABC$  valgono*

$$\begin{aligned}\widehat{A} + a^* &= \widehat{B} + b^* = \widehat{C} + c^* = \pi, \\ \widehat{A}^* + a &= \widehat{B}^* + b = \widehat{C}^* + c = \pi.\end{aligned}$$

**Dimostrazione.** Dimostriamo solo una di queste relazioni. Chiamiamo  $\alpha$  il piano perpendicolare a  $r_B$  e passante per  $O$ . Siano  $\bar{r}_A = r_B r_C \cap \alpha$  e  $\bar{r}_C = r_A r_B \cap \alpha$ . Allora  $\widehat{\bar{r}_A \bar{r}_C} = \widehat{B}$ .

Ora  $r_{C^*}, r_{A^*}$  sono contenute in  $\alpha$ ,  $\widehat{r_{A^*} r_{C^*}} = \widehat{A^* C^*} = b^*$  e  $\widehat{r_{C^*} \bar{r}_{A^*}} = \widehat{B}$ , dove  $\bar{r}_{A^*}$  è la semiretta opposta di  $r_{A^*}$ .

Inoltre  $\widehat{r_{A^*} r_{C^*}} + \widehat{r_{C^*} \bar{r}_{A^*}} = \pi$ , dunque  $b^* + \widehat{B} = \pi$ .

Analogamente per le altre uguaglianze perché la relazione tra  $ABC$  e  $A^* B^* C^*$  è simmetrica.  $\square$

Ognuno dei criteri di uguaglianza stabiliti per i triedri dà luogo ad un analogo criterio per i triangoli sferici. Si hanno così i seguenti criteri di uguaglianza per i triangoli sferici.

**Proposizione 2.6.3** *Sono uguali due triangoli sferici che abbiano ordinatamente uguali*

- 1) *due lati e l'angolo compreso;*
- 2) *due angoli e il lato comune;*
- 3) *i tre lati;*
- 4) *i tre angoli.*

Si osservi che da 4) segue che su una superficie sferica non esistono triangoli simili (e quindi nemmeno figure simili di qualsiasi specie) che non siano addirittura uguali.

## 2.6.2 Alcune importanti relazioni vettoriali

Se  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  sono tre vettori dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ , allora

$$(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_1. \quad (2.1)$$

Per provare tale relazione basta considerare un riferimento ortonormale e verificare che i due membri sono uguali.

Analogamente si può verificare che vale la cosiddetta “identità di Lagrange”

$$(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}. \quad (2.2)$$

Da questa identità segue che, se indichiamo con  $\mathcal{A}$  l'area del parallelogramma costruito sui vettori  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ , si ha

$$\mathcal{A}^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 \end{vmatrix}.$$

**Osservazione 2.6.4** L'identità di Lagrange è caso particolare dell'identità di Gram. Considerati  $h$  vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h$  si chiama determinante di Gram, relativo a tali vettori, il determinante della matrice

$$G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h) = (g_{ij}) \quad i, j = 1, \dots, h$$

dove  $g_{ij} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j$ . Si prova che

$$\det G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h \text{ dipendenti.}$$

Più precisamente si dimostra che

$$\det G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h) = \mathcal{V}_h^2$$

dove  $\mathcal{V}_h$  è il volume del parallelepipedo costruito sui vettori  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$ . Ovviamente se i vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h$  sono ortogonali, cioè  $g_{ij} = 0$  per  $i \neq j$ , allora

$$\mathcal{V}_h = \|\mathbf{u}_1\| \cdots \|\mathbf{u}_h\|.$$

Le identità precedenti ci permettono di dimostrare la “relazione fondamentale” della trigonometria sferica attribuita ad Eulero (1707-1783), benchè stabilita la prima volta dall'astronomo arabo Al Battani (850-929).

**Teorema 2.6.5** Per un triangolo sferico  $ABC$  di lati  $a, b, c$  si ha

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A}.$$

**Dimostrazione.** Innanzitutto supponiamo fissato l'ordine delle semirette del triedro  $Or_A r_B r_C$  in modo tale che i versori

$$\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{r}_B = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{r}_C = \overrightarrow{OC}$$

definiscano l'orientazione positiva dello spazio. Quindi, indicando con  $\sim$  la relazione di equiversità tra basi si ha

$$(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C) \sim (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}).$$

Tenuto conto della definizione di triedro polare, se

$$\mathbf{r}_{A^*} = \overrightarrow{OA^*}, \quad \mathbf{r}_{B^*} = \overrightarrow{OB^*}, \quad \mathbf{r}_{C^*} = \overrightarrow{OC^*},$$

valgono

$$(\mathbf{r}_{A^*}, \mathbf{r}_{B^*}, \mathbf{r}_{C^*}) \sim (\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C) \sim (\mathbf{r}_{A^*}, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C) \sim (\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_{B^*}, \mathbf{r}_{C^*}).$$

Allora per le definizioni stesse di prodotto scalare e vettoriale si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A \wedge \mathbf{r}_B &= (\sin c)\mathbf{r}_{C^*} & \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B &= \cos c \\ \mathbf{r}_{A^*} \wedge \mathbf{r}_{B^*} &= (\sin c^*)\mathbf{r}_C = \sin(\pi - \widehat{C})\mathbf{r}_C = (\sin \widehat{C})\mathbf{r}_C \\ \mathbf{r}_{A^*} \cdot \mathbf{r}_{B^*} &= \cos c^* = \cos(\pi - \widehat{C}) = -\cos \widehat{C}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Valgono inoltre le analoghe relazioni permutando le lettere. Da (2.2) segue

$$(\mathbf{r}_A \wedge \mathbf{r}_B) \cdot (\mathbf{r}_C \wedge \mathbf{r}_A) = (\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_C)(\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_A) - (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_C)(\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_A).$$

Tenuto conto delle (2.3) trovate, si ha per il primo membro

$$(\sin c)\mathbf{r}_{C^*} \cdot (\sin b)\mathbf{r}_{B^*} = -\sin b \sin c \cos \widehat{A}$$

e per il secondo

$$\cos b \cos c - \cos a$$

da cui la relazione fondamentale da dimostrare.  $\square$

Se poniamo  $\widehat{A} = \pi/2$ , otteniamo

**Corollario 2.6.6** *In un triangolo sferico rettangolo il coseno dell'ipotenusa è uguale al prodotto dei coseni dei cateti.*

Come vedremo dopo, questo è l'analogo del teorema di Pitagora.

**Corollario 2.6.7** *Il lato  $a$  d'un triangolo sferico di lati  $b, c$  fissati è funzione strettamente crescente dell'angolo  $\widehat{A}$ .*

**Corollario 2.6.8** *Per ogni triangolo sferico si ha*

$$|b - c| < a < b + c \quad e \quad a + b + c < 2\pi.$$

*Inversamente, se tre numeri reali  $a, b, c \in ]0, \pi[$  verificano le condizioni di sopra, allora esiste un triangolo sferico di lati  $a, b, c$  e questo triangolo è unico a meno di isometrie.*

**Dimostrazione.** Poiché  $|\cos \widehat{A}| < 1$ , dalla relazione fondamentale segue

$$-1 < \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} < 1$$

e quindi, poichè  $\sin b \sin c > 0$ , allora

$$-\sin b \sin c < \cos a - \cos b \cos c < \sin b \sin c$$

da cui

$$\cos(b + c) < \cos a < \cos(b - c),$$

la quale per  $a, b, c \in ]0, \pi[$  implica  $a < b+c, b+c < 2\pi-a$  e pertanto  $a+b+c < 2\pi$ ; poi, permutando i lati,

$$b < c + a, \quad c < a + b \quad \Rightarrow \quad |b - c| < a.$$

Inversamente, supponiamo che  $a, b, c$  verifichino le due condizioni del lemma, allora

$$\left| \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right| < 1$$

e quindi segue l'esistenza di un  $\widehat{A} \in ]0, \pi[$  tale che

$$\cos \widehat{A} = \left| \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right|.$$

Trascuriamo la dimostrazione dell'unicità a meno di isometrie.  $\square$

**Osservazione 2.6.9** Da  $0 < a + b + c < 2\pi$  e da  $\widehat{A}^* + a = \widehat{B}^* + b = \widehat{C}^* + c = \pi$  segue che

$$\pi < \widehat{A}^* + \widehat{B}^* + \widehat{C}^* < 3\pi, \quad \pi < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 3\pi.$$

La proprietà  $0 < a + b + c < 2\pi$  si trova in Euclide (XI, 20, 21) dimostrata per i triedri, senza usare la geometria della sfera.

**Osservazione 2.6.10** Tenendo conto che

$$\tan \frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \widehat{A}}{1 + \cos \widehat{A}}} = \sqrt{\frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}},$$

dopo semplici manipolazioni si ha

$$\tan \frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}} \quad (2.4)$$

dove  $p$  è il semiperimetro del triangolo. Da  $\widehat{A} = \widehat{B}$  segue  $\tan \frac{\widehat{A}}{2} = \tan \frac{\widehat{B}}{2}$  e per la (2.4)

$$\widehat{A} = \widehat{B} \Leftrightarrow a = b.$$

Quindi un triangolo sferico sarà *equilatero* (cioè  $a = b = c$ ) se e solo se i tre angoli sono uguali. Ma contrariamente al caso piano questo valore comune dei tre angoli non è univocamente individuato, ma può variare in tutto  $] \pi/3, \pi[$ : per esempio si possono costruire facilmente triangoli aventi tre angoli retti. Analogamente, se  $a < 2\pi/3$ , esiste un triangolo equilatero di lato  $a$ .

**Teorema 2.6.11 (dei seni per i triangoli sferici)** *Per un triangolo sferico  $ABC$  vale*

$$\frac{\sin \widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin c}.$$

**Dimostrazione.** Da (2.1) si ha

$$|(\mathbf{r}_A \wedge \mathbf{r}_B) \wedge (\mathbf{r}_C \wedge \mathbf{r}_A)| = |(\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_C \wedge \mathbf{r}_A)\mathbf{r}_B - (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_C \wedge \mathbf{r}_A)\mathbf{r}_A| = |\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B \wedge \mathbf{r}_C|$$

e quindi

$$|\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B \wedge \mathbf{r}_C| = |\sin \widehat{C} \mathbf{r}_{C^*} \wedge \sin b \mathbf{r}_{B^*}| = \sin b \sin c \sin \widehat{A}.$$

Poiché  $\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B \wedge \mathbf{r}_C$  resta inalterato per una permutazione ciclica dei tre vettori si ha

$$\sin b \sin c \sin \widehat{A} = \sin c \sin a \sin \widehat{B} = \sin a \sin b \sin \widehat{C},$$

da cui il teorema voluto.  $\square$

**Nota storica.** Le origini dello studio della geometria sulla sfera risalgono, confondendosi con quelle dell'Astronomia, a quando l'uomo, attratto dal fascino della volta celeste, cercò di sottoporre al ragionamento i fenomeni celesti.

La Sferica, sorta tra i Caldei e i Babilonesi, ebbe, accanto all'Astronomia, grande sviluppo presso i Greci. Il più antico trattato di Sferica giunto fino a noi è dovuto ad un contemporaneo di Euclide, Autolico da Pitone.

Anche Euclide trattò della Sferica in uno dei suoi scritti, seguito da Teodosio da Tripoli (107-ca 43 a.C.) e più tardi da Menelao di Alessandria (I sec. A.C.), con il quale la geometria sferica raggiunge l'apogeo. Egli introduce la nozione di "triangolo sferico" e trova il seguente teorema dal quale si può dedurre tutta la trigonometria sferica (come ha fatto Tolomeo).

**Teorema 2.6.12 (di Menelao)** *Se i lati  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CA}$ ,  $\widehat{AB}$  di un triangolo sferico  $ABC$  sono tagliati nei punti  $L, M, N$  da un arbitrario circolo massimo, allora*

$$\left| \frac{\sin \widehat{BL}}{\sin \widehat{CL}} \cdot \frac{\sin \widehat{CM}}{\sin \widehat{AM}} \cdot \frac{\sin \widehat{AN}}{\sin \widehat{BN}} \right| = 1.$$

Una proposizione equivalente al teorema è la seguente:

**Proposizione 2.6.13** *Se il triangolo sferico  $ABC$  è rettangolo in  $A$  si ha*

$$\tan \widehat{AB} = \tan \widehat{BC} \cos \widehat{B}.$$

**Osservazione 2.6.14** Nella relazione fondamentale della trigonometria gli archi sono misurati in radianti. Se però vogliamo confrontare triangoli appartenenti a sfere di raggio diverso, dalla dimostrazione di quella formula segue subito che essa si scrive

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos \hat{A} \quad (2.5)$$

dove  $r$  è il raggio della sfera a cui appartiene il triangolo ABC.

Ora se sviluppiamo in serie le funzioni seno e coseno e poi consideriamo  $r \rightarrow \infty$  la (2.5) diventa

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

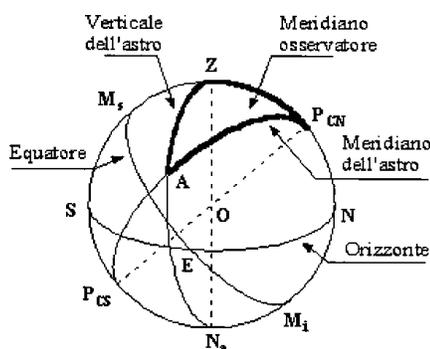
cioè la ben nota formula attribuita a Carnot (ma in effetti di F. Viète (1540-1603)). Dunque la trigonometria piana si presenta come limite della trigonometria sferica (quando il raggio della sfera va all'infinito).

Il Loria [L] nota il curioso fatto che storicamente la trigonometria sferica ha preceduto quella piana.

Il concetto di triangolo sferico fu generalizzato da A.F.Möbius nel seguente modo. Dati tre punti  $A, B, C$  di una sfera, non appartenenti allo stesso circolo massimo, si traccino i circoli massimi passanti per i punti a due a due e si fissi sopra di essi, a piacere, il senso in cui percorrerli positivamente. Così si ottengono 16 triangoli, poichè si hanno  $2^4$  modi di scambiare le direzioni positive sui circoli e il senso delle rotazioni sulla sfera.

## 2.7 Un'applicazione all'astronomia

Guardando il firmamento si ha l'impressione che la Terra sia al centro di una sfera di raggio grandissimo sulla quale sono proiettati gli astri. La "Sfera celeste" è solo un'illusione, ma viene presa in considerazione in astronomia per determinare la posizione di un astro rispetto alla terra. A tal fine si fissano degli elementi di riferimento.



Il prolungamento dell'asse terrestre (*asse del mondo*) incontra la Sfera celeste in due punti detti Polo Nord e Polo Sud celesti. L'Equatore celeste è la circonferenza massima ottenuta intersecando la Sfera celeste con il piano passante per l'equatore terrestre. I meridiani ed i paralleli celesti sono l'equivalente dei meridiani e paralleli terrestri. Per effetto della rotazione terrestre, gli astri sembrano percorrere dei paralleli celesti sulla Sfera che diventano sempre più piccoli quando gli astri si avvicinano al Polo Nord celeste. Il meridiano origine sulla Sfera celeste è per convenzione il meridiano passante per il punto  $\gamma$  o punto di Ariete (corrisponde al punto in cui la traiettoria apparente del Sole attraversa l'equatore celeste nell'equinozio di primavera). Si possono definire le coordinate celesti o coordinate equatoriali di un astro corrispondenti rispettivamente alla latitudine ed alla longitudine: la *declinazione celeste*  $\delta \in ]-\pi/2, \pi/2[$  e la *ascensione retta*  $\alpha \in [0, 2\pi[$ .

Accanto a questo sistema di riferimento si utilizza un sistema più intuitivo e legato all'osservatore.

Consideriamo un osservatore  $O$  sulla Terra. Date le distanze che intervengono, possiamo considerare la Terra puntiforme ed  $O$  posizionato al centro della Terra. Zenit è il punto in cui la verticale sopra la testa dell'osservatore incontra la Sfera celeste, mentre Nadir è il suo punto opposto. Orizzonte celeste è la circonferenza massima ottenuta intersecando la Sfera celeste con il piano perpendicolare alla verticale passante per l'osservatore. L'orizzonte celeste divide la Sfera nell'Emisfero visibile (che contiene lo Zenit) e l'Emisfero invisibile (che contiene il Nadir). I *verticali* sono le circonferenze massime passanti per lo Zenit ed il Nadir. Si dice *meridiano dell'osservatore* il meridiano celeste che passa per lo Zenit e che si ottiene intersecando il piano del meridiano terrestre passante per l'osservatore con la Sfera celeste. Più esattamente si definisce meridiano superiore la semicirconferenza passante per il Polo Nord Celeste, lo Zenit ed il Polo Sud Celeste e meridiano inferiore la restante semicirconferenza. Il piano del meridiano dell'osservatore interseca l'orizzonte nei due punti cardinali Nord e Sud.

Nel sistema altazimutale si determina la posizione di un astro tramite la sua latitudine e la sua longitudine calcolate rispetto all'orizzonte celeste ed al verticale passante per il Nord. Più precisamente, si chiama *azimut* ( $Az$ ) l'angolo compreso tra il piano del verticale passante per il Nord ed il piano passante per il verticale dell'astro. *Altezza*  $h$  è l'angolo formato dalla retta congiungente l'astro con l'osservatore e l'orizzonte celeste.

Per passare da un sistema di coordinate all'altro è utile la formula di Eulero. A tal fine si considera il triangolo (sferico) astronomico o di posizione che ha vertici nell'astro  $A$ , nel Polo Nord celeste  $P_{CN}$  e nello Zenit  $Z$ .

È immediato che la distanza polare  $p$ , cioè la lunghezza del lato  $P_{CN}A$ , è  $\pi/2 - \delta$ , la distanza zenitale  $z$ , cioè la lunghezza del lato  $AZ$ , è  $\pi/2 - h$  e la lunghezza  $c$  del lato  $ZP_{CN}$  è la colatitudine (nel sistema di riferimento terrestre) dell'osservatore.

L'angolo al polo  $\widehat{P_{CN}}$  è pari alla differenza  $d$  tra l'ascensione retta dello Zenit e l'ascensione retta dell'astro se  $d < \pi$  ed è  $2\pi - d$  se  $d \geq \pi$ . L'angolo azimutale  $\widehat{Z}$  coincide con l'azimut  $Az$  se  $Az < \pi$  ed è  $2\pi - Az$  se  $Az \geq \pi$ .

Come è noto (vedi Teorema 2.6.5), valgono le formule

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos c \cos p + \sin c \sin p \cos \widehat{P_{CN}} \\ \cos p &= \cos c \cos z + \sin c \sin z \cos \widehat{Z},\end{aligned}$$

da cui segue, tenendo conto delle espressioni di  $c$ ,  $p$  e  $z$ ,

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos \widehat{P_{CN}} \\ \sin \delta &= \sin \phi \sin h + \cos \phi \cos h \cos \widehat{Z},\end{aligned}$$

dove  $\phi$  è la latitudine dell'osservatore.

Dalle ultime formule, si vede facilmente come passare dalle coordinate celesti alle coordinate altazimutali e viceversa, nota la latitudine dell'osservatore e nota l'ascensione retta dello Zenit (dato fornito per ogni punto della Terra in un dato istante dalle cosiddette *Effemeridi*).

Nella navigazione astronomica, si suole utilizzare tali cambiamenti di coordinate per calcolare la posizione stimata dell'imbarcazione, tramite la determinazione dei cerchi d'altezza, cioè dei luoghi della terra dai quali si vede sotto una stessa altezza un astro. Più precisamente, si rileva con il sestante in un dato istante l'altezza  $h_o$  di un astro. Utilizzando le formule precedenti e le Effemeridi, si determina l'altezza calcolata  $h_c$ , ossia l'altezza sotto la quale l'osservatore vedrebbe l'astro se, in quello stesso istante, l'imbarcazione si trovasse nella posizione stimata dal navigatore. Valutando la differenza tra  $h_o$  e  $h_c$ , si traggono informazioni sulle coordinate dell'imbarcazione.

## 2.8 La metrica intrinseca sulla sfera

Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}$ . Si chiama *distanza geodetica* o *distanza intrinseca* tra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ ,  $d_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , la lunghezza dell'arco di cerchio massimo passante per essi non maggiore di  $\pi$  (se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono diametralmente opposti qualunque sia l'arco di cerchio massimo considerato è  $d_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi$ ).

Sfruttando la struttura di spazio vettoriale euclideo di  $\mathbb{R}^{n+1}$  possiamo anche scrivere in generale per  $\mathbf{S}^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$d_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{r^2}$$

dove  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i$ . Naturalmente  $0 \leq d_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\pi$ .

**Teorema 2.8.1** *L'applicazione*

$$d_{\mathbb{S}} : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

è una *distanza*.

**Dimostrazione.** Infatti ovviamente si ha  $d_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{\mathbb{S}}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  e  $d_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  se e solo se  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Resta da dimostrare la disuguaglianza triangolare. Se i vettori  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  non appartengono allo stesso piano essa segue dal Corollario 2.6.8; se invece sono complanari è immediata.  $\square$

Siano  $A_0, A_1, \dots, A_k$  una successione di punti di  $\mathbb{S}$  e  $A_i \widehat{A}_{i+1}$  gli archi di cerchio massimo (minori o uguali di  $\pi$ ) congiungenti i punti  $A_i$  e  $A_{i+1}$ . L'insieme

$$A_0 \widehat{A}_1, A_1 \widehat{A}_2, \dots, A_{k-1} \widehat{A}_k$$

è detto *poligonale sferica* congiungente  $A_0$  con  $A_k$  e si indica con  $A_0 A_1 \dots A_k$ .

La disuguaglianza triangolare valida per  $d_{\mathbb{S}}$  ci permette di concludere che se  $A_0 A_1 \dots A_k$  è una poligonale sferica congiungente  $A_0 = \mathbf{x}$  e  $A_k = \mathbf{y}$ , allora l'arco di cerchio massimo  $A_0 \widehat{A}_k$  è la "poligonale" di lunghezza minima congiungente i punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

Consideriamo ora una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}$  congiungenti i punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ ; quindi  $\gamma(0) = \mathbf{x}$  e  $\gamma(1) = \mathbf{y}$ .

Se  $T = \{t_i : i = 0, \dots, k\}$  una decomposizione di  $[0, 1]$ , la poligonale sferica di vertici  $A_i = \gamma(t_i)$  può dirsi inscritta nella curva  $\gamma$ .

Posto  $\mu(T) = \sup |t_i - t_{i+1}|$ , se come nel caso ordinario definiamo

$$\tilde{\mathcal{L}}(\gamma) = \lim_{\mu(T) \rightarrow 0} \sum_i m(A_i \widehat{A}_{i+1})$$

segue facilmente che

$$d_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{\gamma} \{\tilde{\mathcal{L}}(\gamma) : \gamma(0) = \mathbf{x}, \gamma(1) = \mathbf{y}\}.$$

Ma  $\gamma$  è una curva anche di  $\mathbb{R}^3$  e quindi

$$\mathcal{L}(\gamma) = \lim_{\mu(T) \rightarrow 0} \sum_i m(\overline{A_i A_{i+1}})$$

dove  $m(\overline{A_i A_{i+1}})$  è la misura del segmento  $\overline{A_i A_{i+1}}$ . Ma in piccolo l'arco  $A_i \widehat{A}_{i+1}$  si confonde con il segmento  $\overline{A_i A_{i+1}}$ , da cui la conclusione che  $\mathcal{L}(\gamma) = \tilde{\mathcal{L}}(\gamma)$ .

## 2.9 Eccesso sferico e curvatura

Si chiama *eccesso sferico* di un triangolo sferico  $ABC$  il numero reale

$$\varepsilon = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi.$$

Si vede subito che  $\varepsilon > 0$ , poichè  $\pi < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 3\pi$ , come provato nell'osservazione 2.6.9.

Sia  $A_1A_2\dots A_n$  un poligono sferico, cioè l'intersezione di  $\mathbb{S}$  con un angoloide convesso  $Or_{A_1}r_{A_2}\dots r_{A_n}$  di vertice  $O$  e di spigoli  $r_{A_1}, r_{A_2}, \dots, r_{A_n}$  considerati nell'ordine. Si chiama eccesso sferico del poligono

$$\varepsilon = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \dots + \widehat{A}_n - (n - 2)\pi.$$

Decomponendo il poligono sferico in triangoli sferici ottenuti congiungendo un vertice con gli altri  $n - 3$  vertici non consecutivi mediante archi di cerchio massimo, si prova anche ora che  $\varepsilon > 0$ .

Richiamiamo ora alcune definizioni. Si dice *spicchio sferico* la porzione di spazio limitata dalla sfera e dalle facce di un diedro avente per spigolo un diametro di essa; *fuso sferico* è la parte di superficie sferica appartenente ad uno spicchio sferico.

Si osservi che per una stessa sfera, spicchi e fusi sono proporzionali ai corrispondenti diedri. Quindi, indicati con  $V_\alpha$  e  $S_\alpha$  rispettivamente il volume di uno spicchio e l'area di un fuso corrispondenti al diedro  $\alpha$ , si ha

$$V_\alpha : \frac{4}{3}\pi r^3 = \alpha : 2\pi, \quad S_\alpha : 4\pi r^2 = \alpha : 2\pi.$$

Dunque  $V_\alpha = \frac{2}{3}r^3\alpha$  e  $S_\alpha = 2r^2\alpha$ .

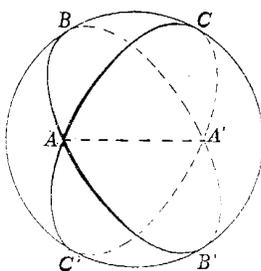
Dato un fuso sferico  $F$ , si dice *fuso sferico completo*, e si indica con  $\overline{F}$ , l'unione di  $F$  con il suo simmetrico rispetto allo spigolo del diedro che individua  $F$ .

Siamo ora in grado di dimostrare il notevole

**Teorema 2.9.1 (Girard (1625))** *L'area di un triangolo sferico uguaglia il prodotto dell'eccesso sferico per il quadrato del raggio della sfera:*

$$A(ABC) = \varepsilon r^2.$$

**Dimostrazione.** Indichiamo con  $F_A, F_B, F_C$  i fusi sferici individuati da diedri i cui spigoli passano rispettivamente per  $A, B$  e  $C$  e le cui misure valgono  $\widehat{A}, \widehat{B}$  e  $\widehat{C}$ .



Ora

$$ABC = F_A \cap F_B \cap F_C$$

anzi

$$F_A \cap F_B = ABC.$$

Indicati con  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  gli antipodali di  $A$ ,  $B$ ,  $C$  si ha

$$\overline{F}_A \cap \overline{F}_B = ABC \cup A'B'C'.$$

D'altronde  $\overline{F}_A$ ,  $\overline{F}_B$ ,  $\overline{F}_C$  ricoprono l'intera sfera sovrapponendosi tre volte sui triangoli  $ABC$ ,  $A'B'C'$ . Quindi passando alle misure

$$m(\overline{F}_A) + m(\overline{F}_B) + m(\overline{F}_C) = m(\mathbb{S}) + 2m(ABC) + 2m(A'B'C').$$

Poiché  $ABC$  e  $A'B'C'$  sono congruenti si ha:

$$4\widehat{A}r^2 + 4\widehat{B}r^2 + 4\widehat{C}r^2 = 4\pi r^2 + 4m(ABC)$$

e dunque

$$\mathcal{A}(ABC) = m(ABC) = [\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi]r^2 = \varepsilon r^2. \quad \square$$

Il teorema si estende facilmente ad un qualsiasi poligono sferico  $A_1A_2\dots A_n$ . Suddividendo il poligono in  $n - 2$  triangoli sferici mediante gli  $n - 3$  archi di cerchio massimo che congiungono un vertice con i vertici non consecutivi e applicando il risultato per i triangoli si ottiene per l'area del poligono sferico l'espressione  $\varepsilon r^2$ .

I risultati precedenti si possono considerare come casi particolari di un teorema più generale del quale diamo solo l'enunciato:

**Theorema elegantissimum (Gauss, 1827)** *Sia  $M$  una superficie e  $T$  un triangolo geodetico di vertici  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Allora*

$$\int_T K(p) d\sigma = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi$$

dove  $K(p)$  è la curvatura gaussiana della superficie in  $p$ .

Se  $K$  è costante su  $M$ , allora  $K(p) = K_0$  per ogni  $p \in M$  e quindi

$$K_0 \int_T d\sigma = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi$$

dunque

$$K_0 \mathcal{A}(T) = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi.$$

Se  $K_0 = 0$  (i.e.  $M$  è una superficie sviluppabile), segue

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$$

cioè su  $M$  vale l'*ipotesi dell'angolo retto*; se  $K_0 > 0$  (i.e.  $M$  è applicabile su una sfera di raggio  $r = \sqrt{1/K_0}$ ) segue

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > \pi$$

cioè su  $M$  vale l'*ipotesi dell'angolo ottuso*; se  $K_0 < 0$  (i.e.  $M$  è applicabile su una pseudosfera) segue

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < \pi$$

cioè su  $M$  vale l'*ipotesi dell'angolo acuto*.

Risulta così che la geometria sopra una superficie a curvatura costante positiva o negativa si può considerare come un'interpretazione concreta della geometria non euclidea che si ottiene in una regione *limitata* di piano adottando l'*ipotesi dell'angolo ottuso* o quella dell'*angolo acuto*.

Il teorema precedente mette anche in evidenza che la curvatura gaussiana dipende solo dalla metrica intrinseca della superficie (Theorema egregium). L'invariante

$$K(p) = \lim_{T \rightarrow p} \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi}{\mathcal{A}(T)}.$$

misura il *difetto di euclidicità* della superficie nell'intorno di  $p$ .

**Osservazione 2.9.2** Gli abitanti della Terra, capaci solo di misurazioni locali, dal fatto che la somma degli angoli di un triangolo sia diversa da due retti, possono dedurre di vivere su una superficie non piana, ma curva. Se essi vedono che la somma è sempre maggiore di due retti, la curvatura sarà positiva e dall'ultima formula, se  $K(p)$  è costante, possono dedurre di vivere su una sfera di raggio  $1/\sqrt{K}$ . Naturalmente, affinché la conclusione sia attendibile, il triangolo deve essere abbastanza grande e non si devono commettere errori di misurazione.

Se  $M$  è una superficie con curvatura costante  $K$ , la formula (2.5) si generalizza in quella di E.F.A. Minding (1840):

$$\cos a\sqrt{K} = \cos b\sqrt{K} \cos c\sqrt{K} + \sin b\sqrt{K} \sin c\sqrt{K} \cos \widehat{A},$$

che per la sfera ( $K = 1/r^2$ ) ridà quella nota. Se la superficie ha curvatura negativa  $K = -1$ , allora  $\sqrt{K} = i$  e usando le funzioni trigonometriche iperboliche

$$\cosh x = \cos ix, \quad \sinh x = \frac{1}{i} \sin ix$$

si ottiene

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \widehat{A}$$

che (con motivazione diversa) è identica ad una formula data da N.I.Lobacevsky nel 1837, per la sua geometria immaginaria. La connessione tra la geometria sferica “reale” e quella sferica “immaginaria” era stata adombrata alla fine del 1700 da J.H. Lambert (1728-1777). Chi provò che Lobacevskij e Minding avevano descritto due versioni della stessa geometria fu Eugenio Beltrami nel 1868 nel celebre *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*.

**Osservazione 2.9.3** Un teorema, molto usato in Geodesia, dovuto a A.M. Legendre (1752-1833) e perfezionato da Gauss, permette di ricondurre la “risoluzione di un triangolo sferico” ad uno rettilineo, quando il triangolo considerato è “piccolo”.

Sia  $ABC$  un triangolo geodetico su una superficie  $\Sigma$ , avente lati di lunghezza  $a, b, c$ . Consideriamo nel piano euclideo un triangolo di vertici  $A', B', C'$ , avente lati di lunghezza ancora  $a, b, c$ . Se indichiamo con  $\widehat{A}$  l'angolo nel vertice  $A$  e con  $\sigma$  l'area del triangolo  $A'B'C'$ , il teorema di Gauss afferma che

$$\widehat{A} = \widehat{A'} + \frac{\sigma}{12} (2K(A) + K(B) + K(C)) + o(a^4 + b^4 + c^4);$$

analogamente per gli altri angoli.

Quindi se  $\Sigma$  è una sfera, allora  $K(A) = K(B) = K(C) = K$  e

$$\widehat{A} = \widehat{A'} + \frac{\sigma}{3} K + o(a^4 + b^4 + c^4),$$

che è il risultato di Legendre (1787).

Naturalmente se approssimiamo il nostro pianeta non ad una sfera, ma ad un ellissoide di rotazione, la correzione dipenderà dai vertici del triangolo.

## 2.10 La formula di Eulero e il teorema di Gauss-Bonnet

Esponiamo ora una dimostrazione molto ingegnosa della formula di Eulero dovuta a Legendre (1794).

**Teorema 2.10.1** *Se  $\mathcal{P}$  è un poliedro convesso, indicati con  $v, s, f$  rispettivamente il numero di vertici, spigoli e facce di  $\mathcal{P}$  vale*

$$v - s + f = 2.$$

**Dimostrazione.** Sia  $\mathcal{P}$  un poliedro convesso e  $\mathbb{S}$  la sfera di raggio 1 e centro in un qualsiasi punto interno del poliedro. Se proiettiamo il poliedro su  $\mathbb{S}$ , allora

ogni faccia di  $\mathcal{P}$  si trasforma in un poligono sferico  $\mathcal{P}_h$  ( $h = 1, \dots, f$ ) per il quale l'area è come sappiamo

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_h) = \sum_{i=1}^{n_h} \alpha_{i_h} - \pi(n_h - 2)$$

dove  $\alpha_{i_h}$  sono gli angoli interni di  $\mathcal{P}_h$  e  $n_h$  è il numero dei lati di  $\mathcal{P}_h$ . Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbb{S}) &= \sum_{h=1}^f \mathcal{A}(\mathcal{P}_h) = \sum_{h=1}^f \left[ \sum_{i=1}^{n_h} \alpha_{i_h} - \pi(n_h - 2) \right] = \\ &= \sum_{h=1}^f \left( \sum_{i=1}^{n_h} \alpha_{i_h} \right) - \pi \sum_{h=1}^f n_h + 2\pi f = 2\pi v - 2\pi s + 2\pi f \end{aligned}$$

da cui la conclusione poiché  $\mathcal{A}(\mathbb{S}) = 4\pi$ . □

Concludiamo dimostrando il teorema di Gauss-Bonnet a partire dal “theorem elegantissimum” di Gauss.

Ricordiamo che una superficie compatta orientabile di genere  $g \geq 0$  è una superficie  $M$  omeomorfa ad una ciambella con  $g$  buchi; così la sfera è di genere 0, mentre il toro è di genere 1.

Considerata su una qualsiasi superficie  $M$  una reticolazione in poligoni geodetici, si chiama *caratteristica di Eulero-Poincarè* il numero

$$\chi(M) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2,$$

dove  $\alpha_0$  è il numero di vertici della reticolazione,  $\alpha_1$  il numero dei lati,  $\alpha_2$  il numero delle facce (poligoni geodetici) della reticolazione.

Se  $M$  è una superficie compatta orientabile di genere  $g$ , si prova che

$$\chi(M) = 2 - 2g,$$

quindi  $\chi(M)$  non dipende dalla reticolazione scelta, ma solo dal genere; esso è un invariante topologico, anzi omotopico. Se  $M$  è una sfera ( $g = 0$ ), in accordo col teorema precedente si ha  $\chi(M) = 2$ .

**Teorema 2.10.2 (di Gauss-Bonnet)** *Se  $M$  è una superficie regolare compatta ed orientabile, allora*

$$\int_M K(p) d\sigma = 2\pi\chi(M),$$

dove  $K(p)$  è la curvatura gaussiana in  $p$ .

**Dimostrazione.** Si consideri una reticolazione di  $M$  in triangoli geodetici,  $T_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ . Allora, per il “theoremata elegantissimum”,

$$\begin{aligned} \int_M K(p) d\sigma &= \sum_{i=1}^n \int_M K(p) d\sigma = \sum_{i=1}^n (\widehat{A}_i + \widehat{B}_i + \widehat{C}_i - \pi) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\widehat{A}_i + \widehat{B}_i + \widehat{C}_i) - n\pi, \end{aligned}$$

essendo  $n = \alpha_2$  il numero delle facce della reticolazione. Ora  $\sum_{i=1}^n (\widehat{A}_i + \widehat{B}_i + \widehat{C}_i) = 2\pi\alpha_0$ . Quindi

$$\int_M K(p) d\sigma = 2\pi\alpha_0 - \alpha_2\pi = 2\pi\alpha_0 - 3\pi\alpha_2 + 2\pi\alpha_2.$$

Ma  $3\alpha_2 = 2\alpha_1$ , poichè ogni triangolo ha 3 lati e ogni lato appartiene a 2 triangoli adiacenti, per cui

$$\int_M K(p) d\sigma = 2\pi\alpha_0 - 2\pi\alpha_1 + 2\pi\alpha_2 = 2\pi\chi(M). \quad \square$$

L'interesse del teorema è ovvio: la quantità a primo membro, costruita mediante elementi geometrici differenziali locali, risulta un invariante topologico. Quindi se deformiamo  $M$ , la curvatura  $K(p)$  nel singolo punto  $p$  può cambiare, ma la *curvatura complessiva* (detta anche curvatura totale) rimane invariata.

Il teorema è valido anche nel caso in cui  $M$  è un poliedro convesso: in tal caso  $K(p) = 0$  in ogni punto diverso dai vertici, dove possiamo pensare concentrata la curvatura.

Se  $p$  è un vertice, indicata con  $K(p)$  la differenza tra  $2\pi$  e la somma degli angoli concorrenti in  $p$ , il teorema di Gauss-Bonnet ha la seguente forma discreta:

$$\sum_{i=1}^m K(p_i) = 2\pi\chi(M)$$

dove  $p_1, \dots, p_m$  sono i vertici del poliedro.

Per esempio, per un cubo

$$K(p_i) = 2\pi - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2} \quad (i = 1, \dots, 8)$$

e

$$\sum_{i=1}^8 K(p_i) = 8 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi = 2\pi\chi(M);$$

per un tetraedro

$$K(p_i) = 2\pi - 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi \quad (i = 1, \dots, 4), \quad \sum_{i=1}^4 K(p_i) = 4\pi.$$

## 2.11 Nota storica

L'invenzione della geometria non-euclidea, nata dal famoso "problema delle parallele", è universalmente riconosciuta come una conquista del XIX secolo, principalmente di C.F.Gauss (1777-1855), J.Bolyai (1802-1860) e N.Lobatchevsky (1793-1856). Ma, come ha messo in luce I. Tòth (1967), già alcune opere di Aristotele contengono accenni alla possibilità di un approccio non euclideo al problema delle parallele. Per Aristotele l'*essenza* delle proposizioni geometriche sta nel loro essere euclidee o non euclidee e questo viene trasmesso alle loro conseguenze, come discute nell'*Ethica ad Eudemum*. Egli dice che "l'essenza del triangolo è la somma dei suoi angoli interni che può essere uguale, maggiore o minore di due retti". Ma per Aristotele sono considerate solo possibilità logiche e non geometriche, lontane quindi dalla realtà.