Introduzione

> *La geografia tocca dunque sia il campo dell'astronomia, sia il campo della geometria e lega insieme in una sola realtà fenomeni terrestri e fenomeni celesti, considerandoli affini e uniti.*
>
> *Tuttavia il lettore che per avventura si imbattesse in questa mia opera non deve essere così ignorante e incolto da non aver mai visto una sfera con dei cerchi attorno, alcuni paralleli, altri perpendicolari rispetto al piano, altri obliqui.*

Così si esprime Strabone (63 a.C.) all'inizio della sua opera *Geografia*.

Già Pitagora aveva insegnato ai suoi discepoli che la Terra fosse un corpo di forma sferica col centro fisso e che essa fosse abitabile anche nell'emisfero opposto in cui si trova la Grecia.

Anche nella *Geografia* di Tolomeo la forma sferica della Terra è accettata come fatto stabilito. Tuttavia tra il 1200 e il 1500 varie opere continuarono a dibattere il problema. Una che ebbe grandissima diffusione fu scritta da John of Holywood, detto Sacrobosco, ed aveva come titolo semplicemente "Sphaera".

Quindi la geometria sulla sfera è premessa indispensabile per lo studio della Geografia. Lo strumento importante è la trigonometria sferica, che, come fa notare il Loria, curiosamente precedette quella piana nella storia della Matematica. Si vuol rispondere in particolare alla seguente questione: vivendo sulla terra come è possibile, con misure locali, stabilire che si è su una sfera?

In questo volumetto il problema centrale che si vuole affrontare è quello della cartografia matematica, cioè quello di rappresentare una porzione della superficie della terra su di un piano in modo tale da ridurre quanto più possibile le "distorsioni" delle distanze. Per ora prendiamo il termine "distorsione" nella sua accezione intuitiva, poi ne daremo la definizione precisa. È chiaro che la carta ideale sarebbe quella in cui la distorsione è nulla, cioè il caso in cui la rappresentazione conservi le distanze (naturalmente in scala).

Fino a quando la terra era considerata piatta, questo problema era risolubile dal punto di vista matematico, rimanendo la difficoltà puramente geografica della descrizione del contorno dei paesi; ma se identifichiamo la terra con una sfera $\mathbb{S}^2$, la distorsione non sarà mai nulla, poiché non si può trovare un'isometria tra una porzione di $\mathbb{S}^2$ (con la sua metrica interna) e una porzione di piano (con l'usuale distanza euclidea). Infatti la sfera non è "applicabile" sul piano, cioè non è una superficie sviluppabile come ad esempio lo sono il cilindro e il cono (che per questo motivo sono usate come superficie ausiliarie in geografia). L'impedimento deriva dal fatto che il piano e la sfera hanno diversa "curvatura", come aveva messo in evidenza C.F.Gauss nei suoi studi di Geodesia (1812-1816), che portarono poi alla geometria differenziale intrinseca, esposta nel suo celebre articolo *Disquisitiones generales circa superficies curvas* pubblicato in latino nel 1827.

Noi in questo fascicolo, dopo aver ricordato le proprietà elementari della circonferenza (Cap. 1) ci riferiremo alla sfera e alla sua geometria (Cap. 2), trascurando tutte le questioni di geodesia che possono trovarsi in testi specializzati (vedi [Be, Bi]). Nel Cap. 3 considereremo la proiezione stereografica, che è la più antica rappresentazione cartografica della terra; nel Cap. 4 tratteremo brevemente delle proiezioni geografiche classiche ponendo il problema della ricerca di quelle che hanno minima distorsione; proveremo che se il dominio della proiezione è un disco (geodetico) allora la minima distorsione è data dalla proiezione azimutale equidistante (la cui inversa in geometria differenziale è chiamata "applicazione esponenziale"). Per questo studio ci è stato di guida l'articolo di J.Milnor *A Problem in Cartography* [Mi] del 1969, nel quale (a priori) non si richiede alcuna differenziabilità alle proiezioni.

Infine in appendice riportiamo alcune nozioni essenziali di geometria differenziale (elementare) sulle superficie.