

## CAPITOLO 2

# Reticoli e Semireticolari

### 2.1. Insiemi Ordinati

DEFINIZIONE 2.1.1. Sia  $X$  un insieme.

Una relazione di **pre-ordine** (o di **quasi ordine**) su  $X$  è una relazione binaria  $\leq \subseteq X \times X$  che sia riflessiva e transitiva.

Un insieme  $X$  munito di una relazione di pre-ordine,  $\leq$ , è detto insieme pre-ordinato, ed è indicato con  $(X, \leq)$ .

Una relazione **d'ordine**  $\leq$  su  $X$  è una relazione di pre-ordine che sia anche antisimmetrica.

$(X, \leq)$  è detto insieme ordinato quando  $\leq$  è una relazione d'ordine.

Se  $(X, \leq)$  è un insieme ordinato, due elementi  $a, b \in X$  si dicono confrontabili se  $a \leq b$  o  $b \leq a$ .

Un insieme ordinato  $(X, \leq)$  in cui due qualsiasi elementi sono confrontabili, si definisce **totalmente ordinato** o **catena** e  $\leq$  è detta relazione **d'ordine totale**.

DEFINIZIONE 2.1.2. Sia  $(X, \leq)$  un insieme ordinato.

Se  $A \subseteq X$ , un elemento  $m \in X$  si dice un **maggiorante** di  $A$  se

$$a \in A \Rightarrow a \leq m.$$

Indichiamo con  $M(A)$  l'insieme dei maggioranti di  $A$ .

DEFINIZIONE 2.1.3. Sia  $(X, \leq)$  un insieme ordinato.

Se  $A \subseteq X$ , un elemento  $m' \in X$  si dice un **minorante** di  $A$  se

$$a \in A \Rightarrow m' \leq a.$$

Indichiamo con  $m(A)$  l'insieme dei minoranti di  $A$ .

DEFINIZIONE 2.1.4. Siano  $(X, \leq)$  un insieme ordinato ed  $A \subseteq X$ .

Un elemento  $a_0 \in A$  si dice **massimo** di  $A$ , in simboli  $a_0 = \max A$ , se

$$a \in A \Rightarrow a \leq a_0.$$

Un elemento  $b_0 \in A$  si dice **minimo** di  $A$ , in simboli  $b_0 = \min A$ , se

$$a \in A \Rightarrow b_0 \leq a.$$

OSSERVAZIONE 2.1.5. Il massimo e il minimo di un insieme, se esistono, sono unici. Infatti, se si suppone che ci siano due massimi  $m, m' \in A$ , allora per definizione di massimo si ha  $m' \leq m$  ed  $m \leq m'$  da cui segue che  $m' = m$ .

La verifica è analoga per l'unicità del minimo.

DEFINIZIONE 2.1.6. Siano  $(X, \leq)$  un insieme ordinato ed  $A \subseteq X$ .

Un elemento  $s \in X$  è detto **estremo superiore** di  $A$  ed è indicato con  $s = \bigvee A$  o  $s = \sup A$ , se:

- (1)  $s \in M(A)$ .
- (2) Se  $b \in A$  e  $a \leq b, \forall a \in A$ , allora  $s \leq b$ .

Un elemento  $t \in X$  è detto **estremo inferiore** di  $A$  ed è denotato con  $t = \bigwedge A$  o  $t = \inf A$ , se:

- (1)  $t \in m(A)$ .
- (2) Se  $b' \in X$  e  $b' \leq a, \forall a \in A$ , allora  $b' \leq t$ .

OSSERVAZIONE 2.1.7. Dalla definizione 2.1.6 segue che

$$\begin{aligned} s = \sup A &\Leftrightarrow s = \min(M(A)) \\ t = \inf A &\Leftrightarrow t = \max(m(A)). \end{aligned}$$

Da tali proprietà e dall'Osservazione 2.1.5 segue che se un insieme ha sup o inf, allora esso è unico.

DEFINIZIONE 2.1.8. Sia  $(X, \leq)$  un insieme ordinato.

$D \subseteq X$  si dice **insieme diretto** se  $\forall F \subseteq D, F$  finito,  $\exists m \in D$  tale che  $m$  è un maggiorante per  $F$ .

$H \subseteq X$  si dice **insieme filtrante** se  $\forall F \subseteq H, F$  finito,  $\exists n \in H$  tale che  $n$  è un minorante per  $H$ .

ESEMPIO 2.1.9. (a) Siano  $X = \mathbb{R}$  con la relazione d'ordine usuale ed  $A = \mathbb{N}$ . Poiché in  $\mathbb{R}$  non esistono maggioranti per  $\mathbb{N}$  allora non esiste l'estremo superiore di  $\mathbb{N}$ .

(b) Sia  $X = \mathbb{R} \setminus \{t\}$  con la relazione d'ordine indotta da quella usuale e sia  $A = (-\infty, t)$ , allora  $M(A) = (t, +\infty)$  non ha minimo. Pertanto, anche se  $M(A) \neq \emptyset$  non esiste  $\sup A$ .

(c) Si considerino due rette  $r$  ed  $s$  verticali, parallele e, successivamente, si prenda  $X = r \cup s$  e si consideri su  $X$  la seguente relazione d'ordine:

$$\forall a, b \in X, a \leq b \Leftrightarrow a \text{ e } b \text{ appartengono alla stessa retta ed } a \text{ sta sotto } b.$$

Pertanto, tale relazione d'ordine non è una relazione d'ordine totale. Se si prende l'insieme formato da due soli punti, uno appartenente ad  $r$  e l'altro appartenente ad  $s$ , sicuramente non esiste il sup di tale insieme, perchè per esso non esistono maggioranti.

(d) Si considerino tre semirette aperte verticali e parallele  $r, s$  e  $t, r$  ed  $s$

illimitate inferiormente,  $t$  illimitata superiormente. Si prenda  $X = r \cup s \cup t$  e si definisca la seguente relazione d'ordine:

$$\forall x, y \in X, \quad x \leq y \Leftrightarrow [x, y \text{ appartengono alla stessa semiretta e } x \text{ sta sotto } y] \text{ oppure} \\ [x \text{ appartiene ad } r \cup s \text{ e } y \text{ appartiene a } t].$$

Sia, poi,  $A = \{a, b\}$ , dove  $a$  e  $b$  appartengono rispettivamente alla semiretta  $r$  e alla semiretta  $s$ , allora l'insieme dei maggioranti di  $A$ ,  $M(A)$ , risulta essere l'insieme dei punti della semiretta  $t$ . Pertanto, non esiste il  $\sup A$  poiché  $M(A)$  non ha minimo, essendo la semiretta  $t$  aperta.

OSSERVAZIONE 2.1.10. Sia  $(X, \leq)$  un insieme ordinato. L'insieme dei maggioranti di  $\emptyset \subseteq X$  è  $M(\emptyset) = X$ ; pertanto segue che  $\sup \emptyset$  esiste se e solo se esiste  $\min X$  e risulta  $\sup \emptyset = \min X$ .

Analogamente,  $m(\emptyset) = X$  e quindi  $\inf \emptyset$  esiste se e solo se esiste  $\max X$  e in particolare,  $\inf \emptyset = \max X$ .

## 2.2. $\vee$ -semireticolari ed $\wedge$ -semireticolari

DEFINIZIONE 2.2.1. Sia  $(X, \leq)$  un insieme ordinato, non vuoto.  $(X, \leq)$  si dice **semireticolari superiore** o  **$\vee$ -semireticolari** se  $\forall F \subseteq X$ ,  $F$  finito, esiste il  $\sup F$ , brevemente denotato anche con  $\vee F$ .

In particolare, poiché l'insieme vuoto è un insieme finito, esiste il  $\sup \emptyset$  e quindi esiste il  $\min X$ , che indicheremo con  $\perp$ .

Inoltre,  $\forall a, b \in X$ , esiste  $\sup \{a, b\}$ . L'esistenza del  $\sup$  tra due elementi si trasferisce facilmente all'esistenza del  $\sup$  di un numero finito di elementi e questo perchè il  $\sup$  è associativo, ossia dati tre elementi  $a, b, c \in X$ , risulta:

$$\sup \{ \sup \{a, b\}, c \} = \sup \{ a, \sup \{b, c\} \}.$$

Da ciò discende la seguente

CARATTERIZZAZIONE 2.2.2. Un insieme ordinato  $(X, \leq)$  è un semireticolari superiore se e solo se

- (1)  $X$  ha minimo.
- (2) Per ogni  $a, b \in X$ , esiste  $\sup \{a, b\}$ .

Dalla Caratterizzazione 2.2.2 si capisce come in un semireticolari superiore si ha la possibilità di definire una legge di composizione interna binaria:

$$\vee : X \times X \rightarrow X$$

ponendo per ogni  $a, b \in X$

$$\vee(a, b) = a \vee b = \sup \{a, b\}$$

detta **unione**.

Inoltre, si vede subito che:

- (a)  $\vee$  è associativa.
- (b)  $\vee$  è commutativa.
- (c) Esiste l'elemento neutro  $\perp$  rispetto a  $\vee$ .
- (e) Ogni elemento è idempotente rispetto a  $\vee$ , cioè  $\forall a \in X$ ,

$$a \vee a = a.$$

Da tali proprietà discende che se  $(X, \leq)$  è un  $\vee$ -semireticolo, allora la terna  $(X, \vee, \perp)$  è un monoide commutativo.

L'implicazione inversa vale solo sotto ulteriori condizioni, come mostra la seguente proprietà.

**PROPOSIZIONE 2.2.3.** *Se  $(X, \vee, \perp)$  è un monoide commutativo in cui ogni elemento è idempotente, allora esiste un'unica relazione d'ordine  $\leq$  su  $X$  tale che  $(X, \leq)$  è un  $\vee$ -semireticolo, avente  $\vee$  per unione.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se per ogni  $a, b \in X$  poniamo

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$$

allora risulta

- dalla proprietà di idempotenza soddisfatta da ogni elemento di  $X$  segue che  $\leq$  è riflessiva.
- $\leq$  è antisimmetrica: infatti se  $a, b \in X$  sono tali che  $a \leq b$  e  $b \leq a$ , allora si ha

$$a \vee b = b \quad \text{e} \quad b \vee a = a$$

e poiché  $\vee$  è commutativa risulta

$$b = a \vee b = b \vee a = a.$$

- $\leq$  è transitiva: infatti, se  $a, b, c \in X$  sono tali che  $a \leq b$  e  $b \leq c$ , allora

$$a \vee b = b \quad \text{e} \quad b \vee c = c$$

pertanto,

$$a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c$$

ovvero  $a \leq c$ .

L'elemento neutro  $\perp$  è un minimo per  $X$  rispetto a tale relazione, infatti  $\forall a \in X$  si ha che

$$\perp \vee a = a \Rightarrow \perp \leq a.$$

Inoltre,  $\forall a, b \in X$  si ha  $\sup \{a, b\} = a \vee b$ ; infatti risulta

$$a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b \Rightarrow a \leq a \vee b$$

e analogamente si ha  $b \leq a \vee b$ , ovvero  $a \vee b$  è un maggiorante per  $\{a, b\}$ .

Se, inoltre,  $k \in X$  è un maggiorante di  $\{a, b\}$ , allora si ha

$$k \vee (a \vee b) = (k \vee a) \vee b = k \vee b = k \Rightarrow (a \vee b) \leq k.$$

Pertanto,  $(X, \leq)$  è un semireticolato superiore.

Se infine  $\leq'$  è un'altra relazione d'ordine su  $X$  che induce l'operazione  $\vee$ , cioè tale che

$$\sup_{\leq'} \{x, y\} = x \vee y, \quad \forall x, y \in X$$

allora  $\forall x, y \in X$  risulta

$$x \leq' y \Leftrightarrow y = \sup_{\leq'} \{x, y\} = x \vee y \Leftrightarrow x \leq y$$

cioè  $\leq' = \leq$ .

□

**DEFINIZIONE 2.2.4.** *Un insieme ordinato  $(X, \leq)$  si dice **semireticolato inferiore** o  $\wedge$ -**semireticolato** se  $\forall F \subseteq X$ ,  $F$  finito, esiste  $\inf F$ , brevemente denotato con  $\wedge F$ .*

In particolare, in un semireticolato inferiore  $(X, \leq)$ , poiché esiste  $\inf \emptyset$  allora esiste  $\max X$  che indicheremo con  $\top$ . Inoltre,  $\forall a, b \in X$  esiste  $\inf \{a, b\}$ .

Così come visto per il sup, anche l'esistenza dell'inf fra due elementi si trasferisce facilmente all'esistenza dell'inf di un numero finito di elementi.

Da ciò discende la seguente

**CARATTERIZZAZIONE 2.2.5.** *Un insieme ordinato  $(X, \leq)$  è un semireticolato inferiore se e solo se*

- (1)  $X$  ha massimo.
- (2) Per ogni  $a, b \in X$ , esiste  $\inf \{a, b\}$ .

Anche in questo caso si ha la possibilità di definire una legge di composizione interna binaria

$$\wedge : X \times X \rightarrow X$$

tale che per ogni  $a, b \in X$  si ha

$$\wedge(a, b) = a \wedge b = \inf \{a, b\}$$

detta **intersezione**.

Anche in questo caso è evidente che:

- (a)  $\wedge$  è associativa.
- (b)  $\wedge$  è commutativa.
- (c) Esiste l'elemento neutro  $\top$  rispetto a  $\wedge$ .
- (e) Ogni elemento è idempotente rispetto a  $\wedge$ , cioè per ogni  $a \in X$ ,

$$a \wedge a = a.$$

Da tali proprietà discende che se  $(X, \leq)$  è un  $\wedge$ -semireticolato, allora la terna  $(X, \wedge, \top)$  è un monoide commutativo.

Vale inoltre la seguente proprietà.

**PROPOSIZIONE 2.2.6.** *Se  $(X, \wedge, \top)$  è un monoide commutativo in cui ogni elemento è idempotente, allora esiste un'unica relazione d'ordine  $\leq$  su  $X$  tale che  $(X, \leq)$  è un  $\wedge$ -semireticolato, avente  $\wedge$  per intersezione.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se per ogni  $a, b \in X$  poniamo

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$$

allora con una dimostrazione analoga a quella della Proposizione 2.2.3 segue la tesi.  $\square$

**OSSERVAZIONE 2.2.7.** 1.  $(X, \leq)$  è un semireticolato inferiore allora  $X$  con la relazione d'ordine duale di  $\leq$ ,  $\geq$ , è un semireticolato superiore  $(X, \geq)$ .

Analogamente, se  $(X, \leq)$  è un semireticolato superiore, allora  $(X, \geq)$  è un semireticolato inferiore. Pertanto, possiamo affermare che ogni semireticolato inferiore individua univocamente un semireticolato superiore e viceversa.

2. Inoltre osserviamo che dal punto di vista algebrico non vi è alcuna distinzione fra semireticolati inferiori e superiori: entrambi infatti sono monoidi commutativi in cui ogni elemento è idempotente. Tuttavia un semireticolato superiore non sempre può essere considerato simultaneamente anche come semireticolato inferiore, poiché la relazione d'ordine indotta dalla legge di composizione secondo la Proposizione 2.2.3 e quella indotta secondo la Proposizione 2.2.6 in generale non coincidono, come vedremo più avanti (Esempio 2.3.3).

### 2.3. Reticoli

**DEFINIZIONE 2.3.1.** *Un insieme ordinato,  $(L, \leq)$ , con  $|L| \geq 2$ , è un **reticolo** se  $\forall F \subseteq L$ ,  $F$  finito, esistono  $\vee F$  ed  $\wedge F$ , in  $L$ .*

Ovviamente, dalla definizione segue che ogni reticolo ha un minimo,  $\perp = \vee \emptyset$ , e un massimo,  $\top = \wedge \emptyset$ , e ovviamente  $\top \neq \perp$ .

In un reticolo  $(X, \leq)$  si definiscono entrambe le leggi di composizione binarie: l'unione,  $\vee$ , e l'intersezione  $\wedge$ , rispetto alle quali gli elementi neutri sono rispettivamente  $\perp$  e  $\top$ . Pertanto, un reticolo dà una struttura algebrica  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$  con le seguenti proprietà

- (a)  $\vee$  e  $\wedge$  sono commutative e associative.
- (b) Esiste l'elemento neutro,  $\perp$  rispetto a  $\vee$  e  $\top$  rispetto a  $\wedge$ .
- (c) Ogni elemento è idempotente per entrambe le leggi di composizione.

Ma si verificano anche ulteriori proprietà, dette **leggi di assorbimento** ovvero  $\forall a, b \in X$  si ha

$$\begin{aligned} (A_1) \quad a \vee (a \wedge b) &= a \\ (A_2) \quad a \wedge (a \vee b) &= a. \end{aligned}$$

Infatti,  $\forall a, b \in X$  risulta:

$$a \wedge b \leq a \Rightarrow a \vee (a \wedge b) = a$$

e

$$a \leq a \vee b \Rightarrow a \wedge (a \vee b) = a.$$

**PROPOSIZIONE 2.3.2.** *Sia  $(X, \vee, \wedge)$  una struttura algebrica.*

*$(X, \vee, \wedge)$  verifica le due leggi di assorbimento se e solo se posto*

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b \quad \forall a, b \in X$$

e

$$a \leq' b \Leftrightarrow a \wedge b = a \quad \forall a, b \in X$$

*risulta che  $\leq$  e  $\leq'$  sono riflessive e*

$$\leq = \leq'.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $(X, \vee, \wedge)$  soddisfi **(AI)** ed **(AII)**.

“ $\subseteq$ ” Siano  $a, b \in X$  tali che  $a \leq b$ ; allora  $a \vee b = b$  e quindi  $a \wedge (a \vee b) = a \wedge b$ . Per la **(AII)** segue che  $a = a \wedge b$  ovvero  $a \leq' b$ .

“ $\supseteq$ ” Siano  $a, b \in X$  tali che  $a \leq' b$ , allora  $a \wedge b = a$  e quindi  $(a \wedge b) \vee b = a \vee b$ . Per la **(AI)** segue che  $b = a \vee b$  ovvero che  $a \leq b$ .

Inoltre dalla **(AI)** ed **(AII)** segue che  $\forall a \in X$ :  $a \vee a = a \vee (a \wedge (a \vee a)) = a$  quindi  $a \leq a$ . Analogamente  $a \leq' a$ .

Viceversa se supponiamo che  $\leq = \leq'$  siano riflessive, allora

$$\begin{aligned} a \wedge (a \wedge b) = a \wedge b &\Rightarrow a \wedge b \leq' a \\ &\Rightarrow a \wedge b \leq a \\ &\Rightarrow a \vee (a \wedge b) = a \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a \vee (a \vee b) = a \vee b &\Rightarrow a \leq a \vee b \\ &\Rightarrow a \leq' a \vee b \\ &\Rightarrow a \wedge (a \vee b) = a. \end{aligned}$$

□

Da 2.3.2 segue che in una struttura algebrica  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$  in cui valgono (a), (b), (c), **(AI)** ed **(AII)** si può definire una relazione d'ordine usando equivalentemente  $\vee$  e  $\wedge$ , come indicato dalle proposizioni 2.2.3 e 2.2.6, rispettivamente.

In particolare, se  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$  è una struttura algebrica che soddisfa le proprietà (a), (b), (c), **(AI)** ed **(AII)**, allora segue che la coppia  $(X, \leq)$ , con  $\leq$  definita come in 2.2.3, o equivalentemente come in 2.2.6, è un reticolo.

**ESEMPIO 2.3.3.** Sia  $X = \text{ALFABETO}$  e definiamo su  $X$  le seguenti leggi di composizione interne binarie commutative, indicate con  $\vee$  e  $\wedge$ :

- $\vee$ : (lettera)  $\vee$  (stessa lettera) = (stessa lettera)  
 (vocale)  $\vee$  (altra vocale) = II vocale in ordine alfabetico  
 (vocale)  $\vee$  (consonante) = consonante  
 (consonante)  $\vee$  (altra consonante) =  $z$ .  
 $\wedge$ : (lettera)  $\wedge$  (stessa lettera) = stessa lettera  
 (vocale)  $\wedge$  (altra vocale) =  $a$   
 (vocale)  $\wedge$  (consonante) = vocale  
 (consonante)  $\wedge$  (altra consonante) = I consonante in ordine alfabetico.

L'elemento neutro rispetto a  $\vee$  è la vocale  $a$ , mentre l'elemento neutro rispetto a  $\wedge$  è la consonante  $z$ .

Si tratta di due leggi di composizione che danno entrambe una struttura di semireticolato su  $X$ . Però, si vede subito che non valgono le leggi di assorbimento, infatti, ad esempio:

$$e \wedge (e \vee i) = a \quad e \vee (c \wedge b) = z.$$

In effetti, coerentemente con la Proposizione 2.3.2, le due relazioni d'ordine  $\leq$  e  $\leq'$ , definite in 2.2.3 e 2.2.6 sono diverse, infatti

$$e \leq i \text{ (poiché } e \vee i = i\text{)}, \text{ ma } e \not\leq' i \text{ (poiché } e \wedge i = a\text{)}$$

mentre

$$r \not\leq s \text{ (poiché } r \vee s = z\text{)}, \text{ ma } r \leq' s \text{ (poiché } r \wedge s = r\text{)}.$$

**ESEMPIO 2.3.4.** (a) Un insieme costituito da due soli elementi  $\{\perp, \top\}$  con la relazione d'ordine  $\perp \leq \top$  è un reticolato, detto reticolato banale, che si indica anche con  $\mathcal{2} = (\{\perp, \top\}, \leq)$ .

(b) Un insieme totalmente ordinato  $(X, \leq)$  è un reticolato se e solo se ha massimo  $\top$  e minimo  $\perp$ . Infatti,  $\forall x, y \in X$  se  $x \leq y$  allora  $\exists x \wedge y = x$  ed  $\exists x \vee y = y$ ; inoltre,  $\exists \vee \emptyset = \perp \in X$  ed  $\exists \wedge \emptyset = \top \in X \Leftrightarrow X$  ha massimo  $\top$  e minimo  $\perp$ . In particolare, l'insieme totalmente ordinato  $([0, 1], \leq)$  è un reticolato, mentre, evidentemente,  $((0, 1), \leq)$  non lo è.

(c) Se  $X \neq \emptyset$  è un insieme, l'insieme ordinato  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  è un reticolato.

Infatti,  $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ,  $\mathcal{A}$  finito si ha

$$\vee \mathcal{A} = \cup \mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$$

ed

$$\wedge \mathcal{A} = \cap \mathcal{A} \in \mathcal{P}(X).$$

**DEFINIZIONE 2.3.5.** Sia  $L$  un  $\vee$ -semireticolato ( $\wedge$ -semireticolato, rispettivamente) e sia  $X \subseteq L$ .

$X$  si dice **sottosemireticolato superiore** oppure  $\vee$ -**sottosemireticolato** (**sottosemireticolato inferiore** o  $\wedge$ -**sottosemireticolato**, rispettivamente) se  $\forall F \subseteq X$ ,  $F$  finito, l'estremo superiore (l'estremo inferiore, rispettivamente) di  $F$  in  $L$  appartiene ad  $X$ .

Ovviamente tale definizione si applica anche al caso in cui  $L$  è un reticolo.

**DEFINIZIONE 2.3.6.** *Sia  $L$  un reticolo e sia  $X \subseteq L$ .*

*$X$  si dice **sottoreticolo** di  $L$  se  $\forall F \subseteq X$ ,  $F$  finito, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di  $F$  in  $L$  appartengono ad  $X$ .*

**OSSERVAZIONE 2.3.7.** Evidentemente, ogni sottosemireticolo superiore deve contenere  $\perp$  ed ogni sottosemireticolo inferiore deve contenere  $\top$ .

Un  $\vee$ -sottosemireticolo ( $\wedge$ -sottosemireticolo o sottoreticolo, rispettivamente)  $X$  di un reticolo  $L$  è esso stesso un  $\vee$ -semireticolo ( $\wedge$ -semireticolo o reticolo, rispettivamente) con la relazione d'ordine, quindi con l'unione e l'intersezione indotte in esso da quelle di  $L$ .

**ESEMPIO 2.3.8.** Se  $L$  è un reticolo, l'insieme  $\{\perp, \top\}$  con la relazione d'ordine indotta da quella su  $L$  è un sottoreticolo.

Un sottoinsieme di un reticolo  $L$  con la relazione indotta da  $L$  può essere esso stesso un reticolo senza essere un sottoreticolo di  $L$ .

**ESEMPIO 2.3.9.** (a) Se  $L$  è un reticolo ed  $a, b \in L$  con  $a \leq b$  ed  $a \neq b$ , allora denotiamo con

$$[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}.$$

$[a, b]$  pur essendo con la relazione indotta da  $L$  un reticolo, ovviamente non è un  $\vee$ -sottosemireticolo se  $a \neq \perp$  e non è un  $\wedge$ -sottosemireticolo se  $b \neq \top$ . È un sottoreticolo sse  $a = \perp$  e  $b = \top$ , cioè sse  $[a, b] = L$ .

(b) Sia  $G$  un gruppo. Poniamo  $\mathcal{S} = \{H \mid H \leq G\}$ ;  $\mathcal{S}$  con la relazione d'ordine di inclusione fra insiemi è un reticolo  $(\mathcal{S}, \subseteq)$ , in cui  $\forall H, K \in \mathcal{S}$

$$H \wedge K = H \cap K \text{ e } H \vee K = \langle H \cup K \rangle$$

dove  $\langle H \cup K \rangle$  è il più piccolo sottogruppo in  $\mathcal{S}$  contenente  $H$  e  $K$ . Quindi  $(\mathcal{S}, \subseteq)$  è un reticolo ma non è un sottoreticolo di  $(\mathcal{P}(G), \subseteq)$ .

Indichiamo con **POSet** la categoria concreta i cui oggetti sono gli insiemi ordinati ed i cui morfismi sono le funzioni isotone.

**$\vee$ -SLat** ( **$\wedge$ -SLat**, rispettivamente) è la categoria concreta che ha come oggetti i semireticoli superiori (semireticoli inferiori, rispettivamente). I morfismi da un oggetto  $(X, \leq)$  in un oggetto  $(Y, \leq)$  sono le funzioni

$$f : X \rightarrow Y$$

che conservano  $\vee$  ( $\wedge$ , rispettivamente) cioè tali che  $\forall F \subseteq X$ ,  $F$  finito si ha

$$f(\vee F) = \vee f^{-1}(F) \quad (f(\wedge F) = \wedge f^{-1}(F), \text{ rispettivamente}).$$

Tali morfismi si caratterizzano evidentemente anche come omomorfismi di monoidi.

**Lat** è la categoria concreta avente per oggetti i reticoli e per morfismi tra due reticoli  $(X, \leq)$  ed  $(Y, \leq)$ , nell'ordine, le funzioni

$$f : X \rightarrow Y$$

che conservano  $\vee$  e  $\wedge$ , cioè tali che

$$F \subseteq X, F \text{ finito} \Rightarrow f(\vee F) = \vee f^{-1}(F) \text{ e } f(\wedge F) = \wedge f^{-1}(F).$$

OSSERVAZIONE 2.3.10. Un isomorfismo fra due reticoli, cioè un isomorfismo di **Lat**, è un morfismo di reticoli bigettivo la cui funzione inversa è ancora un morfismo di reticoli.

LEMMA 2.3.11. Siano  $X, Y \in |\vee\text{-SLat}|$  ( $X, Y \in |\wedge\text{-SLat}|$ , rispettivamente) e sia  $f \in \vee\text{-SLat}(X, Y)$  ( $f \in \wedge\text{-SLat}(X, Y)$ , rispettivamente). Si ha allora

- (1)  $f$  è isotona.
- (2)  $f$  iniettiva  $\Rightarrow f$  riflette l'ordine.
- (3)  $f$  bigettiva e  $X \in |\mathbf{Lat}| \Rightarrow f$  isomorfismo di **Lat**.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo solo il caso della categoria  $\vee\text{-SLat}$ .

- (1)  $x \leq x'$  in  $X \Rightarrow f(x) \vee f(x') = f(x \vee x') = f(x') \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ .
- (2) Da  $f(x) \leq f(x')$  segue  $f(x \vee x') = f(x) \vee f(x') = f(x')$  da cui  $x \vee x' = x'$  cioè  $x \leq x'$ .
- (3)  $f$  conserva  $\wedge$  infatti  $\forall y \in Y$  da  $f^{-1}(y) \leq \top$  segue  $y \leq f(\top)$  quindi  $f(\top) = \top$ .

Siano, poi,  $x, x' \in X$ . Allora  $f(x \wedge x')$  è un minorante di  $\{f(x), f(x')\}$  e per ogni altro minorante  $a \leq f(x)$ ,  $a \leq f(x')$  si ha  $f^{-1}(a) \leq x$ ,  $f^{-1}(a) \leq x'$  da cui  $f^{-1}(a) \leq x \wedge x'$  e quindi  $a \leq f(x \wedge x')$ . Dunque  $f(x \wedge x') = f(x) \wedge f(x')$ . Dalla suriettività di  $f$  segue evidentemente che  $Y$  è chiuso per  $\wedge$  quindi è un reticolo. Per concludere la dimostrazione basta verificare che la funzione inversa conserva  $\vee$ . Infatti da  $f(\perp) = \perp$  segue  $\perp = f^{-1}(\perp)$  e considerati  $y, y' \in Y$ , con  $y = f(x)$  e  $y' = f(x')$  si ha  $f^{-1}(y \vee y') = f^{-1}(f(x) \vee f(x')) = f^{-1}(f(x \vee x')) = x \vee x' = f^{-1}(y) \vee f^{-1}(y')$ .  $\square$

E' evidente, tenendo anche conto del Lemma 2.3.11 (1), che per le categorie su definite si hanno le seguenti inclusioni

$$\mathbf{Lat} \subseteq \vee\text{-SLat} \subseteq \mathbf{POSet}$$

$$\mathbf{Lat} \subseteq \wedge\text{-SLat} \subseteq \mathbf{POSet}.$$

Nessuna delle suddette inclusioni però è piena, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 2.3.12. Dato un qualsiasi reticolo  $X$  e considerata la funzione costante  $k : X \rightarrow X$  che ad ogni  $x \in X$  associa un fissato  $k \in X$ , è evidente che:

- $k$  è isotona,  $\forall k \in X$ .

- $k$  conserva  $\vee$  sse  $k = \perp$ .
- $k$  conserva  $\wedge$  sse  $k = \top$ .

Indicato con  $Is(\mathbf{C}(A, B))$  l'insieme degli isomorfismi tra gli oggetti  $A$  e  $B$  di una generica categoria  $\mathbf{C}$ , si ha il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 2.3.13.  $\forall X, Y \in |\mathbf{Lat}|$  si ha

$$Is(\vee\text{-SLat}(X, Y)) = Is(\mathbf{Lat}(X, Y)) = Is(\wedge\text{-SLat}(X, Y)).$$

DIMOSTRAZIONE. E' conseguenza del Lemma 2.3.11.  $\square$

Osserviamo che una bigezione isotona non è necessariamente un isomorfismo in  $\mathbf{POSet}$ . Si pensi ad esempio al morfismo identico

$$i_X : (X, \leq) \rightarrow (X, \leq'), \text{ con } \leq \subseteq \leq', \text{ ma } \leq \neq \leq'.$$

DEFINIZIONE 2.3.14. Una involuzione che inverte l'ordine in un reticolo  $(X, \leq)$  è una funzione

$$\kappa : X \rightarrow X$$

tale che

$$\kappa^2 = i_X \text{ e } \forall x, y \in X : x \leq y \Rightarrow \kappa(y) \leq \kappa(x).$$

PROPOSIZIONE 2.3.15. Una involuzione che inverte l'ordine in un reticolo  $(X, \leq)$  è un isomorfismo fra  $(X, \leq)$  ed il suo opposto (nel senso delle categorie ordinate)  $(X, \geq)$ .

DIMOSTRAZIONE. Intanto  $\kappa$  è bigettiva, anzi da  $\kappa^2 = i_X$  segue che  $\kappa$  è autoinversa. Peraltro è chiaro che  $\kappa : (X, \leq) \rightarrow (X, \geq)$ , è un morfismo di reticoli sse  $\kappa : (X, \geq) \rightarrow (X, \leq)$  lo è.

Infatti, tenuto conto che i sup e gli inf in  $(X, \geq)$  coincidono, rispettivamente, con gli inf e i sup in  $(X, \leq)$ , si tratta in entrambi i casi di provare che  $\forall x, y \in X$

$$\kappa(x \vee y) = \kappa(x) \wedge \kappa(y)$$

o equivalentemente

$$\kappa(x \wedge y) = \kappa(x) \vee \kappa(y),$$

ed inoltre che

$$\kappa(\perp) = \top \text{ o equivalentemente, } \kappa(\top) = \perp.$$

Verifichiamo quindi che  $\kappa(x \vee y)$  è l'estremo inferiore di  $\{\kappa(x), \kappa(y)\}$ .

Da  $x \leq x \vee y$ , e  $y \leq x \vee y$ , segue che  $\kappa(x \vee y) \leq \kappa(x)$  e  $\kappa(x \vee y) \leq \kappa(y)$ .

Per ogni altro minorante  $a \leq \kappa(x)$ ,  $a \leq \kappa(y)$  si ha  $x \leq \kappa(a)$  e  $y \leq \kappa(a)$ , quindi  $x \vee y \leq \kappa(a)$  da cui  $a \leq \kappa(x \vee y)$ .

Analogamente si può verificare che  $\kappa(x \wedge y)$  è l'estremo superiore di  $\{\kappa(x), \kappa(y)\}$  il che, peraltro, è equivalente a quanto già provato.

Infine notiamo che da  $\perp \leq x$ ,  $\forall x \in X$ , segue  $y \leq \kappa(\perp)$ ,  $\forall y \in X$ , quindi  $\kappa(\perp) = \top$  e  $\kappa(\top) = \perp$ .  $\square$

Le relazioni che esprimono esplicitamente l'enunciato precedente, verificate nel corso della dimostrazione, sono le note **Leggi di De Morgan**, che riformuliamo nuovamente e che valgono, ribadiamo, in un qualsiasi reticolo e rispetto ad una qualsiasi involuzione che inverte l'ordine

$$\kappa(x \vee y) = \kappa(x) \wedge \kappa(y) \quad \text{e} \quad \kappa(x \wedge y) = \kappa(x) \vee \kappa(y).$$

Tali relazioni verranno estese al caso di unioni e intersezioni arbitrarie (si veda la Proposizione 3.1.6).

Inoltre, notiamo esplicitamente che per ogni involuzione  $\kappa$  che inverte l'ordine in un reticolo  $(X, \leq)$  si ha  $\kappa(\perp) = \top$  e  $\kappa(\top) = \perp$ .

## 2.4. Reticoli Distributivi ed Algebre di Boole

**PROPOSIZIONE 2.4.1.** *Se  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$  è un reticolo allora valgono le seguenti disuguaglianze distributive:*

- (1)  $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y), \quad \forall x, y, a \in X.$
- (2)  $a \vee (x \wedge y) \leq (a \vee x) \wedge (a \vee y), \quad \forall x, y, a \in X.$

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $a, x, y \in X$ .

(1) Poiché  $x \leq x \vee y$  allora  $a \wedge x \leq a \wedge (x \vee y)$ . Analogamente risulta  $a \wedge y \leq a \wedge (x \vee y)$ . Pertanto  $a \wedge (x \vee y)$  è un maggiorante per  $a \wedge x$  ed  $a \wedge y$  e da ciò segue che  $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$ .

(2) Poiché  $x \wedge y \leq x$  e  $x \wedge y \leq y$  allora  $a \vee (x \wedge y) \leq a \vee x$  e  $a \vee (x \wedge y) \leq a \vee y$ ; quindi  $a \vee (x \wedge y)$  è un minorante per  $a \vee x$  ed  $a \vee y$  e perciò risulta  $a \vee (x \wedge y) \leq (a \vee x) \wedge (a \vee y)$ .  $\square$

**DEFINIZIONE 2.4.2.** *Un reticolo  $(X, \leq)$  si dice **distributivo** se verifica le seguenti uguaglianze distributive:*

- (DI)**  $a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y), \quad \forall x, y, a \in X.$
- (DII)**  $a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y), \quad \forall x, y, a \in X.$

**TEOREMA 2.4.3.** *In ogni reticolo  $(X, \leq)$  le uguaglianze distributive **(DI)** e **(DII)** sono equivalenti.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $a, x, y \in X$ .

“(DI)  $\Rightarrow$  (DII)”

$$\begin{aligned} (a \vee x) \wedge (a \vee y) &= [(a \vee x) \wedge a] \vee [(a \vee x) \wedge y] \\ &= a \vee [(a \wedge y) \vee (x \wedge y)] \\ &= [a \vee (a \wedge y)] \vee (x \wedge y) \\ &= a \vee (x \wedge y). \end{aligned}$$

“(DII)  $\Rightarrow$  (DI)” Si dimostra analogamente.  $\square$

Si noti che la dimostrazione del Teorema 2.4.3 utilizza le due leggi di assorbimento.

PROPOSIZIONE 2.4.4. *Se  $(X, \leq)$  è un reticolo che soddisfa (DI) o (DII), allora le leggi di assorbimento sono equivalenti, ovvero  $\forall a, b \in X$  si ha*

$$a \wedge (a \vee b) = a \Leftrightarrow a \vee (a \wedge b) = a.$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $(X, \leq)$  è un reticolo che soddisfa (DI), allora  $\forall a, b \in X$  si ha

$$a \wedge (a \vee b) = (a \wedge a) \vee (a \wedge b) = a \vee (a \wedge b)$$

da cui segue la tesi.

La verifica è analoga se  $(X, \leq)$  soddisfa (DII).  $\square$

OSSERVAZIONE 2.4.5. 1. Un sottoreticolo di un reticolo distributivo è ancora distributivo.

2. Alternativamente alla definizione 2.4.2 si può definire reticolo distributivo un reticolo che soddisfa una fra le due leggi di assorbimento ed una fra le proprietà distributive. Questo segue da 2.4.3 e 2.4.4.

ESEMPIO 2.4.6. (a) L'insieme delle parti di un insieme non vuoto  $X$ , con la relazione di inclusione,  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  è un reticolo distributivo.

(b) L'intervallo unitario  $[0, 1]$  con la relazione d'ordine  $\leq$  indotta dalla relazione d'ordine naturale su  $\mathbb{R}$  è un reticolo distributivo  $([0, 1], \leq)$ .

(c) Se  $V$  è uno spazio vettoriale ed  $\mathcal{S}(V)$  è l'insieme dei sottospazi vettoriali di  $V$ , allora  $\mathcal{S}(V)$  con la relazione d'ordine d'inclusione  $\subseteq$  è un reticolo, in cui il sottospazio nullo  $O$  è il minimo, l'intero spazio vettoriale  $V$  è il massimo e comunque presi  $X, Y$  sottospazi di  $V$  si ha

$$X \wedge Y = X \cap Y \quad e \quad X \vee Y = X + Y.$$

Le uguaglianze distributive non valgono per  $\dim V \geq 2$ .

Verifichiamo, ad esempio, cosa succede per  $n = 3$ , considerando lo spazio dei vettori geometrici.

Siano  $X, Y, Z$  tre rette di un piano  $\pi$  passanti per l'origine e a due a due distinte. Allora risulta:

$$X \wedge (Y \vee Z) = X \cap (Y + Z) = X \cap \pi = X$$

mentre

$$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) = (X \cap Y) + (X \cap Z) = O + O = O$$

quindi il reticolo non è distributivo.

Analogamente si dimostra che il reticolo dei sottogruppi di un dato gruppo non è necessariamente distributivo.

OSSERVAZIONE 2.4.7. Ogni insieme totalmente ordinato  $(X, \leq)$  avente massimo e minimo è un reticolo distributivo. Infatti, per ogni  $x, y, z \in X$  si ha

$$x \wedge (y \vee z) = \left\{ \begin{array}{ll} y \vee z & \text{se } y \leq x \text{ e } z \leq x \\ x & \text{se } x \leq y \text{ o } x \leq z \end{array} \right\} = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Vedremo, anzi, più avanti (Proposizione 3.4.7) che un tale reticolo verifica una ben più forte condizione di distributività.

Indichiamo con **DLat** la sottocategoria piena di **Lat** avente per oggetti i reticoli distributivi.

PROPOSIZIONE 2.4.8. *Sia  $X$  un reticolo distributivo. Fissati  $h, k, a \in X$  se il sistema*

$$\left\{ \begin{array}{l} x \wedge a = h \\ x \vee a = k \end{array} \right.$$

*ammette soluzione, essa è unica.*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $x, y \in X$ , soluzioni del sistema, allora per la distributività del reticolo si ha

$$\begin{aligned} y &= y \vee (y \wedge a) \\ &= y \vee (x \wedge a) \\ &= (y \vee x) \wedge (y \vee a) \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee a) \\ &= x \vee (y \wedge a) \\ &= x \vee (x \wedge a) \\ &= x \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE 2.4.9. *Un reticolo distributivo  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$  in cui esiste una funzione*

$$\neg : X \rightarrow X$$

*che ad ogni elemento  $a \in X$  associa  $\neg a$  tale che*

$$\left\{ \begin{array}{l} \neg a \wedge a = \perp \\ \neg a \vee a = \top \end{array} \right.$$

*si dice **algebra di Boole** e si indica con  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \neg)$ .*

*La funzione  $\neg$  si chiama **complementazione** e l'immagine tramite  $\neg$  di un elemento  $a \in X$ ,  $\neg a$ , si chiama il **complementare** di  $a$ .*

Dalla Proposizione 2.4.8 segue che in un'algebra di Boole vi è una sola possibile complementazione, la quale è univocamente determinata dalla relazione d'ordine, tramite le operazioni  $\vee$  e  $\wedge$ . Pertanto un'algebra di Boole può anche essere indicata con una notazione del tipo  $(X, \leq)$ .

PROPOSIZIONE 2.4.10. *Se  $f \in \mathbf{DLat}(X, Y)$  e  $X$  ed  $Y$  sono algebre di Boole allora  $\forall a \in X$  si ha*

$$\neg(f(a)) = f(\neg a)$$

ovvero  $f$  commuta con la complementazione del reticolo.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $a \in X$ . Per ottenere la tesi occorre provare che

$$\begin{cases} f(\neg a) \wedge f(a) = \perp \\ f(\neg a) \vee f(a) = \top \end{cases}$$

infatti:

- $f(\neg a) \wedge f(a) = f(\neg a \wedge a) = f(\perp) = \perp$
- $f(\neg a) \vee f(a) = f(\neg a \vee a) = f(\top) = \top$ .

□

Questa proposizione giustifica la seguente affermazione.

La sottocategoria piena di  $\mathbf{DLat}$  avente per oggetti le algebre di Boole la indichiamo con  $\mathbf{Bool}$ .

Ricordando la Proposizione 2.3.13 notiamo che se  $X$  e  $Y$  sono algebre di Boole ed  $f : X \rightarrow Y$  è una bigezione, allora

$$f \text{ conserva } \vee \Leftrightarrow f \text{ è isomorfismo in } \mathbf{Bool} \Leftrightarrow f \text{ conserva } \wedge.$$

PROPOSIZIONE 2.4.11. *Se  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \neg)$  è un'algebra di Boole, allora*

- (1)  $\neg$  è un'involuzione.
- (2)  $\neg$  inverte l'ordine.
- (3)  $\neg$  verifica le leggi di De Morgan.

DIMOSTRAZIONE. (1) Dire che  $\neg$  è un'involuzione significa che  $\forall a \in X$  risulta

$$\neg\neg a = a,$$

infatti si ha che

$$a \wedge \neg a = \perp, \quad a \vee \neg a = \top \Rightarrow \neg\neg a = a.$$

(2) Siano,  $a, b \in X$ ,  $a \leq b$ . Allora  $\neg b \wedge \neg a = \neg b$ , infatti

$$(\neg b \wedge \neg a) \wedge b = (\neg b \wedge b) \wedge \neg a = \perp \wedge \neg a = \perp$$

e

$$\top = \top \wedge \top = \top \wedge (\neg a \vee a) \leq (\neg b \vee b) \wedge (\neg a \vee b) = (\neg b \wedge \neg a) \vee b,$$

da cui si ottiene  $\neg b \leq \neg a$ .

(3) Segue da (2) e dalla Proposizione 2.3.15. □

Un'involuzione che inverte l'ordine in un reticolo distributivo non è necessariamente una complementazione, come mostra l'esempio seguente.

ESEMPIO 2.4.12. Sia  $([0, 1], \leq)$  il reticolo distributivo dell'Esempio 2.4.6 (b). L'applicazione

$$\kappa : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

che ad ogni  $x \in [0, 1]$  associa

$$\kappa(x) = 1 - x$$

è un'involuzione che inverte l'ordine ma non è una complementazione. In effetti  $([0, 1], \leq)$  non è un'algebra di Boole.

ESEMPIO 2.4.13. Il reticolo delle parti di un insieme non vuoto  $X$ ,  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  dell'Esempio 2.4.6 (a) è un'algebra di Boole, in cui la complementazione è data  $\forall A \in \mathcal{P}(X)$  da  $\neg A = X \setminus A$ , ovvero  $\neg A$  è il complementare insiemistico di  $A$ .

## 2.5. Algebre di Heyting

DEFINIZIONE 2.5.1. Un reticolo  $(X, \leq)$  si dice un'algebra di Heyting se per ogni  $a, b \in X$  esiste

$$\max \{x \in X \mid x \wedge a \leq b\}.$$

OSSERVAZIONE 2.5.2. L'insieme  $\{x \in X \mid x \wedge a \leq b\}$  non è vuoto, infatti  $\perp \in \{x \in X \mid x \wedge a \leq b\}$ . Ovviamente,  $\perp$  è il minimo dell'insieme, il quale, in genere, non è affatto detto che abbia massimo.

Dalla definizione si evince che nelle algebre di Heyting si può considerare una nuova legge di composizione binaria

$$\rightarrow : X \times X \rightarrow X, (a, b) \mapsto a \rightarrow b = \max \{x \in X \mid x \wedge a \leq b\}$$

detta **implicazione**.

Per tale motivo indicheremo in generale un'algebra di Heyting con la notazione  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow)$ .

Considereremo ora alcune proprietà di tipo algebrico che, come poi vedremo, caratterizzano l'operazione " $\rightarrow$ ".

PROPOSIZIONE 2.5.3. Se  $(X, \leq)$  è un reticolo,  $\forall a, b, \gamma \in X$  si ha l'equivalenza

$$\gamma = \max \{x \in X \mid x \wedge a \leq b\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\gamma \text{ verifica la condizione, } \forall x \in X : x \leq \gamma \Leftrightarrow x \wedge a \leq b.$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo, per praticità,

$$A = \{x \in X \mid x \wedge a \leq b\}.$$

“ $\Downarrow$ ” Poiché per ipotesi  $\gamma = \max A$ , se  $x \in X$  allora

$$x \leq \gamma \Rightarrow x \wedge a \leq \gamma \wedge a \leq b$$

e viceversa

$$x \wedge a \leq b \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \leq \gamma.$$

“ $\Uparrow$ ” Verifichiamo che  $\gamma = \max A$ .

$$\gamma \leq \gamma \Rightarrow \gamma \wedge a \leq b \Rightarrow \gamma \in A.$$

$$x \in A \Rightarrow x \wedge a \leq b \Rightarrow x \leq \gamma.$$

□

OSSERVAZIONE 2.5.4. In generale si preferisce dare la definizione di algebra di Heyting usando la condizione assunta nella Proposizione 2.5.3.

Infatti usando la notazione su introdotta per l'operazione di implicazione si ha una nuova formulazione della Definizione 2.5.1.

Con tale notazione si dice che

$(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow)$  è un'algebra di Heyting se  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$  è un reticolo e l'operazione binaria “ $\rightarrow$ ” verifica la condizione

$$x \leq a \rightarrow b \Leftrightarrow x \wedge a \leq b, \forall x, a, b \in X.$$

C'è da notare che l'operazione di implicazione in un'algebra di Heyting è univocamente determinata dalla relazione d'ordine, in virtù della Proposizione 2.5.3. Pertanto un'algebra di Heyting può anche essere indicata con la semplice notazione  $(X, \leq)$ , almeno fin quando non si considerano morfismi fra tali strutture.

Verifichiamo, ora, quattro proprietà che, come vedremo dopo, sono necessarie e sufficienti per caratterizzare l'operazione “ $\rightarrow$ ” di un'algebra di Heyting.

PROPOSIZIONE 2.5.5. Se  $(X, \leq)$  (equivalentemente  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow)$ ) è un'algebra di Heyting allora l'implicazione “ $\rightarrow$ ” verifica le seguenti proprietà:

- (1)  $a \rightarrow a = \top$ .
- (2)  $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$ .
- (3)  $b \wedge (a \rightarrow b) = b$ .
- (4)  $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$ .

DIMOSTRAZIONE. (1)  $a \rightarrow a = \max\{x \in X \mid x \wedge a \leq a\} = \max X = \top$ .

(2) “ $\leq$ ” Ovviamente  $a \wedge (a \rightarrow b) \leq a$ . Inoltre,

$$a \wedge (a \rightarrow b) \leq a \rightarrow b \Rightarrow (a \wedge (a \rightarrow b)) \wedge a \leq b \Rightarrow a \wedge (a \rightarrow b) \leq b.$$

“ $\geq$ ” Ovviamente  $a \wedge b \leq a$ . Inoltre,

$$(a \wedge b) \wedge a = a \wedge b \leq b \Rightarrow a \wedge b \leq a \rightarrow b.$$

(3) Da  $b \wedge a \leq b$  segue che  $b \leq a \rightarrow b$ . Quindi  $b \wedge (a \rightarrow b) = b$ .

(4) Proviamo che  $a \rightarrow (b \wedge c)$  è l'inf di  $(a \rightarrow b)$  e di  $(a \rightarrow c)$ .

$a \rightarrow (b \wedge c)$  è un minorante di  $\{a \rightarrow b, a \rightarrow c\}$ .

Infatti dalla proprietà (2) e dalla Proposizione 2.5.3 segue che

$$a \wedge (a \rightarrow (b \wedge c)) = a \wedge (b \wedge c) \leq b \Rightarrow a \rightarrow (b \wedge c) \leq (a \rightarrow b).$$

Analogamente

$$a \rightarrow (b \wedge c) \leq (a \rightarrow c).$$

Se, infine,  $y \in X$  è un minorante di  $a \rightarrow b$  e  $a \rightarrow c$  allora

$$\begin{aligned} y \leq a \rightarrow b \text{ e } y \leq a \rightarrow c &\Rightarrow y \wedge a \leq b \text{ e } y \wedge a \leq c \\ &\Rightarrow y \wedge a \leq b \wedge c \\ &\Rightarrow y \leq a \rightarrow (b \wedge c). \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 2.5.6. *Se  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$  è un reticolo con un'operazione*

$$\rightarrow: X \times X \rightarrow X$$

*che verifica le proprietà (1), (2), (3), (4) di 2.5.5 allora valgono*

$$(1) \ b \leq b' \Rightarrow a \rightarrow b \leq a \rightarrow b', \forall a \in X$$

$$(2) \ b \leq a \rightarrow b.$$

DIMOSTRAZIONE. (1) Per la proprietà (4) di 2.5.5 si ha che

$$\begin{aligned} b \leq b' &\Rightarrow (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow b') = a \rightarrow (b \wedge b') = a \rightarrow b \\ &\Rightarrow a \rightarrow b \leq a \rightarrow b'. \end{aligned}$$

(2) Per la proprietà (3) di 2.5.5 si ha

$$b \wedge (a \rightarrow b) = b \Rightarrow b \leq a \rightarrow b.$$

□

La seguente Proposizione caratterizza le algebre di Heyting.

PROPOSIZIONE 2.5.7. *Un reticolo  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$  con un'operazione binaria " $\rightarrow$ " è un'algebra di Heyting se e solo se l'operazione " $\rightarrow$ " verifica le condizioni (1), (2), (3), (4) di 2.5.5.*

DIMOSTRAZIONE. " $\Rightarrow$ " Se  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow)$  è un'algebra di Heyting, allora la tesi segue da 2.5.5.

" $\Leftarrow$ " Siano  $a, b \in X$  e sia  $x \in X$ .

Se  $x \leq a \rightarrow b$  allora per (2) si ha

$$(x \wedge a) \wedge b = x \wedge (a \wedge b) = x \wedge a \wedge (a \rightarrow b) = x \wedge a$$

ovvero  $x \wedge a \leq b$ .

Viceversa, sia  $x \in X$ , tale che  $x \wedge a \leq b$ . Per 2.5.6 (1), 2.5.5 (4), (1) e (3) risulta

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (a \rightarrow x) \\ &= x \wedge ((a \rightarrow x) \wedge (a \rightarrow a)) \\ &= x \wedge (a \rightarrow (x \wedge a)) \\ &\leq x \wedge (a \rightarrow b) \\ &\leq a \rightarrow b. \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 2.5.8. *Ogni algebra di Heyting è un reticolo distributivo.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché in ogni reticolo  $(X, \leq)$  vale

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c), \quad \forall a, b, c \in X$$

per ottenere la tesi, per il Teorema 2.4.3, basta verificare che  $\forall a, b, c \in X$  vale

$$a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

In effetti per 2.5.6 (1) e (2) e 2.5.5 (1) e (4) si ha

$$\begin{aligned} b \vee c &\leq (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c) \\ &= (a \rightarrow (a \wedge b)) \vee (a \rightarrow (a \wedge c)) \\ &\leq a \rightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{aligned}$$

da cui segue che

$$(b \vee c) \wedge a \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

□

COROLLARIO 2.5.9. *Se  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow)$  è un'algebra di Heyting allora valgono le seguenti proprietà*

- (1)  $(a \vee a') \rightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (a' \rightarrow b)$ .
- (2)  $a \leq a' \Rightarrow a' \rightarrow b \leq a \rightarrow b$ .

DIMOSTRAZIONE. (1) Siano  $a, a', b \in X$ . Per 2.5.6 (2) e 2.5.5 (2) si ha

$$((a \vee a') \rightarrow b) \wedge a \leq ((a \vee a') \rightarrow b) \wedge (a \vee a') = (a \vee a') \wedge b \leq b$$

pertanto

$$(a \vee a') \rightarrow b \leq (a \rightarrow b).$$

Analogamente si verifica che

$$(a \vee a') \rightarrow b \leq (a' \rightarrow b).$$

Inoltre, per la Proposizione 2.5.8 si ha che  $\forall y \in X$

$$\begin{aligned} y \leq a \rightarrow b, y \leq a' \rightarrow b &\Rightarrow y \wedge a \leq b, y \wedge a' \leq b \\ &\Rightarrow (y \wedge a) \vee (y \wedge a') \leq b \\ &\Rightarrow y \wedge (a \vee a') \leq b \\ &\Rightarrow y \leq (a \vee a') \rightarrow b. \end{aligned}$$

(2) Siano  $a, a', b \in X$ . Se  $a \leq a'$  allora

$$\begin{aligned} a \vee a' = a' &\Rightarrow a' \rightarrow b = (a \vee a') \rightarrow b = (a' \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow b) \\ &\Rightarrow a' \rightarrow b \leq a \rightarrow b. \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 2.5.10. *Ogni algebra di Boole è un'algebra di Heyting.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \neg)$  un'algebra di Boole e  $\forall a, b \in X$  sia

$$a \rightarrow b = \neg a \vee b.$$

Allora  $\forall x \in X$  si ha

$$x \leq (a \rightarrow b) = \neg a \vee b \Rightarrow x \wedge a \leq (\neg a \vee b) \wedge a = b \wedge a \leq b$$

e viceversa se  $x \wedge a \leq b$  allora

$$x \leq x \vee \neg a = (x \wedge a) \vee \neg a \leq \neg a \vee b = a \rightarrow b.$$

□

OSSERVAZIONE 2.5.11. In un'algebra di Boole, posto  $a \rightarrow b = \neg a \vee b$  si ha ovviamente  $\neg a = a \rightarrow \perp$ .

In un'algebra di Heyting si può generalizzare l'operazione unaria di complementazione che caratterizza le algebre di Boole.

L'operazione unaria definita in un'algebra di Heyting  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow)$

$$\neg : X \rightarrow X, a \longmapsto \neg a = a \rightarrow \perp$$

si dice *pseudo-complementazione* o *negazione*.

PROPOSIZIONE 2.5.12. *In un'algebra di Heyting la negazione verifica le seguenti proprietà:*

- (1)  $a \wedge \neg a = \perp$ .
- (2)  $\neg$  *inverte l'ordine*.
- (3)  $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ .
- (4)  $\neg \perp = \top$  e  $\neg \top = \perp$ .

DIMOSTRAZIONE. (1)  $\forall a \in X$  risulta

$$a \wedge \neg a = a \wedge (a \rightarrow \perp) = a \wedge \perp = \perp.$$

(2)  $\forall a, b \in X$ , se  $a \leq b$  allora per 2.5.9 2.  $\neg b = b \rightarrow \perp \leq a \rightarrow \perp = \neg a$ .

(3)  $\forall a, b \in X$  si ha per 2.5.9 (1)

$$\neg(a \vee b) = (a \vee b) \rightarrow \perp = (a \rightarrow \perp) \wedge (b \rightarrow \perp) = \neg a \wedge \neg b.$$

(4) Per 2.5.5 1.,  $\neg \perp = \perp \rightarrow \perp = \top$ ;  $\neg \top = \perp$  infatti

$$\begin{aligned} \neg \top &\leq \neg \top \Rightarrow \neg \top \leq \top \rightarrow \perp \\ &\Rightarrow (\neg \top) \wedge \top \leq \perp \\ &\rightarrow (\neg \top) = \perp. \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 2.5.13. Sia  $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow)$  un'algebra di Heyting e sia  $\neg$  la negazione in essa definita. Allora

$$(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \neg) \text{ è un'algebra di Boole} \Leftrightarrow \neg \text{ è idempotente.}$$

DIMOSTRAZIONE. “ $\Rightarrow$ ” Segue dalla Proposizione 2.4.11.

“ $\Leftarrow$ ” Poiché  $X$  è un'algebra di Heyting, da 2.5.8 segue che  $X$  è un reticolo distributivo.

Inoltre, per 2.5.12 (1) e (3), poiché  $\neg$  è idempotente si ha

$$\top = \neg \perp = \neg(a \wedge \neg a) = \neg(\neg \neg a \wedge \neg a) = \neg \neg(\neg a \vee a) = \neg a \vee a.$$

Da ciò e dalla 2.5.12 (1) segue la tesi. □

Indichiamo con **Heyt** la sottocategoria di **DLat** avente per oggetti le algebre di Heyting e per morfismi le applicazioni che sono compatibili con l'operazione “ $\rightarrow$ ”.

PROPOSIZIONE 2.5.14. **Bool** è isomorfa ad una sottocategoria piena di **Heyt**.

DIMOSTRAZIONE. Le funzioni definite da

$$(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \neg) \in |\mathbf{Bool}| \longmapsto (X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow) \in |\mathbf{Heyt}|$$

dove  $a \rightarrow b = \neg a \vee b$ ,  $\forall a, b \in X$  ed

$$f : X \rightarrow Y \longmapsto f : X \rightarrow Y$$

determinano una immersione piena di **Bool** in **Heyt**.

Tenendo infatti conto della Proposizione 2.5.10 ed osservando che considerate due algebre di Boole  $X$  ed  $Y$ , se una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è un morfismo di **Heyt** e quindi di **Lat**, allora dalla 2.4.10 segue che  $f$  è anche un morfismo di **Bool**; viceversa se  $f$  è un morfismo di **Bool**, allora  $\forall a, b \in X$  risulta  $f(a \rightarrow b) = f(\neg a \vee b) = \neg f(a) \vee f(b) = f(a) \rightarrow f(b)$ , cioè  $f$  è un morfismo in **Heyt**. □

Notiamo, che, a differenza di **Bool**, **Heyt** non è una sottocategoria piena di **DLat**. Ciò risulterà chiaro nell'Esempio 3.3.12.