Convegno Nazionale
Matematica senza Frontiere
Lecce, 5-8 marzo 2003

Interpolazione di Newton e Lagrange

Pierluigi Magli - Wenchang Chu

Dipartimento di Matematica "E. De Giorgi" - Università di Lecce
pierluigi.magli@libero.it, chu.wenchang@unile.it

Sommario

È ben noto che le interpolazioni di Newton e di Lagrange degli stessi punti di una funzione assegnata, rappresentano lo stesso polinomio. Viene qui presentata una dimostrazione elementare e diretta che fa uso del calcolo combinatorio.

Sia $f(x)$ una funzione complessa ed $\{x_k\}_{k=0}^n$ un insieme di punti distinti (detti *nodi*) sui quali essa è assegnata; i *polinomi d'interpolazione di Newton e Lagrange* della funzione $f(x)$ sono rispettivamente definiti da

$$N_n(x;f) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_k] \prod_{\iota=0}^{k-1} (x - x_\iota) \tag{1}$$

$$L_n(x;f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \tag{2}$$

dove

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k} (x_j - x_i)} \tag{3}$$

è l'espressione esplicita per la differenza divisa di ordine k.

Sappiamo che $\mathbf{N_n(x;f) = L_n(x;f)}$. Per quanto risulta agli autori, tutte le dimostrazioni pubblicate su periodici e testi di analisi numerica di questo semplice ma importante risultato, sono basate sul principio di induzione. È immediato verificare la proprietà interpolante per il polinomio di Lagrange, si ha cioè $L_n(x_k;f) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \cdots, n$, ma risulta necessario l'utilizzo dell'induzione per provare che la stessa vale anche per il polinomio di Newton, ossia $N_n(x_k;f) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \cdots, n$. Ricordando ora un risultato algebrico che due qualsiasi polinomi di grado $\leq n$, i quali coincidono su $n+1$ punti distinti, sono identici dappertutto, si ottiene subito l'uguaglianza $\mathbf{N_n(x;f) = L_n(x;f)}$.

Viene qui presentata una dimostrazione alternativa basata sul calcolo combinatorio, la quale è abbastanza semplice da essere compresa anche da studenti di scuole superiori.

Infatti, sostituendo la differenza divisa nel membro destro di Eq (1) con l'espressione in Eq (3), si ottiene

$$N_n(x;f) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \prod_{\iota=0}^{k-1}(x-x_\iota) \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k}(x_j-x_i)}.$$

Scambiando l'ordine delle sommatorie, l'espressione può essere riformulata come segue

$$N_n(x;f) \;=\; \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \sum_{k=j}^{n} \frac{x-x_j}{x-x_k} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}. \tag{4}$$

Definiamo a questo punto

$$T_k \;=\; \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

e osserviamo che valgono

$$T_k - T_{k-1} \;=\; \frac{x-x_j}{x-x_k} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}. \tag{5}$$

Pertanto la somma interna di Eq (4) può scriversi

$$T_j + \sum_{k=j+1}^{n} \left\{T_k - T_{k-1}\right\} \;=\; T_n \;=\; \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}.$$

Sostituendo nell'Eq (4) si ottiene l'interpolazione di Lagrange esplicitata nell'Eq (2).

Gli autori si augurano che questo approccio possa prendere luogo nei testi che trattano l'argomento.