

Convegno Nazionale
Matematica senza Frontiere
Lecce, 5-8 marzo 2003

Laboratorio Cosmico: viaggio virtuale nello Spazio e nel Tempo

Domenico Licchelli

ASTRA: Associazione per lo Studio e la Ricerca Astronomica
licchelli@libero.it

Sommario

Il titolo di questa presentazione potrà sembrare ambizioso, e in una certa misura lo è, ma rispecchia quanto accade se si segue il percorso storico-scientifico che ha portato alla scoperta di alcune tra le più note equazioni della Fisica: la legge di Gravitazione Universale di Newton, con le leggi di Keplero suoi corollari e il secondo postulato della Relatività Speciale di Einstein.

L'utilizzo di opportuni riferimenti letterari e artistici, combinati con le moderne tecnologie multimediali, consente di indagare a fondo la natura e le conseguenze delle equazioni suddette stimolando, a parere di chi scrive, la curiosità intellettuale e il desiderio di comprendere meglio le straordinarie meraviglie della Natura.

1 Introduzione

Uno dei maggiori ostacoli che si incontrano nello studio della Matematica e della Fisica, è la difficoltà di visualizzare il significato e le conseguenze delle equazioni. In questo lavoro ci si pone l'obiettivo di mostrare come, sfruttando le tecnologie multimediali e facendo parlare gli stessi protagonisti della storia della Scienza, si possa coniugare il rigore scientifico al fascino dell'avventura, in una sorta di viaggio virtuale nello Spazio e nel Tempo. La cornucopia di miti, leggende e opere d'arte ispirate al cielo stellato è una diretta testimonianza dell'importanza che gli astri hanno sempre avuto, fin dalle epoche più remote, nella storia dell'Uomo. Temuto ed adorato, il cielo stellato è sempre stato visto come il regno degli Dei. E d'altra parte cosa poteva essere quello straordinario sfavillio di gioielli, che si mostrava ogni notte serena allo sguardo attonito di ogni essere vivente, se non una dimora divina? Ai giorni nostri, invece, a causa dell'inquinamento luminoso, diretta conseguenza della perversa tendenza ad illuminare a giorno e in modo totalmente scorretto città e paesi, l'uomo ipertecnologico del nostro tempo ha perso contatto con l'Universo e, parafrasando il grande Flammarion, è straniero nella stessa sua patria. Chi vive in ambiente cittadino spesso non sa neppure dell'esistenza delle stelle, o rimane quantomeno incredulo, quando gli si racconta che le stelle sono colorate. Esempio fu il caso del

terremoto di Los Angeles di alcuni anni fa. La mancanza di energia elettrica, rivelò agli abitanti della metropoli la notte stellata e i centralini delle forze dell'ordine furono letteralmente presi d'assalto da persone spaventate, che si chiedevano cosa fosse successo in cielo. Come se questo non fosse già gravissimo, l'ingente quantità di energia elettrica sperperata in così malo modo, comporta anche notevoli costi ambientali, oltre ad enormi sprechi di denaro pubblico, che potrebbe essere proficuamente impiegato in attività più produttive.

2 Viaggio nello spazio e nel tempo

Il naturale buio della notte, aveva permesso agli antichi astronomi Babilonesi ed Egizi, di studiare con grande accuratezza l'evolversi delle stagioni, gli spostamenti del Sole tra le stelle e di ideare quel calendario di 365 giorni che tutt'oggi utilizziamo. Ciò che riusciva loro incomprensibile era il moto dei pianeti, niente affatto regolare e con traiettorie imprevedibili (v. Fig.1).



Figura 1: Percorso di Marte nel periodo 2000-2006

Nel IV secolo a.c. Aristarco di Samo aveva supposto che la Terra si muovesse nello spazio e che quindi l'apparente percorso disordinato degli altri pianeti, fosse conseguenza di questo moto. Questa teoria non ebbe un grande seguito, principalmente perché impossibile da dimostrare con le conoscenze dell'epoca. Nel II secolo d.c. Claudio Tolomeo si rese conto che questa ipotesi spiegava in maniera semplice i fenomeni, ma riteneva che fosse comunque assurda in quanto, a suo dire, se la Terra ruotasse, tutti i

corpi non appoggiati ad essa avrebbero dovuto muoversi in direzione opposta, contro la comune evidenza sensoriale. Questo ragionamento e l'autorità del personaggio, fece sì che le rivoluzionarie ipotesi di Aristarco fossero accantonate per altri tredici secoli. Dovendo comunque salvare i fenomeni, divenne indispensabile trovare un modo per fornire delle previsioni astronomiche valide, a sostegno delle attività umane che ne avevano bisogno, soprattutto l'agricoltura e la navigazione. Fu sostanzialmente un grande lavoro matematico, in cui i risultati migliori furono ottenuti da Apollonio e Tolomeo. I punti essenziali su cui si basava la loro costruzione erano due:

- La Terra era immobile al centro dell'Universo
- I moti dei pianeti, per obbedire al dettato platonico sulla perfezione delle forme, dovevano essere circolari e uniformi

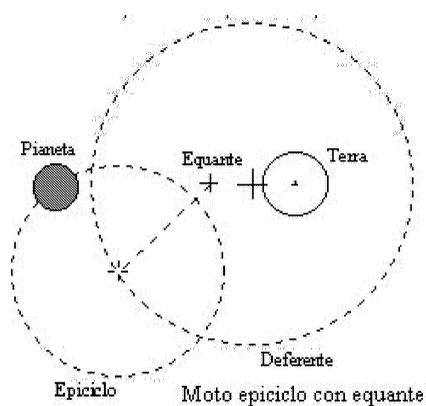


Figura 2: Moto epicicloidale

La soluzione trovata, seppur ingegnosa, portava ad un modello piuttosto complicato (40 ruote per far funzionare tutto il meccanismo) costituito da epicicli, deferenti ed equanti (v. Fig. 2). I pianeti ruotavano con moto uniforme lungo una piccola circonferenza (epiciclo), il cui centro si muoveva di moto uniforme lungo una circonferenza più grande (deferente). Il deferente stesso era però eccentrico relativamente alla Terra e quindi il centro dell'epiciclo ruotava di moto uniforme lungo il deferente non rispetto alla Terra, ma ad un punto ad essa simmetrico, l'equante. In questo modo era possibile predire la posizione dei pianeti con un errore inferiore ad un paio di gradi.

Nonostante la complessità, il modello Tolomaico attraversò praticamente immutato 1300 anni di storia, per una serie di motivi di carattere storico, filosofico e religioso. In particolare, il fatto che la Terra, e quindi l'Uomo,

avesse un ruolo centrale nell'Universo così strutturato, ben si adattava alla visione della Chiesa, che lo consacrò come la rappresentazione certa del mondo. Bisognerà attendere l'inizio del 1500 perché si alzasse, in maniera autorevole, una voce fuori dal coro, ed ironia della sorte fu quella di un ecclesiastico, Niccolò Copernico. La sua avversione per l'equante e la rottura della simmetria che esso comportava, lo portò a detronizzare la Terra dal suo soglio regale: era il Sole che governava la famiglia degli astri che lo attorniava e che ruotava attorno ad esso, Terra compresa. Il senso della rivoluzione copernicana è tutta in questo passaggio, più filosofico che fisico-matematico, dato che per il resto la situazione cambiava relativamente poco. Come le onde lunghe susseguenti ad un terremoto, che da piccole increspature in pieno oceano, diventano poi enormi montagne d'acqua quando si abbattono sulla terraferma, distruggendo ogni cosa al loro passaggio, così il "De revolutionibus orbium coelestium" si rivelerà fatale per il sistema Tolemaico. In un certo senso Copernico liberò i suoi successori dalle pastoie e dalle paure del passato, invitandoli, forse inconsapevolmente, ad osare di più e indicando la strada su cui poi si sarebbero incamminati personaggi del calibro di Ticho Brahe, Keplero, Galilei e Newton.

Ticho Brahe è stato sicuramente il più grande astronomo prima dell'era telescopica. I suoi meriti furono molteplici, tanto che il re di Danimarca gli regalò un'isola, su cui fece costruire Uraniborg, che a buon diritto può essere considerato il primo osservatorio astronomico europeo. Le sue precisissime osservazioni (errori inferiori ai 2 primi) gli consentirono di dimostrare, tra l'altro, che all'opposizione, Marte era più vicino alla Terra, in evidente contrasto con l'ipotesi Tolemaico-Aristotelica delle sfere cristalline. Nonostante ciò, non accettò neppure il modello Copernicano, elaborandone uno suo che conteneva elementi di entrambi.

L'imponente mole di dati accumulati in decenni di osservazioni, si rivelarono una miniera d'oro per Keplero, suo successore e Copernicano. Era un uomo di natura mistica e religiosa, fortemente convinto che l'armonia del mondo fosse basata sulla geometria. Matematico di altissimo livello, si accorse, analizzando i dati di Ticho, di una discrepanza di 8 primi nella longitudine di Marte. Dopo cinque anni ininterrotti di calcoli, giunse alla conclusione che l'ipotesi che meglio spiegava gli spostamenti dei pianeti era un'orbita ellittica, con il Sole in uno dei fuochi. Fu la fine degli epicicli Tolemaici. Movendosi un po' come avevano fatto i Pitagorici secoli prima, Keplero cercò di individuare anche le cosiddette armonie del Cosmo, ossia quei rapporti numerici semplici che rendevano conto del moto relativo dei pianeti. I suoi sforzi furono effettivamente premiati con la scoperta della Terza Legge, che lega tra loro i semiassi maggiori delle orbite coi periodi di rivoluzione. Tentò anche un primo accenno di spiegazione fisica del moto planetario, basandosi sulla teoria del magnetismo di Gilbert. In assenza di prove restò una pura speculazione teorica.

In Italia, nello stesso periodo, un altro grande personaggio, Galileo Galilei, riconosciuto unanimemente come il padre della Fisica, tentava un approc-

cio molto più sperimentale al problema del moto. Egli era sì convinto che l'Universo fosse scritto in legge matematica, ma anche che i fenomeni andassero studiati sul campo e, nei limiti del possibile, riprodotti in laboratorio. Costruiva da sé gli strumenti di misura e gli apparati sperimentali, dimostrando grandi abilità artigiane e una straordinaria capacità di comprendere le relazioni tra le cose e l'uso che ne poteva derivare. Esemplare fu il caso del telescopio. Venne a sapere che in Olanda era stato inventato un aggeggio che permetteva di vedere le cose più vicine. Appreso il funzionamento, cominciò a costruirne di sempre più efficienti e lo trasformò, da curiosità da fiera paesana, in strumento scientifico. Scoprì così che il Sole e la Luna non erano corpi perfetti, che Venere mostrava il fenomeno delle fasi e, soprattutto, che Giove era circondato da quattro satelliti che gli ruotavano attorno, in seguito chiamati con i nomi di personaggi mitologici, strettamente collegati alle avventure del padre degli Dei (Io, Europa, Ganimede e Callisto). Tutte evidenze inconfutabili che il modello Tolemaico era sbagliato. La sua avversione per le teorie preconfezionate o basate sui testi degli antichi, comprese le Sacre Scritture, inevitabilmente gli inimicarono le autorità ecclesiastiche, che videro messi in discussione alcuni dei fondamenti della loro dottrina. Il processo e l'abiura non poterono comunque fermare la portata rivoluzionaria delle opere del grande scienziato, che costituiscono ancora oggi delle pietre miliari della Scienza.

È con questo *background* che fa la sua comparsa sulla scena, un altro genio, secondo alcuni il più grande, Isaac Newton. L'importanza della sua opera fu percepita nettamente già da suoi contemporanei, tanto che il poeta inglese Alexander Pope gli dedicò alcuni versi, in cui dichiarò tutta la sua ammirazione: “*La Natura e le sue leggi erano nascoste nell'oscurità; Dio disse sia Newton, e tutto fu luce*” (On Isaac Newton).

Come si addice ad un genio, anche l'*anglo* di Foscoliana memoria, diede il suo prezioso contributo in molteplici settori della Matematica e della Fisica. Il suo capolavoro furono i “Principia Matematica”, in cui formulò in maniera straordinaria e rigorosa, le leggi del moto e la Legge di Gravitazione Universale, fornendo in un unico lavoro la spiegazione di quanto scoperto da Galilei e da Keplero. In particolare, la Legge di Gravitazione Universale, vero pilastro portante dell'intero Universo, è di una semplicità sconcertante e di una bellezza ed eleganza rara. Essa afferma che ogni corpo esercita su ogni altro corpo una forza attrattiva, che ha per direzione la retta che congiunge i due corpi e la cui intensità è direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato delle loro distanze:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (1)$$

Questa mirabile sintesi è forse una delle vette più alte, se non la più alta, mai raggiunta dall'ingegno umano. Lungi dall'essere un risultato limitato ad una branca del sapere, la Meccanica Newtoniana sarà la base di tutta la Fisica, con frequenti incursioni in altre discipline apparentemente lontane,

come la Biologia e la Medicina.

Le leggi di Keplero possono essere derivate dalle leggi di Newton e in un certo senso ne costituiscono dei corollari.

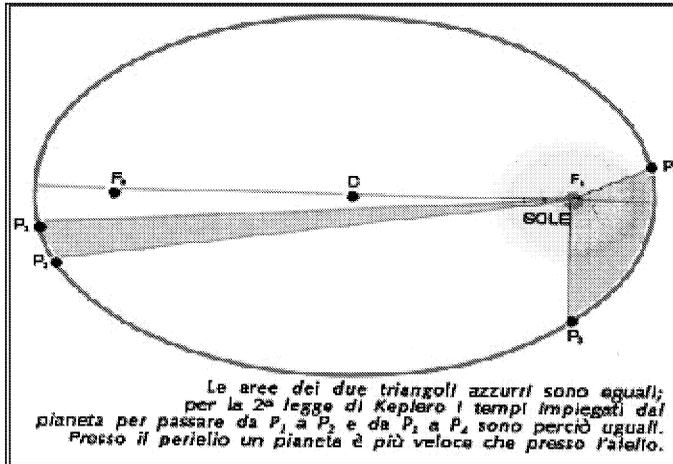


Figura 3: Le leggi di Keplero

- Prima Legge: tutti i pianeti descrivono attorno al Sole delle orbite di forma ellittica. Il Sole occupa uno dei due fuochi, comune a tutte le ellissi.
- Seconda Legge: il raggio vettore copre aree uguali in tempi uguali (v. Fig.3).
- Terza Legge: il quadrato dei periodi di rivoluzione dei pianeti è proporzionale ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite.

La dimostrazione può essere fatta utilizzando le normali relazioni della Meccanica. Sono richiesti solo i concetti di Momento e di Energia. Il Momento (M) di una forza (F) rispetto ad un punto, è definito come il prodotto vettoriale della forza per la distanza del punto dalla sua retta d'azione (r). In formula:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \quad (2)$$

Il momento angolare (L), rispetto ad un punto, di una particella di massa m che si muove a velocità v , è definito come il prodotto vettoriale:

$$\vec{L} = m\vec{v} \times \vec{r} \quad (3)$$

Il momento angolare L è pertanto un vettore perpendicolare al piano individuato da r e v . Se i due momenti sono calcolati rispetto allo stesso punto vale la relazione:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (4)$$

Quindi se il momento delle forze M è nullo allora il momento angolare L è una costante del moto. Questo avviene se la particella è libera ($F = 0$), oppure quando la direzione della forza è parallela a quella di r , cioè ogni volta che la forza è una forza di tipo centrale. Questo è il caso sia del campo gravitazionale che di quello elettrico. Un pianeta che si muove attorno al Sole, per la conservazione del momento angolare, deve allora percorrere un'orbita piana. Per conoscere la forma di tale orbita, è sufficiente tenere presente che, una particella in moto sotto l'azione di forze centrali, descrive una sezione conica, cioè una circonferenza, un'ellisse, una parabola o un'iperbole, secondo il valore della sua energia totale. L'energia totale è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. In un sistema composto di due particelle, di cui una molto più massiva dell'altra, si ha che il centro di massa del sistema, coincide con la posizione della particella di massa maggiore. Nel caso, per esempio, del sistema Terra-Sole, l'energia posseduta dalla Terra è data da:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m_T v^2 - \frac{G \cdot m_S \cdot m_T}{r} \quad (5)$$

dove m_T è la massa e v la velocità della Terra, m_S la massa del Sole ed r la distanza relativa. Alla distanza cui si trova la Terra, un corpo di massa trascurabile rispetto al Sole, segue un'orbita ellittica se ha una velocità inferiore a 42 km/s (e infatti la velocità orbitale della Terra è circa 30 km/s); se la velocità raggiunge i 42 km/s, allora l'orbita diviene parabolica ed il corpo si allontana all'infinito; se supera questo valore il corpo va verso l'infinito lungo un'orbita iperbolica. In realtà, ogni pianeta esercita un'attrazione sugli altri, sebbene molto minore di quella solare. Questo fa sì che le orbite non siano delle ellissi perfette, ma risentano delle perturbazioni gravitazionali degli altri pianeti.

La Seconda Legge afferma che la velocità areale è una costante del moto. Una particella che descrive una traiettoria curvilinea, si sposta in un intervallo di tempo dt da P a P' , ed il raggio vettore spazza l'area tratteggiata corrispondente al triangolo OPP' (v. Fig. 4). L'area di tale triangolo è:

$$dA = \text{area}OPP' = \frac{1}{2}r \cdot (rd\theta) = \frac{1}{2}r^2 d\theta \quad (6)$$

L'area spazzata nell'unità di tempo è:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (7)$$

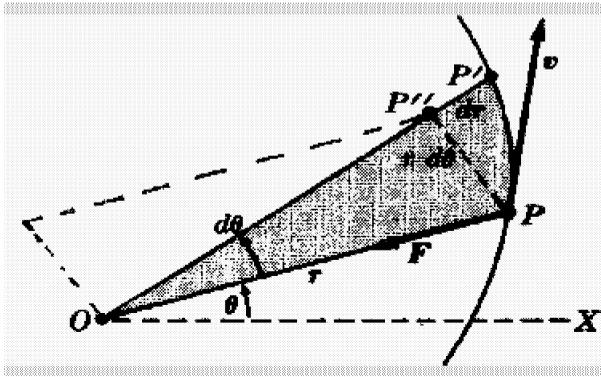


Figura 4: Area spazzata dal raggio vettore

Il momento angolare della particella è una costante essendo il campo di forze centrale:

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{costante} \quad (8)$$

Confrontando le equazioni (7) e (8) si deduce che l'area spazzata dal raggio vettore della particella nell'unità di tempo è costante, che è quanto si voleva dimostrare. Tra l'altro, questo implica anche che la velocità del pianeta in prossimità del perielio è maggiore di quella all'afelio, cosa che poteva essere dedotta anche dalla conservazione dell'energia dell'equazione (5).

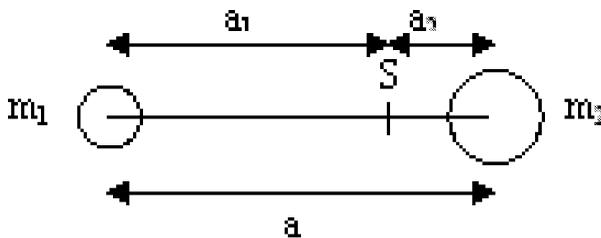


Figura 5: Baricentro del sistema

Per ricavare la Terza Legge di Keplero consideriamo il caso semplice di orbite circolari. Siano date due masse m_1 ed m_2 e siano a_1 ed a_2 le rispettive distanze dal comune baricentro S con $a = a_1 + a_2$ (v. Fig. 5).

Dalla definizione di baricentro si sa che:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 = \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \right) \quad (9)$$

Per ciascuna massa la forza di attrazione gravitazionale deve uguagliare la forza centrifuga. Se P è il periodo orbitale del sistema, si ha per la massa a_1 :

$$m_1 \cdot \omega^2 \cdot a_1 = m_1 \left(\frac{2\pi}{P} \right)^2 a_1 = \frac{G m_1 m_2}{a^2} \quad (10)$$

e sostituendo al posto di $m_1 a_1$ la (9), ed elidendo i termini simili, si ottiene la Terza Legge di Keplero in forma generalizzata:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \quad (11)$$

In realtà, sia il Sole sia il pianeta ruotano attorno al baricentro comune, ma poiché il primo è molto più massiccio del secondo, il baricentro coincide quasi con il centro del Sole e quindi la sola rivoluzione evidente è quella del pianeta attorno ad esso.

Facendo uso di questa legge è stato relativamente facile ricavare le masse dei pianeti, studiando il moto dei loro satelliti o, in maniera ancora più accurata, utilizzando, dove questo è stato possibile, le masse note delle sonde spaziali.

Il trionfo della Meccanica di Newton si ebbe nel 1846, quando fu scoperto Nettuno, grazie ai calcoli di Adams e Le Verrier, che si erano basati unicamente sullo studio delle orbite di Giove e Saturno e sulle anomalie riscontrate nell'orbita di Urano. In tempi molto più recenti e con lo stesso approccio, è stato possibile inviare sonde spaziali, incontro ad asteroidi e comete, come la sonda NEAR che è addirittura atterrata sull'asteroide Eros, o la sonda Giotto che passò a soli 500 km dal nucleo della cometa di Halley.

Dopo aver mostrato l'aspetto fisico-matematico delle leggi precedenti, per facilitare la visualizzazione dei fenomeni ad esse connessi, sono stati inseriti nella presentazione alcuni video, realizzati con rigore matematico, in cui si vedeva una loro concreta applicazione.

È stato così possibile osservare la variazione della velocità orbitale della Stazione Spaziale Internazionale, (*clip* da cui è stato estratto il fotogramma in Fig. 6) al variare della sua distanza dalla Terra, la rotazione dei satelliti di Giove ed effettuare un sorvolo ravvicinato degli anelli di Saturno. Il viaggio nello Spazio si è concluso con una folle corsa attraverso il Sistema Solare, a bordo della cometa di Halley.

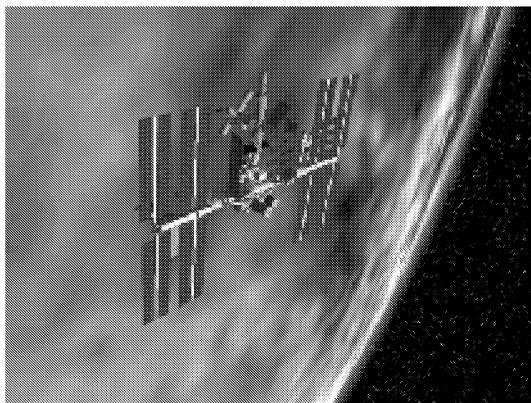


Figura 6: La ISS in orbita

In realtà l'osservazione del cielo stellato consente anche un viaggio nel Tempo. Per quanto possa risultare strano, è quanto realmente avviene a causa della velocità finita della luce, che costituisce il mezzo di trasmissione delle informazioni. Lo aveva intuito già Galilei, ma sarà necessario attendere le osservazioni di Roemer (1676) delle eclissi di Io e la scoperta dell'aberrazione della luce ad opera di Bradley (1726) per avere la prova decisiva. Oggi sappiamo che niente può muoversi più velocemente della luce, come imposto dal Secondo Postulato della Relatività Speciale di Einstein e verificato in moltissimi esperimenti. La conseguenza immediata è che la distanza si può tradurre in tempo-luce; così la Luna che si trova a 384000 km è anche a poco più di 1 secondo-luce, mentre il Sole è a circa 150 milioni di km, ossia 8 minuti-luce.

L'immagine in figura 7 ritrae uno dei gioielli del cielo invernale, la Grande Nebulosa di Orione. La luce di questa straordinaria regione di gas e polveri, registrata con la strumentazione del piccolo Osservatorio del Dipartimento di Fisica dell'Università di Lecce, è stata emessa 1950 anni fa, nel 50 d.c. Se trasformiamo questo valore negli usuali km verrebbe fuori un numero astronomico, tanto incomprensibile per la nostra capacità di visualizzazione, da sconsigliare questo calcolo. E siamo ancora dentro il cortile di casa. Da un posto buio, in autunno, è possibile percepire ad occhio nudo una piccola nubecola nella costellazione di Andromeda: si tratta di M31, la galassia compagna della nostra Via Lattea, che dista da noi circa 2 milioni di anni-luce. Un ipotetico osservatore di un pianeta di quella galassia, guardando nella nostra direzione in questo momento, vedrebbe la Via Lattea come era 2 milioni di anni fa. Se in primavera puntiamo i telescopi verso la Chioma di Berenice, allora lo sguardo si spinge verso le profondità del cosmo. I fotoni raccolti dai rivelatori sono stati emessi miliardi di anni fa, quando il



Figura 7: La Grande Nebulosa di Orione

Sistema Solare ancora non esisteva.

C'è da rimanere quanto meno disorientati davanti a simili constatazioni.

Ma quanto ci si può spingere indietro nel tempo?

Fin quasi all'origine dell'Universo, quando la materia e la radiazione si disaccoppiarono, poche centinaia di migliaia di anni dopo il Big-Bang. Ci sono una serie di indicazioni, che fanno pensare che le attuali teorie cosmologiche siano abbastanza attendibili fino a tempi infinitesimi dall'inizio del Tutto. Naturalmente sono delle teorie e come tali suscettibili di modifiche, quando non, addirittura, di essere accantonate in futuro. E tuttavia è innegabile che, se si riesce a coniugare, almeno a grandi linee, la componente fisico-matematica in esse contenuta con l'osservazione diretta degli astri, non si può non rimanere estasiati e gioire come un bambino sulla spiaggia, intento a "...racogliere di quanto in quanto un ciottolo più liscio degli altri, o una conchiglia più bella, mentre il grande oceano della verità gli si estende davanti, immenso ed inesplorato" (Isaac Newton).

Riferimenti bibliografici

- [1] S. Rosati: *Fisica generale*, Casa Editrice Ambrosiana
- [2] Alonso/Finn: *Elementi di Fisica per l'Università*, Masson Italia Editori
- [3] *General History of Astronomy*, Cambridge University Press
- [4] N. Copernico: *De Revolutionibus Orbium coelestium*, Einaudi
- [5] G. Galilei: *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, Einaudi

- [6] G. Galilei: *Sidereus Nuncius*, Marsilio
- [7] I. Newton: *Principi matematici della Filosofia naturale*, UTET
- [8] A. Einstein: *Opere scelte*, Bollati Boringhieri
- [9] *Astronomia - Alla scoperta del Cielo*, Curcio Editore
- [10] Lucrezio: *La natura delle cose*, BUR
- [11] Ovidio: *Le metamorfosi*, BUR