

Convegno Nazionale
Matematica senza Frontiere
Lecce, 5-8 marzo 2003

Il ruolo delle tecnologie informatiche nella ricerca in Matematica

Giovanna Gazzaniga

Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche - CNR - Pavia
gianna@imati.cnr.it

Sommario

In questo articolo sono riportate alcune considerazioni sull'importanza delle tecnologie informatiche nella "ricerca in Matematica". Dopo una breve descrizione di "Che cos'è la ricerca in Matematica", si analizza il ruolo e l'importanza delle Tecnologie Informatiche sia nella ricerca in "Matematica pura" che nella ricerca in "Matematica applicata". Inoltre, si presentano alcuni esempi, nel campo della ricerca, dove l'uso delle tecnologie informatiche ha una grande influenza.

1 Introduzione

Per i non addetti ai lavori, l'espressione "Ricerca in Matematica" è legata ad una immagine misteriosa di un mondo affollato di numeri in cui scienziati folli, senza età e senza legami con la realtà, partoriscono congetture con la sola finalità di un personale godimento intellettuale.

Ciò è dovuto a diverse cause:

- la difficoltà del linguaggio matematico in sè, ricco di simboli ed abbreviazioni, poco note ai più;
- una certa *arroganza* intellettuale che fa ritenere superflua ogni apertura al mondo *comune*;
- l'effettiva difficoltà di una divulgazione che sia nello stesso tempo corretta e semplice da capire.

Quanto sia importante ed urgente uscire da questo *ghetto* è dimostrato dal disamore crescente dei giovani per la Matematica e le discipline scientifiche in generale. Sentimento condiviso in tutti i paesi, europei ed extraeuropei, a dispetto di diverse iniziative che vorrebbero avvicinare i giovani all'amore per la speculazione matematica¹.

¹Due iniziative mi sembrano particolarmente degne di nota: le Olimpiadi della matematica [7], le iniziative *Problematicamente* e *Flatlandia* dell'IRRE Emilia Romagna [5, 6]

2 Che cos'è la ricerca in Matematica?

La ricerca in Matematica può essere caratterizzata da due diversi obiettivi:

- la generazione di nuove conoscenze matematiche,
- la generazione di applicazioni della matematica.

2.1 Ricerca = generazione di conoscenze matematiche

Molto spesso la Matematica è vista come un insieme compatto di nozioni, che si sviluppano in una progressiva generalizzazione, ma al di fuori di ogni tempo.

Una rapida analisi alla storia della Matematica ci mostra che le conoscenze che noi ora dominiamo si sono costruite passo a passo in più di 2500 anni! [2]

A partire dalle prime tracce di conteggi, lasciate dall'uomo di Neanderthal circa 500 secoli prima di Cristo, bisogna risalire fino al XIX secolo a.C. per trovare i primi cenni di notazione posizionale per la scrittura dei numeri. Il numero 0, con una chiara definizione delle sue proprietà, appare solo nell'anno 1000 d.C., quando Talete (circa 600 a.C.), Pitagora (circa 500 a.C.) ed Euclide (circa 300 a.C.) hanno già sviluppato le loro teorie geometriche.

Le equazioni di primo e secondo grado vengono introdotte da Diofanto solo nel III secolo d.C.

Le relazioni con il mondo arabo, nel 1200 d.C. circa, aprono la strada all'introduzione in Europa del sistema di numerazione con cifre arabe che tuttora utilizziamo.

Solo nel XVI secolo d.C. Tartaglia fornisce la regola per la risoluzione delle equazioni di terzo grado.

La geometria analitica e l'analisi infinitesimale si sviluppano nel 1600, ad opera di Cartesio, Newton e Leibniz, mentre le Geometrie non euclidee vengono introdotte da Lobacevskij, Bolya, Riemann e Klein solo nel XIX secolo.

Nel 1900 vengono elaborate la teoria dell'informazione (Wiener), lo studio delle catastrofi (Thom) e lo studio dei frattali (Mandelbrot).

Ovviamente il processo non si interrompe qui. Nel nuovo millennio i matematici sono *sfidati* a risolvere nuovi problemi. Sette di essi, dichiarati i *Millennium Prize Problems*, selezionati da un comitato scientifico del Clay Mathematics Institute di Cambridge, Massachusetts (U.S.A.), garantiscono a chi per primo ne produrrà la soluzione un premio di 7 milioni di dollari USA! [8]

La presa di coscienza di questo infinito procedere della storia delle conoscenze matematiche potrebbe chiarire ai giovani il significato della ricerca in Matematica e magari sollecitarli ad interessarsi di più di questa disciplina. Purtroppo nelle nostre scuole questo aspetto viene sovente dimenticato o re-

legato in secondo piano, rispetto alla somministrazione di nozioni e concetti matematici, causando il disamore di cui si è già parlato.

Ma come intervengono le Tecnologie Informatiche nel cammino sopra descritto? Ovviamente i traguardi illustrati sono stati raggiunti senza la presenza delle Tecnologie Informatiche, che anzi si sono potute sviluppare proprio grazie alle conoscenze matematiche citate. Inoltre è noto che la Matematica si basa su due *pilastri* fondamentali: i concetti di **infinito** e **continuità**, mentre le Tecnologie Informatiche trattano informazione **finita** in tempi **discreti**.

Le Tecnologie Informatiche si possono, però, affiancare alla ricerca in Matematica, vista come sviluppo di conoscenze matematiche, per:

- verificare congetture;
- facilitare la dimostrazione di congetture.

Una rivista a larga diffusione riportava la seguente notizia:

“ π è un numero frazionario senza fine?

Con l'avvento del supercomputer si è aperta la caccia alla scoperta di qualche regolarità nella sequenza delle cifre dopo la virgola. Dopo 400 ore di calcolo alcuni matematici dell'Università di Tokio hanno confermato che non esiste alcuna regolarità fino alla cifra decimale che segue dopo 1241 miliardi di cifre. ”

Ma cosa si può dire circa le cifre successive? In questo caso l'elaborazione automatica fornisce un risultato che, anche se non accettabile dal punto di vista della conferma che π sia effettivamente un numero formato da infinite cifre decimali, permette di rendere questa informazione un po' più *concreta*.

Analogamente, l'ultimo teorema di Fermat:

“Non è possibile risolvere l'equazione

$$x^n + y^n = z^n$$

con x, y, z numeri interi positivi e $n > 2$, qualsiasi”

ha avuto tanti tentativi di *verifiche* empiriche con lunghe ore di calcolo su supercalcolatori, ma la *dimostrazione* accettata è solo quella fornita da Andrew Wiles nel 1995, basata sulla congettura di Taniyama per le curve ellittiche!

La riflessione in ambito scolastico su questi fatti permetterebbe di utilizzare Tecnologie Informatiche nella didattica della Matematica in modo più corretto e significativo.

Infine, strumenti informatici che sempre più spesso si affiancano agli strumenti tradizionali nell'attività di dimostrazione di teoremi o di congetture sono i cosiddetti C.A.S. (Computer Algebra Systems): Mathematica, Maple, Derive, Reduce, Macsyma, . . .

Al loro aiuto viene fatto ricorso per visualizzare grafici di funzioni complesse, per semplificare espressioni, per elaborare calcoli difficili, in mo-

do da ricavare suggerimenti per la formulazione della congettura o della dimostrazione che si sta studiando.²

2.2 Ricerca = generazione di applicazioni della matematica

Ben diversa è, invece, l'importanza del ruolo che le Tecnologie Informatiche assumono nella ricerca matematica **applicata**. Si può senza esagerare affermare che esse hanno un ruolo trainante nello sviluppo di applicazioni della Matematica!³

Le due peculiarità delle Tecnologie Informatiche:

- l'alta velocità di elaborazione e
- la capacità di trattare grandi quantità di dati

consentono di raggiungere risultati inimmagibili fino a poco tempo prima. Volendo cercare di dare una classificazione delle situazioni in cui le Tecnologie Informatiche intervengono nella ricerca matematica applicata, si può dire che esse vengono ampiamente utilizzate nelle attività:

- costruzione e sperimentazione di modelli;
- simulazione;
- costruzione di ambienti di realtà virtuale.

2.2.1 Utilizzo di Tecnologie Informatiche per costruire e sperimentare modelli.

Tutte le scienze sono interessate in questo campo: dalla Ingegneria alla Medicina, alla Biologia, all'Astrofisica, alla Climatologia, ecc . . .

L'utilizzo di modelli consente di effettuare numerose prove, anche in situazioni *estreme*, con risparmi di tempo e risorse, evitando rischi.

Per fare solo alcuni esempi, si pensi ai crash test nell'industria automobilistica, allo studio sull'assorbimento di farmaci in Medicina, alle previsioni del tempo su larga scala in Climatologia, allo studio sulla resistenza dei materiali in Ingegneria e così via. Anche le imprese sportive si avvantaggiano di risultati ottenuti con attività di modellizzazione matematica. La vittoria della Coppa America 2003 da parte della barca svizzera Alinghi forse non sarebbe stata ottenuta senza i risultati prodotti dal prof. Alfio Quarteroni, matematico italiano, e dai suoi collaboratori, che hanno consentito di determinare l'imbarcazione migliore mediante modelli matematici con cui sono stati studiati i fenomeni cui la barca sarebbe stata sottoposta nelle regate: dal campo di pressioni operate dall'acqua sullo scafo, alle linee di corrente intorno alla barca, alle scie di turbolenza generate dalle vele. [4]

²Interessanti considerazioni sull'utilizzo di CAS nella ricerca in Matematica, ad opera del prof. G. Barozzi, si possono leggere in [1]

³Le relazioni presentate in questo convegno danno una immediata verifica di questa asserzione.

Ovviamente i risultati sono tanto più interessanti e significativi quanto più il modello è *realistico*. Al raggiungimento di questo obiettivo contribuiscono strumenti informatici e matematici sempre più sofisticati.⁴

2.2.2 Utilizzo di Tecnologie Informatiche per fare simulazioni.

L'utilizzo di simulazioni nelle scienze applicate è fondamentale per poter ipotizzare comportamenti di fenomeni. Gli esempi potrebbero essere infiniti. Si pensi all'importanza dell'uso dei simulatori di volo per l'addestramento dei piloti; alle simulazioni di fenomeni fisici, chimici o biologici, per lo studio in situazioni limite; alle simulazioni di fenomeni finanziari ed economici. Anche in questo caso i risultati ottenuti con la simulazione saranno di effettiva utilità quanto più rispetteranno l'andamento reale e l'utilizzo di Tecnologie Informatiche permette di moltiplicare il numero delle prove, di usare scale dei tempi e delle misure realistiche, di analizzare situazioni estreme.⁵

2.2.3 Utilizzo di Tecnologie Informatiche per costruire ambienti di realtà virtuale.

L'interesse per questo campo di applicazione aumenta di giorno in giorno. Dagli ambienti di progettazione e design industriale si sta allargando a quelli dello spettacolo, della cultura, dell'educazione, senza dimenticare quello dei giochi. Potrebbe essere molto efficace mostrare ai nostri ragazzi quanta matematica c'è dietro un video gioco che li appassiona! D'altra parte queste applicazioni si sono potute sviluppare grazie alla rapida evoluzione delle tecnologie.⁶

3 Conclusioni

In conclusione si può affermare che la ricerca in Matematica e le Tecnologie Informatiche sono legate in un circolo *virtuoso*: la prima **fa uso** delle Tecnologie Informatiche, sia nell'attività di ricerca di base, per la generazione e dimostrazione di nuove congetture, sia nella ricerca applicata, per lo studio e la validazione di modelli e simulazioni.

Le seconde, d'altra parte, **offrono forti stimoli** alla ricerca in Matematica, mettendo a disposizione capacità sempre crescenti di calcolo veloce, di trattamento di grandi quantità di dati, di visualizzazione statica e dinamica di immagini.

⁴Un interessante relazione *Sui modelli matematici del mondo reale* si può trovare in [3]

⁵Numerosi esempi sono forniti nella presentazione fatta dal prof. A. Quarteroni alla Picone Lecture 2002. [10]

⁶Interessanti relazioni su questo tema si possono trovare nel numero di primavera 1999 della rivista Telema-Online, dedicato a: *Finzione e realtà del mondo virtuale*. [9]

Nel caratterizzare il ruolo delle Tecnologie Informatiche nella ricerca in Matematica non si è volutamente accennato all'importanza che esse hanno nella diffusione dei risultati e nel reperimento di documentazione. La loro presenza sta producendo dei cambiamenti epocali nel settore dell'editoria scientifica: dalla diffusione delle riviste elettroniche, che tendono ormai a sostituire la versione a stampa, alla diffusione *in linea* di preprint ed atti di convegni, che consente la propagazione in tempo reale dei più recenti risultati di ricerca.

La bibliografia qui riportata vuole anche essere un esempio di questa opportunità.

Riferimenti bibliografici

- [1] Barozzi G., *I sistemi di calcolo algebrico nella didattica e nella ricerca matematica*, Mathesis, Sezione di Catania, 1998, (http://www.unict.it/mathesis/conferenze_1998/sistem~1.htm)
- [2] Bernardo A., *Cronologia matematica*, http://www.matematicamente.it/storia/cronologia_matematica.html e riferimenti ivi citati.
- [3] D'angio L., *Sui modelli matematici del mondo reale*, Colloquium Mathematicae, Università degli Studi di Cagliari, 1999, (<http://riemann.unica.it/attivita/colloquium/dangio/index.html>)
- [4] <http://ima.epfl.ch/cmcs/NewResearch/americascup.php3>
- [5] <http://kidslink.bo.cnr.it/cabri/probmat/index.htm>
- [6] <http://kidslink.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/index.htm>
- [7] <http://olimpiadi.ing.unipi.it/index.php>
- [8] http://www.claymath.org/Millennium_Prize_Problems/
- [9] <http://www.fub.it/telema/Numeri.html>
- [10] Quarteroni A., *Modelli e simulazioni: problemi, risultati, sfide*, Picone Lecture 2002, Università di Roma "La Sapienza", 2002 (<http://www.iac.rm.cnr.it/newnewiac/events/piconelectures.htm>)