

La matematica nella modellistica elettromagnetica: alcuni esempi

Angelo Freni, Alessandro Mori, Mario Calamia

Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze

Sommario

In questo lavoro sono illustrati alcuni metodi per l'analisi elettromagnetica di strutture la cui dimensione risulta grande in termini di lunghezza d'onda, con lo scopo di evidenziare il loro collegamento con il mondo della matematica.

Pur non riportando una casistica esaustiva dei metodi di analisi attualmente impiegati nel campo dell'elettromagnetismo, gli esempi scelti indicano come una accurata formulazione matematica possa ampliare la classe dei problemi analizzabili con una specifica tecnica.

1 Introduzione

Nel campo della modellistica elettromagnetica la matematica ha influenzato, e tuttora influenza, la classe dei problemi analizzabili.

In particolare specifiche formulazioni matematiche possono permettere di ampliare la classe di problemi risolvibili con una specifica tecnica di analisi elettromagnetica. A tale proposito sono qui brevemente riportati due esempi: il metodo denominato Fast Multipole Method (FMM) [1] ed il Banded Matrix Iterative Approach/Adaptive Integral Method (BMIA/AIM) [2].

Entrambi i metodi permettono l'estensione del classico metodo dei momenti (MoM) [3],[4] allo studio di strutture la cui dimensione risulta grande rispetto alla lunghezza d'onda in gioco. Mentre il primo è particolarmente adatto per l'analisi della reirradiazione di oggetti metallici di forma arbitraria, il secondo permette la caratterizzazione elettromagnetica di array planari di grandi dimensioni.

L'applicazione del metodo dei momenti alla soluzione di complessi problemi elettromagnetici è infatti spesso limitata dalle risorse computazionali disponibili per la soluzione del sistema lineare $\mathbf{ZI} = \mathbf{V}$ a cui è riconducibile il problema elettromagnetico.

L'utilizzo per la soluzione del sistema lineare di metodi iterativi o semi-iterativi, quali ad esempio il metodo del gradiente coniugato, comporta una minore allocazione di memoria dinamica rispetto ai metodi diretti assicurando contestualmente tempi di calcolo generalmente inferiori.

Un ulteriore miglioramento dell'efficienza di calcolo, con conseguente possibilità di risolvere problemi elettromagnetici di dimensioni maggiori, risulta nell'impiego di tecniche che permettono di accelerare il calcolo della

soluzione del sistema lineare $\mathbf{ZI} = V$ tramite una riduzione del numero dei prodotti che è necessario eseguire ad ogni passo del metodo iterativo scelto.

2 Fast Multipole Method (FMM)

Si consideri il problema elettromagnetico schema-tizzato in Figura 1, in cui una generica sorgente illumina un oggetto metallico di superficie S .

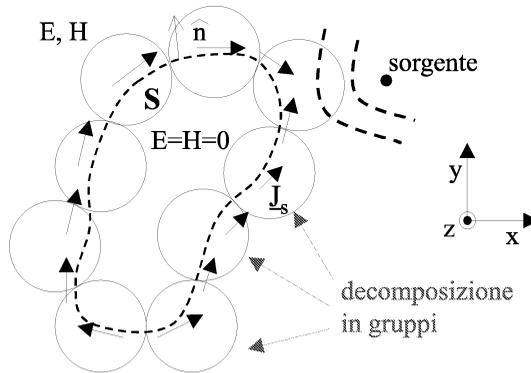


Figura 1: Oggetto metallico di superficie S illuminato da una sorgente arbitraria e sua scomposizione in gruppi.

Una equazione integrodifferenziale per il campo elettrico (EFIE) può essere costruita imponendo che il campo elettrico totale tangente alla superficie dell'oggetto si annulli, cioè

$$\hat{n} \times \vec{E}^i + \hat{n} \times \vec{E}^s \Big|_S = 0 \quad (1)$$

dove \vec{E}^i rappresenta il campo incidente mentre \vec{E}^s quello reirradiato dall'oggetto. Applicando la formulazione EFIE il problema si riconduce alla determinazione di un insieme di correnti incognite \vec{J}_S poste sulla superficie S , tali che sia soddisfatta la relazione

$$\hat{n} \times \left(-j\omega \vec{A} - \nabla \phi \right) \Big|_S = -\hat{n} \times \vec{E}^i \Big|_S \quad (2)$$

dove \hat{n} è il vettore normale alla superficie S e

$$\vec{A} = \mu \iint_S \vec{J}_S(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3)$$

$$\phi = \frac{j}{\omega\epsilon} \iint_S \nabla \cdot \vec{J}_S(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' \quad (4)$$

La funzione $G(\vec{r} - \vec{r}')$ è la funzione di Green relativa al mezzo considerato. Approssimando le correnti superficiali incognite come sovrapposizione di N funzioni di base $\vec{J}_S(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N I_n \vec{f}_n(\vec{r})$ e applicando il metodo dei residui pesati [3] si perviene a un sistema lineare $\mathbf{Z}\mathbf{I} = \mathbf{V}$ dove, indicando con $\vec{g}_m(\vec{r})$ le funzioni di peso, il generico elemento z_{mn} della matrice \mathbf{Z} risulta

$$z_{mn} = -j\omega\mu \iint_{S_m} \vec{g}_m(\vec{r}_m) \cdot \iint_{S_n} \left[\vec{f}_n(\vec{r}_n) + \frac{\nabla\nabla \cdot \vec{f}_n(\vec{r}_n)}{k_0^2} \right] G(\vec{r}_m - \vec{r}_n) dS_n dS_m \quad (5)$$

mentre il generico elemento v_m del vettore delle eccitazioni \mathbf{V}

$$v_m = \iint_{S_m} \vec{E}^i(\vec{r}_m) \cdot \vec{f}_m(\vec{r}_m) dS_m \quad (6)$$

dove con S_m e S_n si è indicato il dominio in cui è definita rispettivamente la n -esima funzione di base e la m -esima funzione di peso.

Per la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Z}\mathbf{I} = \mathbf{V}$ è possibile utilizzare o un metodo diretto che fornisce una fattorizzazione della matrice delle impedenze \mathbf{Z} , da cui viene poi calcolata la soluzione (eventualmente con un affinamento della stessa tramite tecniche iterative), o risolvere direttamente il sistema lineare utilizzando un metodo iterativo, o semi-iterativo come il metodo del gradiente coniugato.

In questo ultimo caso è essenziale velocizzare il prodotto matrice-vettore che è necessario eseguire ad ogni passo del metodo iterativo, obiettivo che persegue il FMM.

A differenza del Metodo dei Momenti classico (MoM) il Fast Multipole Method (FMM) [3] prevede un passo aggiuntivo nella formulazione che consiste nella suddivisione della struttura in un numero L di gruppi, così come schematizzato in Figura 1, contenenti ciascuno M_i funzioni di base $i = 1, 2, \dots, L$. La matrice \mathbf{Z} del MoM viene quindi riscritta come

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^S + \mathbf{Z}^W \quad (7)$$

dove \mathbf{Z}^S è una matrice sparsa che tiene conto dell'interazione sia tra le funzioni di base appartenenti a gruppi adiacenti che tra funzioni di base interne allo stesso gruppo.

La matrice \mathbf{Z}^W tiene invece conto dell'interazione tra le funzioni di base appartenenti a gruppi lontani.

Utilizzando il Teorema di Addizione di Bessel e la scomposizione in onde piane, la matrice d'interazione debole a sua volta scomposta nel prodotto di tre matrici sparse

$$\mathbf{Z}^W = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{B} \quad (8)$$

le quali rappresentano: \mathbf{A} l'interazione delle funzioni di peso con il centro del gruppo a cui appartengono, \mathbf{T} l'interazione fra gruppi lontani, \mathbf{B} l'interazione delle funzioni di base con il centro del gruppo a cui appartengono. In Figura 2 si riporta la configurazione di tali matrici nel caso di un problema bidimensionale (per un generico problema tridimensionale le matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} risultano comunque sparse e, previa opportuna numerazione delle funzioni di base, possono assumere una forma analoga). Per semplicità di esposizione considereremo di seguito la formulazione del Fast Multipole Method nel caso di un problema bidimensionale. L'estensione al caso tridimensionale risulta matematicamente più complessa ma concettualmente analoga.

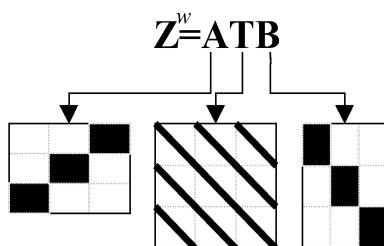


Figura 2: Scomposizione della matrice \mathbf{Z}^W .

In un caso bidimensionale la funzione di Green dello spazio libero risulta

$$G(\vec{r} - \vec{r}^j) = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_0 |\vec{r} - \vec{r}^j|) \quad (9)$$

da cui, indicando con \vec{r}_n la posizione dell' n -esima funzione di base, con \vec{r}_m quella dell' m -esima funzione di peso e operando la suddivisione in gruppi così come schematizzato in Figura 3, si ottiene

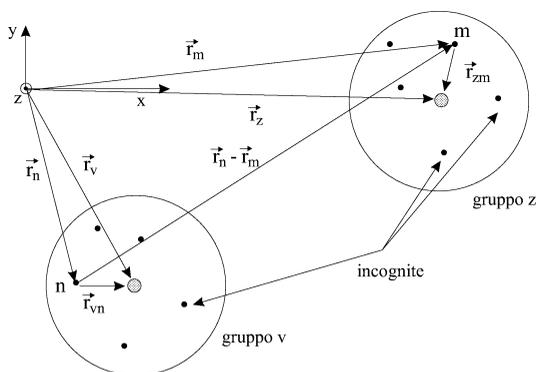


Figura 3: Distanza tra una generica funzione di base e di peso espressa in termini della distanza tra i gruppi a cui appartengono.

$$G(\vec{r}_m - \vec{r}_n) = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_0 |\vec{R} - \vec{d}|) \quad (10)$$

dove

$$\begin{aligned} \vec{r}_m - \vec{r}_n &= (\vec{r}_z - \vec{r}_{zm}) - (\vec{r}_v - \vec{r}_{vn}) = (\vec{r}_z - \vec{r}_v) + (\vec{r}_{vn} - \vec{r}_{zm}) \\ \vec{R} &= (\vec{r}_z - \vec{r}_v) = \vec{r}_{zv} \\ \vec{d} &= \vec{r}_{vn} - \vec{r}_{zm} \end{aligned} \quad (11)$$

Il vettore \vec{r}_{zv} rappresenta la distanza tra il gruppo z a cui appartiene l' m -esima funzione di peso e il gruppo v a cui appartiene l' n -esima funzione di base. Applicando il Teorema di Addizione di Bessel si perviene alla seguente espressione:

$$G(\vec{r}_m - \vec{r}_n) = -\frac{j}{4} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(k_0 |\vec{d}|) H_p^{(2)}(k_0 |\vec{R}|) e^{jS(\phi_R - \phi_d)} \quad (12)$$

dove

$$\phi_R = \arccos(\vec{R} \cdot \hat{i}_x) \quad \phi_d = \arccos(\vec{d} \cdot \hat{i}_x) \quad (13)$$

con la condizione di applicabilità $|\vec{R}| > |\vec{d}|$. Si noti come tale condizione, che definisce le regioni spaziali in cui è applicabile il Teorema di Addizione di Bessel, determina se due gruppi sono da considerarsi adiacenti o meno.

Esprimiamo adesso le funzioni di Bessel di prima specie J_p nella loro forma integrale

$$J_p(k_0 |\vec{d}|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\vec{k} \cdot \vec{d}} e^{-jp(\phi - \phi_d + \frac{\pi}{2})} d\phi \quad (14)$$

dove

$$\vec{k} = k_0 (\cos \phi \hat{i}_x + \sin \phi \hat{i}_y) \quad (15)$$

può essere interpretata come la generica direzione di propagazione di un'onda piana. Sostituendo quest'ultima relazione nella (12) la funzione di Green può essere quindi espressa nella forma:

$$G(\vec{r}_m - \vec{r}_n) = -\frac{j}{8\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\vec{k} \cdot \vec{d}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} H_p^{(2)}(k_0 |\vec{R}|) e^{-jS(\phi - \phi_R)} d\phi \quad (16)$$

Essendo la serie di funzioni di Hankel una serie convergente è possibile considerare i soli primi P termini della sommatoria. Definendo la funzione

$$T_P(\vec{k}_q, \vec{r}_{zv}) = \sum_{p=-P/2}^{P/2} H_p^{(2)}(k_0 |\vec{r}_{zv}|) e^{-jp(\phi_q - \phi_{r_{zv}})} \Delta_{\phi_q} \quad (17)$$

dove il parametro Δ_{ϕ_q} è legato alla discretizzazione dell'integrale in Q direzioni scelte per approssimare l'integrale che appare nella (16), si ottiene:

$$G(\vec{r}_m - \vec{r}_n) = -\frac{j}{8\pi} \sum_q^Q e^{-j\vec{k}_q \cdot \vec{r}_{vn}} T_P(\vec{k}_q, \vec{r}_{zv}) e^{-j\vec{k}_q \cdot \vec{r}_{zm}}. \quad (18)$$

La funzione di Green scritta in questa forma presenta il termine T_p che descrive l'interazione tra i gruppi $z;v$ (a cui appartengono rispettivamente la funzione di peso e di base) più due termini che legano le funzioni di base e peso al centro dei rispettivi gruppi di appartenenza. In questo modo la mutua interazione è stata scomposta in tre distinti termini. Inserendo la (1.18) nella (1.5) il termine di accoppiamento z_{mn} può essere scritto tramite il prodotto di tre termini che rappresentano elementi appartenenti alle matrici \mathbf{A} , \mathbf{T} , \mathbf{B} . Si noti che, procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il caso bidimensionale, è possibile ottenere una uguale forma del termine di accoppiamento anche per un problema tridimensionale.

Per la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Z}\mathbf{I} = \mathbf{V}$ attraverso un metodo iterativo o semi-iterativo, è necessario valutare ad ogni passo il prodotto $\mathbf{Z}\mathbf{I}$. Il costo computazionale è dovuto essenzialmente al numero di moltiplicazioni necessarie in quanto l'onere numerico dovuto alle somme è notevolmente inferiore.

Nel caso del Fast Multipole Method l'onere computazionale è composto dai seguenti termini:

$$C = C_{Zs} + C_{Zw} \quad (19)$$

dove C_{Zs} e C_{Zw} rappresentano il numero di moltiplicazioni necessarie rispettivamente per il prodotto $\mathbf{Z}^S \mathbf{I}$ e $\mathbf{Z}^W \mathbf{I}$.

Supponendo che i gruppi abbiano approssimativamente stessa dimensione e che ogni gruppo contenga circa lo stesso numero $M = N/L$ di funzioni di base (N numero totale di funzioni di base), per $\mathbf{Z}^S \mathbf{I}$ il numero di moltiplicazioni risulta $C_{Zs} \propto LM^2$. Se si considera il prodotto $\mathbf{Z}^W \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{I}$, quest'ultimo produce un numero di moltiplicazioni pari a

$$C_{Zw} \propto (LQM) + (L^2Q) + (LQM) \quad (20)$$

dove Q è il numero di onde piane/sferiche necessarie allo sviluppo della funzione di Green. Prendendo $M \propto \sqrt{N}$ e $Q \propto M$ si minimizza l'onere computazionale necessario al calcolo delle interazioni tra le funzioni di base. La complessità globale per il FMM risulta $C \propto N^{3/2}$, contro le N^2 operazioni del MoM standard. Analoga relazione vale per la memoria dinamica richiesta dai due metodi.

Si noti che, in strutture aventi grandi dimensioni in termini di lunghezza d'onda, i tempi per il calcolo del prodotto $\mathbf{Z}\mathbf{I}$ sono sicuramente quelli preponderanti nel calcolo della soluzione.

Struttura	Incognite	CPU time (min) Fmm/MoM	RAM (Mb) Fmm/MoM
cilindro (a)	5544	36/148	97/253
cilindro (b)	6984	54/160	130/372
cilindro (c)	7992	57/168	151/487
piastra	7300	16/105	66/429

Tabella I: Raffronto prestazioni FMM/MoM - cilindro di diametro d e altezza h : caso (a) $d = 0.83\lambda$, $h = 8.3\lambda$; caso (b) $d = 0.71\lambda$, $h = 9.16\lambda$; caso (c) $d = 0.71\lambda$, $h = 10.6\lambda$; lastra $5 \times 5\lambda$. Incidenza ortogonale onda piana. I tempi di calcolo sono relativi a un PC Pentium III 700MHz.

In **Tabella I** si riportano i tempi di calcolo e l'occupazione di memoria ottenuti per alcune strutture di test al codice FMM implementato e ad un MoM classico di riferimento. In particolare l'ottimo rapporto tra i tempi di calcolo del FMM e del MoM nel caso della lastra metallica (prossimo a quello teorico) è da ricercarsi nel fatto che in questo caso è stato possibile eseguire una suddivisione in gruppi ottima.

3 Banded Matrix Iterative Approach/Adaptive Integral Method (BMIA/AIM)

Nel caso in cui la struttura in esame risulti essere una struttura quasi planare, come ad esempio un array di patch o un dipolo radiante su una superficie artificiale (Figura 4), è ancora conveniente scrivere la matrice delle impedenze come somma di due matrici $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^S + \mathbf{Z}^W$. Tuttavia, invece di suddividere preventivamente la struttura in gruppi, così come nel FMM, si introduce una distanza di vicinanza r_d che per ogni funzione di base individua una regione di interazione forte, in cui la distanza planare $d_{xy} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ tra la funzione di base e quella di peso risulta $d_{xy} < r_d$, ed una di interazione debole a quest'ultima complementare. La prima regione, da origine alla matrice di interazione forte \mathbf{Z}^S , che risulta una matrice sparsa, la seconda origina invece la matrice di interazione debole \mathbf{Z}^W . Nella regione di interazione debole ($d_{xy} < r_d$) è possibile approssimare la funzione di Green nella forma

$$G(d_{xy}, z, z') = \sum_{m=0}^M A_m(d_{xy}) R_m(z) Q_m(z') \tag{21}$$

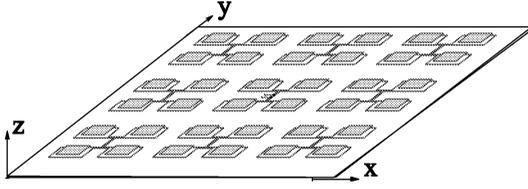


Figura 4: Esempio di un'antenna planare costituita da un array di patch.

Tale forma può ad esempio essere raggiunta sviluppando la funzione di Green in serie di Taylor rispetto all'altezza della struttura $h = z - z'$. Altre approssimazioni possono essere tuttavia utilizzate [5].

Applicando il classico metodo dei momenti nella formulazione di Galerkin ogni elemento della matrice di interazione debole \mathbf{Z}^W può essere espresso come combinazione lineare di quattro termini della forma

$$Z_{ij}^\alpha = \sum_{m=0}^M \iint_{S'} R_m(z) \psi_i^\alpha(x, y, z) \cdot \iint_{S'} A_m(x - x', y - y') Q_m(z') \psi_j^\alpha(x', y', z') dS' dS \quad (22)$$

dove $\alpha = x, y, z, \phi$ e ψ_i^α è la generica funzione di base o di peso. È ora conveniente sostituire il prodotto $Q_m(z') \psi_j^\alpha(x', y', z')$ così come $R_m(z) \psi_i^\alpha(x, y, z)$ con un opportuno insieme di sorgenti equivalenti puntiformi distribuite su un grigliato cartesiano regolare. Entrambi i prodotti sono quindi approssimati dalla seguente combinazione lineare di funzioni delta di Dirac

$$P_m(z) \psi_n^\alpha(x, y, z) = \sum_{i=0}^L \Lambda_{n,i}^{\alpha,m} \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \delta(z - z_i) \quad (23)$$

con $P_m(z) = R_m(z)$ o $P_m(z) = Q_m(z)$ e $(x_i, y_i) \in C_n$, dove C_n rappresenta l'insieme degli $L + 1$ nodi della griglia cartesiana più vicini al centro della funzione di base e di peso. Al fine di verificare l'equivalenza i coefficienti $\Lambda_{n,i}^{\alpha,m}$ soddisfano la relazione

$$\iint_S P_m(z) \psi_n^\alpha(x, y, z) (x - x_c)^{m_1} (y - y_c)^{m_2} dS = \sum_{i=0}^L \Lambda_{n,i}^{\alpha,m} (x_i - x_c)^{m_1} (y_i - y_c)^{m_2} \quad (24)$$

dove $0 \leq m_1, m_2 \leq L$. Inserendo quindi l'eq. (1.23) nella (1.22) è possibile scrivere il prodotto tra la matrice di interazione debole e il vettore delle correnti incognite nella seguente forma

$$\mathbf{Z}^W \mathbf{I} = \sum_{m=0}^M \sum_{\alpha=x,y,z,\phi} \mathbf{H}_\alpha^T \Lambda_{\alpha,m}^R \mathbf{A}_m \Lambda_{\alpha,m}^Q \mathbf{H}_\alpha \mathbf{I} \quad (25)$$

dove $\mathbf{A}_m = \{A_m(x_i - x_j, y_i - y_j)\}$, \mathbf{H}_α pone in relazione le funzioni di base (peso) con il vettore delle incognite $I = \{I_n\}$ e $\Lambda_{\alpha,m}^{RQ} = \{\Lambda_{n,i}^{\alpha,m}\}$. In particolare la matrice \mathbf{A}_m è una matrice di Toeplitz a blocchi mentre le matrici \mathbf{H}_α e $\Lambda_{\alpha,m}^{RQ}$ sono matrici sparse con solo alcuni elementi diversi da zero per ogni riga. Si noti che la matrice di interazione forte \mathbf{Z}^W richiederebbe la memorizzazione di $O(N^2)$ elementi mentre utilizzando la rappresentazione (1.25) si rende necessaria la sola memorizzazione di $O(4N_g)$ elementi per la matrice \mathbf{A}_m e di $O(4(L+1)2N)$ elementi per le altre matrici, dove con N_g si è indicato il numero di nodi della griglia cartesiana. Inoltre, nel caso in cui per risolvere il sistema lineare si utilizzi il metodo del gradiente coniugato, è possibile eseguire il prodotto $\mathbf{Z}^W I$ operando prima il prodotto $p_1 = \Lambda_{\alpha,m}^Q \mathbf{H}_\alpha I$ (pre-moltiplicazione) e poi il prodotto $p_2 = \mathbf{A}_m p_1$ facendo uso della Fast Fourier Transform bidimensionale (2D-FFT) e della sua funzione inversa in quanto la matrice \mathbf{A}_m è una matrice di Toeplitz. Infine è possibile operare il prodotto $\mathbf{H}_\alpha^T \Lambda_{\alpha,m}^R p_2$ (post-moltiplicazione). Questo schema permette di ridurre la complessità da $O(N^2)$ a $O(16N_g(M+1)[2\log_2(4N_g)+1])$, dove generalmente $N_g < N$.

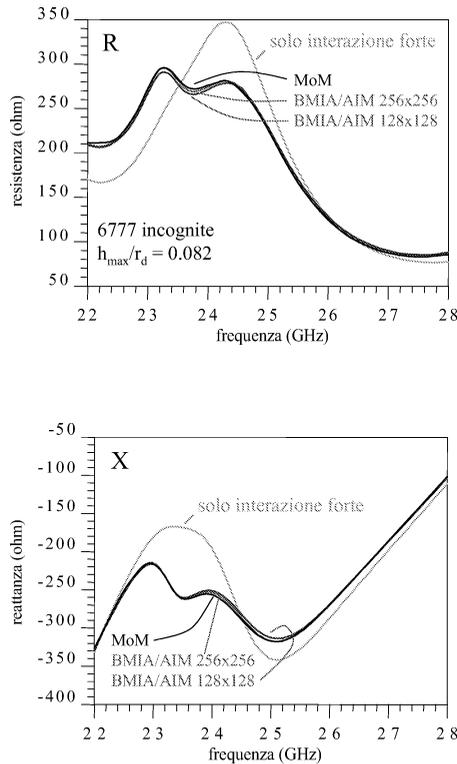


Figura 5: Impedenza d'ingresso misurata in corrispondenza dell'elemento centrale dell'array schematizzato in Figura 4.

In Figura 5 si riporta l'andamento in frequenza dell'impedenza d'ingresso dell'elemento centrale dell' array schematizzato in Figura 4. Nella stessa figura, al fine di evidenziare l'importanza di una corretta rappresentazione del contributo della regione di interazione debole, si riporta anche l'impedenza che sarebbe stata valutata nel caso in cui si fosse fatto uso della sola matrice di interazione forte.

In Figura 6 si riportano i tempi di calcolo necessari per la caratterizzazione elettromagnetica di array di diverse dimensioni del tipo di quello schematizzato in Figura 4.

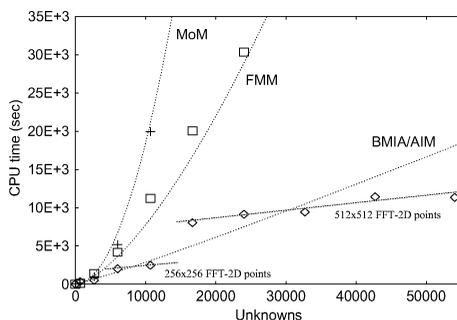


Figura 6: Tempi di calcolo necessari per la caratterizzazione di array del tipo di quello schematizzato in Figura 4.

4 Conclusioni

I due esempi appena esposti evidenziano come sia possibile, applicando una raffinata formulazione matematica a modelli numerici di per se semplici, analizzare strutture grandi dal punto di vista elettromagnetico senza ricorrere a costosi elaboratori numerici. Anche se i recenti progressi tecnologici consentiranno di disporre a breve di calcolatori a basso costo sempre più veloci, una adeguata formulazione matematica permetterà comunque lo studio di configurazioni ancor più complesse assicurando nello stesso tempo l'affidabilità delle soluzioni ottenute.

Riferimenti bibliografici

- [1] R. Coifman, V. Rohklin, S. Wandzura: "The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription" *IEEE Antennas and Propagat.*, AP-35, 1993, pp. 7-12.

- [2] P. De Vita, A. Mori, A. Freni: "A BMIA/AIM formulation for the analysis of large stacked patch antennas" *MMET'02*, Kiev, Ukraine, 10-13 Sept. 2002.
- [3] R.F. Harrington: "Field Computation by Moment Method" *IEEE PRESS Series on Electromagnetic Waves*, 1992.
- [4] S.M. Rao, D.R. Wilton and A.W. Glisson "Electromagnetic scattering by Surfaces of Arbitrary Shape" *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, AP-30, 1982, pp. 409-417.
- [5] A. Mori, F. De Vita, A. Freni: "Comparison between different types of Green's function factorization for the BMIA/AIM method", *ICECOM'03*, vol. 1, 2003.