

Convegno Nazionale  
**Matematica senza Frontiere**  
Lecce, 5-8 marzo 2003

## Un modello variazionale per la segmentazione di immagini

Antonio Farina<sup>1</sup>

Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi" - Università di Lecce  
antonio.farina@unile.it

### 1 Introduzione

Tra i problemi del Calcolo delle Variazioni che hanno tra le incognite un'ipersuperficie  $K$  di  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), uno tipico è stato proposto, nell'ambito della Visione Computerizzata, da Mumford & Shah nella seconda metà degli anni ottanta ([MS1] e [MS2]) come approccio variazionale al problema della segmentazione di immagini. Si tratta di un modello continuo e deterministico ed è un'estrapolazione continua di precedenti formulazioni discrete date indipendentemente da Geman & Geman (1984) in [GG] e da Blake & Zisserman (1987) in [BZ].

Il problema della segmentazione di immagini consiste, assegnata un'immagine  $g$ , nel dividere l'immagine in regioni in cui alcune proprietà della stessa sono relativamente uniformi (la proprietà che qui consideriamo è l'intensità dei livelli di grigio di ogni pixel). L'approccio variazionale al problema della segmentazione di immagini richiede la minimizzazione del funzionale

$$\mathcal{MS}(K, u) := \iint_{\Omega \setminus K} (|Du(x, y)|^2 + \mu |u(x, y) - g(x, y)|^2) d\mathcal{L}^n + \alpha \mathcal{H}^{n-1}(K \cap \Omega).$$

Nel caso  $n = 2$ ,  $g$  rappresenta appunto l'immagine di un gruppo di oggetti e  $\Omega$  lo schermo su cui tale immagine appare. Minimizzando il funzionale  $\mathcal{MS}$  cerchiamo di eliminare il rumore presente in un'immagine per un miglioramento della qualità della stessa, distinguendo nello stesso tempo le discontinuità di  $g$  dovute agli spigoli o alle ombre (discontinuità che si vogliono evidenziare) dalle discontinuità dovute al rumore di fondo o alle piccole irregolarità (discontinuità che si vogliono eliminare).

La segmentazione di immagini è interessante perché la percezione visiva ha luogo "sostanzialmente" in base ai contorni (degli oggetti), che forniscono molte informazioni rilevanti sull'immagine stessa: infatti essi individuano dove sono gli oggetti, la loro forma e grandezza.

---

<sup>1</sup>In questa nota ho riportato alcuni risultati ottenuti in collaborazione con M. Carriero e I. Sgura. I risultati in forma completa sono esposti in [CFS].

Il lavoro si articola nei seguenti punti: nella seconda sezione introduciamo il funzionale di Mumford & Shah e descriviamo le idee essenziali presenti nella dimostrazione del teorema di esistenza del minimo del funzionale stesso; nella terza sezione ci interessiamo al problema di trovare metodi numerici opportuni per la determinazione di una coppia minimizzante; poiché il trattamento numerico del funzionale  $\mathcal{MS}$  è difficile a causa della presenza del termine di misura in questa sezione esponiamo l'approssimazione del funzionale  $\mathcal{MS}$  con una successione di funzionali quadratici ellittici definiti in spazi di Sobolev (cfr [AT]). L'approssimazione variazionale è nel senso della  $\Gamma$ -convergenza di De Giorgi [DGF]. Nell'ultima sezione infine descriviamo l'algoritmo numerico utilizzato per risolvere il problema di minimo e presentiamo alcuni esperimenti numerici su immagini digitali, sintetiche o reali.

## 2 Il modello variazionale di Mumford & Shah per la segmentazione di immagini

Un'immagine digitale in bianco e nero, corrisponde ai livelli di grigio discreti e costanti a tratti (a causa della digitalizzazione) della proiezione nel piano di una scena reale tridimensionale vista da una telecamera. Sostanzialmente un'immagine digitale monocromatica si può rappresentare mediante una matrice di numeri interi compresi tra 0 e 255 (o di numeri compresi tra 0 e 1 nel caso in cui i livelli di grigio vengano normalizzati). Ogni numero di questa matrice rappresenta il livello di grigio del pixel corrispondente; il valore 0 è associato ad un pixel nero, mentre il valore 255 (o 1 per immagini normalizzate) è associato al pixel bianco. Più grande è il numero dei pixel, e quindi la dimensione della matrice, più elevata è la definizione dell'immagine, e quindi la qualità della stessa.

Segmentare un'immagine vuol dire regolarizzare l'immagine stessa, ossia eliminare il rumore, e simultaneamente determinare i bordi degli oggetti presenti nell'immagine stessa.

La segmentazione di immagini è ritenuta il primo livello nella *elaborazione delle le immagini*, a cui seguono livelli di elaborazioni superiori, quali ad esempio il riconoscimento della profondità degli oggetti a partire dai bordi degli stessi. Tecniche di elaborazione delle immagini sono necessarie in diversi campi, tra i quali l'analisi di immagini mediche, radar e satellitari, la cartografia e la catalogazione di impronte digitali.

Come detto in precedenza, nella versione discreta un'immagine si può rappresentare come una matrice di numeri. Che cosa è invece un'immagine monocromatica nella versione continua?

Nella versione continua un'immagine è una funzione assegnata  $g : \Omega \rightarrow [0, 1]$  misurabile, definita su un aperto limitato  $\Omega$  del piano, dove, per ogni  $x \in \Omega$ ,  $g(x)$  rappresenta l'intensità nei livelli di grigio dell'immagine nel punto  $x$ .

Nel “cartoon model” per la segmentazione di immagini proposto da Mumford & Shah, assegnata  $g : \Omega \rightarrow [0, 1]$  misurabile, si richiede di minimizzare il funzionale (energia del primo ordine)

$$\begin{aligned}
 (K, u) \mapsto \mathcal{MS}(K, u) := & \iint_{\Omega \setminus K} |Du(x, y)|^2 dx dy & (1) \\
 & + \mu \iint_{\Omega \setminus K} |u(x, y) - g(x, y)|^2 dx dy \\
 & + \alpha \mathcal{H}^1(K \cap \Omega)
 \end{aligned}$$

nell’insieme  $\mathcal{A}$  delle *coppie ammissibili*  $(K, u)$  con  $K \subset \mathbb{R}^2$  insieme chiuso e  $u$  funzione continua insieme alle sue derivate prime in  $\Omega \setminus K$ : l’insieme  $K$  è l’insieme delle discontinuità “brusche” della  $g$ , ossia l’insieme dei bordi degli oggetti presenti nell’immagine di partenza, mentre la  $u$  rappresenta la regolarizzata a tratti della  $g$ , ossia l’immagine priva di rumore. In (1)  $\mu$  e  $\alpha$  sono numeri reali positivi (rispettivamente parametro di scala e di contrasto legati alla precisione dell’approssimazione che si vuole ottenere);  $\mathcal{H}^1(K \cap \Omega)$  rappresenta la misura 1-dimensionale di Hausdorff in  $\mathbb{R}^2$  dell’insieme  $K \cap \Omega$ .

Il funzionale  $\mathcal{MS}$  penalizza grandi insiemi  $K$  e, fuori di  $K$ , impone ad  $u$  di essere “vicina” a  $g$  e sufficientemente regolare. In particolare, il primo termine forza  $u$  ad essere il più regolare possibile in un sottoinsieme di  $\Omega$  che deve essere quanto più grande possibile; il secondo termine impone una penalizzazione (in norma  $L^2(\Omega)$ ) per la deviazione di  $u$  da  $g$ ; il terzo addendo previene l’insieme  $K$  dall’essere troppo grande.

Il problema di minimo per il funzionale  $\mathcal{MS}$  può essere formulato in questo modo:

$$\min_{(K, u) \in \mathcal{A}} \mathcal{MS}(K, u). \tag{2}$$

Per provare l’esistenza di almeno una coppia minimizzante per  $\mathcal{MS}$  nella classe di coppie ammissibili  $\mathcal{A}$  non si possono applicare i metodi diretti del Calcolo delle Variazioni, basati sul noto teorema di Weierstrass-Tonelli. Per questo motivo De Giorgi ha introdotto, per minimizzare  $\mathcal{MS}$ , un nuovo spazio di funzioni detto spazio delle *funzioni speciali a variazione limitata in  $\Omega$* , indicato con  $SBV(\Omega)$ . In questo spazio si può dare una formulazione debole del problema di minimo, definendo per ogni  $v \in SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  il nuovo funzionale

$$\begin{aligned}
 \overline{\mathcal{MS}}(v) := & \iint_{\Omega \setminus S(v)} |\nabla v(x, y)|^2 dx dy & (3) \\
 & + \mu \iint_{\Omega \setminus S(v)} |v(x, y) - g(x, y)|^2 dx dy \\
 & + \alpha \mathcal{H}^1(S(v)).
 \end{aligned}$$

che dipende solo da  $v$ , perché l’insieme di discontinuità  $K$  è legato all’insieme di salto  $S(v)$  di  $v$  (vedi [DGCL]).

Il problema di minimo per il funzionale (1), nella formulazione debole (3), diventa allora

$$\min_{v \in SBV(\Omega)} \overline{\mathcal{M}\mathcal{S}}(v). \quad (4)$$

Una volta definito la forma debole del funzionale, si prova innanzitutto l'esistenza di una soluzione debole e poi si studia la regolarità di tale soluzione.

L'esistenza di una soluzione debole in  $SBV(\Omega)$  per il problema di minimo (4) è stata provata da Ambrosio (1988) (cfr. [A1], [A2], [A3]) sfruttando teoremi di compattezza e di semicontinuità inferiore nello spazio  $SBV(\Omega)$  rispetto alla convergenza di  $L^1(\Omega)$ .

Il passo successivo, ossia lo studio della regolarità della soluzione debole, è molto delicato. In [DGCL] (vedi anche [DMS]) De Giorgi, Carriero e Leaci, per dimostrare l'esistenza di almeno una coppia minimizzante per  $\mathcal{M}\mathcal{S}$ , hanno provato che se  $v_0 \in SBV(\Omega)$  è un minimo per  $\overline{\mathcal{M}\mathcal{S}}$  allora

$$\mathcal{H}^1(\Omega \cap \overline{S}(v_0) \setminus S(v_0)) = 0,$$

(cioè  $\overline{S}(v_0)$  e  $S(v_0)$  hanno la stessa misura di Hausdorff unidimensionale e quindi  $\overline{S}(v_0)$  non può coincidere con tutto  $\Omega$ ), e che, posto  $\tilde{v}_0 = \text{ap} \lim_{y \rightarrow x} v_0(y)$ ,  $\tilde{v}_0 \in C^1(\Omega \setminus \overline{S}(v_0))$ . Pertanto la coppia  $(\overline{S}(v_0), \tilde{v}_0)$  è ammissibile per  $\mathcal{M}\mathcal{S}$  e minimizza il funzionale di Mumford & Shah.

### 3 Approssimazione variazionale del funzionale di Mumford & Shah

Il problema di determinare numericamente i minimi del funzionale di Mumford & Shah non è semplice da risolvere anche a causa della presenza del termine di misura  $\mathcal{H}^1(K \cap \Omega)$ . Per questo motivo Ambrosio & Tortorelli hanno proposto un approccio al trattamento numerico basato sulla teoria della  $\Gamma$ -convergenza. Questa teoria, introdotta da De Giorgi e Franzoni nella seconda metà degli anni settanta ([DGF]), è stata pensata per approssimare un problema variazionale con una successione di problemi variazionali diversi. In questa nota partiamo dai risultati di Ambrosio & Tortorelli che in [AT] hanno dimostrato che è possibile approssimare il funzionale  $\mathcal{M}\mathcal{S}$  con funzionali quadratici ellittici.

Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico, si dice che una successione  $f_k : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$   $\Gamma$ -converge a  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  per  $k \rightarrow +\infty$ , se per ogni  $x \in X$  si ha:

- (i) per ogni successione  $(x_k)$  convergente a  $x$

$$f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x_k)$$

(ii) esiste una successione  $(x_k)$  convergente a  $x$  tale che

$$f(x) \geq \limsup_{k \rightarrow +\infty} f_k(x_k).$$

Proprietà basilari di questo tipo di convergenza sono: unicità, stabilità per perturbazioni continue, compattezza e, sotto ipotesi di equicoercività, **convergenza dei minimi dei funzionali approssimanti ai minimi del funzionale  $\Gamma$ -limite.**

Come dicevamo in precedenza le difficoltà principali che si incontrano nell'approssimazione del funzionale  $\mathcal{MS}$  con una successione di funzionali ellittici sono dovute al termine  $\mathcal{H}^1(S(u))$  che rappresenta la misura di un insieme non noto. Per questo motivo viene introdotta una nuova funzione variabile  $s$  che controlla l'insieme di salto  $S(u)$ . Tale funzione assume infatti valori prossimi a zero in tutti i punti interni ad un intorno tubolare di spessore  $1/k$  dell'insieme  $S(u)$  (vedi Figura 1). Per  $k \rightarrow +\infty$  tale intorno si contrae e in questo modo  $s$  fornisce una rappresentazione approssimata dei bordi degli oggetti presenti nell'immagine di partenza.

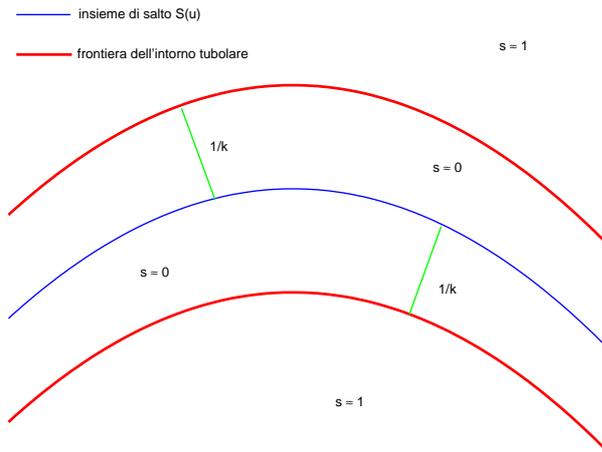


Figura 1:

Possiamo quindi definire il funzionale

$$F(s, u) = \begin{cases} \overline{\mathcal{MS}}(u) & \text{se } u \in SBV(\Omega) \text{ e } s \equiv 1 \text{ q.o. in } \Omega \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con  $\overline{\mathcal{MS}}(u)$  dato in (3). Ebbene vale il seguente teorema di approssimazione

**3.1 Teorema di approssimazione (di Ambrosio & Tortorelli).** *Assegnata  $g : \Omega \rightarrow [0, 1]$  misurabile, consideriamo per ogni  $k \in \mathbb{N}$  i funzionali:*

$$(s, u) \mapsto F_k(s, u) := \iint_{\Omega} \left( s^2(x, y) + \frac{1}{k^2} \right) |Du(x, y)|^2 dx dy \quad (5)$$

$$+ \mu \iint_{\Omega} |u(x, y) - g(x, y)|^2 dx dy$$

$$+ \alpha \iint_{\Omega} \left( \frac{1}{k} |Ds(x, y)|^2 + \frac{(s(x, y) - 1)^2}{4} k \right) dx dy$$

dove  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ,  $s \in W^{1,2}(\Omega, [0, 1])$ .

*I funzionali  $F_k(s, u)$   $\Gamma$ -convergono in  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  al funzionale  $F(s, u)$ ; la successione  $(s_k, u_k)$  di minimi di (5) è compatta in  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ; per ogni punto limite  $(1, u^*)$  risulta  $u^* \in SBV(\Omega)$  e  $u^*$  minimizza il funzionale  $\overline{MS}$ ; allora, posto  $K_0 := \overline{S}(u^*)$ , si ha  $\tilde{u}^* \in C^1(\Omega \setminus K_0)$  per cui la coppia  $(K_0, \tilde{u}^*)$  minimizza il funzionale  $MS$  di Mumford & Shah.*

## 4 Approssimazione numerica del sistema di equazioni di Eulero-Lagrange dei funzionali approssimanti

I risultati visti sull'approssimazione di  $MS(K, u)$ , nel senso della  $\Gamma$ -convergenza, sono importanti perché consentono di calcolare numericamente i suoi minimi per mezzo dei funzionali ellittici  $F_k(s, u)$  definiti in (5).

Infatti i funzionali ellittici sono più convenienti dal punto di vista numerico, poiché il sistema di equazioni di Eulero-Lagrange ad essi associato può essere risolto mediante una discretizzazione col metodo delle differenze finite.

Il sistema di equazioni di Eulero-Lagrange per il  $k$ -esimo funzionale approssimante  $F_k$  in (5) (trascurando il termine  $1/k^2$ ) è dato da:

$$(\mathbf{EL})_k \quad \begin{cases} s^2 \Delta u + 2s Du \cdot Ds = \mu(u - g) \\ \Delta s = \frac{k}{\alpha} s |Du|^2 + \frac{(s-1)}{4} k^2 \end{cases} \quad \text{nell'aperto limitato } \Omega.$$

March in [M] e Spitaleri, March e Arena in [SMA] hanno considerato un'approssimazione numerica di  $(\mathbf{EL})_k$  mediante differenze finite.

In questa nota, partendo dalle idee presenti in [M] e [SMA], intendiamo simulare la  $\Gamma$ -convergenza nel discreto. A tal fine consideriamo una successione di discretizzazioni dei problemi continui  $(\mathbf{EL})_k$ , e studiamo la convergenza della successione delle approssimazioni numeriche ottenute, facendo variare il parametro  $k$  secondo una ragionevole legge che preciseremo in seguito.

### 4.1 Algoritmo numerico

Sia  $k$  un intero positivo e sia  $x_i = ih$  e  $y_j = jh$  una discretizzazione del rettangolo  $\Omega = (0, n + 1) \times (0, m + 1)$  con passo  $h > 0$ . Siano

$$(s_{i,j})_k := s_k(x_i, y_j) \quad (u_{i,j})_k := u_k(x_i, y_j) \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

i valori approssimati della soluzione  $(s_k, u_k)$  del sistema differenziale  $(\mathbf{EL})_k$  nei punti interni della discretizzazione di  $\Omega$ . Sui punti di frontiera di  $\Omega$  poniamo la  $u$  uguale alla funzione  $g$  e la  $s$  uguale ad uno. Per semplicità di notazione, essendo  $k$  un valore fissato, nel seguito ometteremo l'indice  $k$  per le funzioni coinvolte, a meno che non ci sia necessità di maggiore chiarezza.

In generale, è noto che, se si considera un'approssimazione mediante differenze finite, data una funzione  $v$ , le sue derivate parziali prime  $v_x$  e  $v_y$  possono essere approssimate con le differenze centrali

$$\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2h} \quad e \quad \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h},$$

mentre l'operatore di Laplace,  $\Delta v := v_{xx} + v_{yy}$  si approssima con

$$\frac{v_{i+1,j} + v_{i-1,j} - 4v_{i,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1}}{h^2},$$

dove  $v_{i\pm 1,j} \cong v(x_i \pm h, y_j)$  e  $v_{i,j\pm 1} \cong v(x_i, y_j \pm h)$ .

Approssimando quindi le derivate parziali prime di  $u = u_k$  e di  $s = s_k$  con le differenze centrali otteniamo per il sistema  $(\mathbf{EL})_k$  lo schema numerico:

$$\begin{cases} c_{i,j}u_{i,j} - a_{i,j}u_{i+1,j} - b_{i,j}u_{i-1,j} - d_{i,j}u_{i,j+1} - e_{i,j}u_{i,j-1} = \mu g_{i,j} \\ m_{i,j}s_{i,j} - \frac{1}{h^2}(s_{i+1,j} + s_{i-1,j} + s_{i,j+1} + s_{i,j-1}) = \frac{k^2}{4} \end{cases} \quad (6)$$

dove, per ogni  $i$  e  $j$ , risulta

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \frac{1}{h^2} \left[ s_{i,j}^2 + \frac{s_{i,j}}{2}(s_{i+1,j} - s_{i-1,j}) \right], \\ b_{i,j} &= \frac{1}{h^2} \left[ s_{i,j}^2 - \frac{s_{i,j}}{2}(s_{i+1,j} - s_{i-1,j}) \right], \\ c_{i,j} &= \mu + \frac{4}{h^2} s_{i,j}^2, \\ d_{i,j} &= \frac{1}{h^2} \left[ s_{i,j}^2 + \frac{s_{i,j}}{2}(s_{i,j+1} - s_{i,j-1}) \right], \\ e_{i,j} &= \frac{1}{h^2} \left[ s_{i,j}^2 - \frac{s_{i,j}}{2}(s_{i,j+1} - s_{i,j-1}) \right], \\ m_{i,j} &= \frac{k^2}{4} + \frac{4}{h^2} + \frac{k}{4\alpha h^2} \left[ (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j-1})^2 \right], \end{aligned}$$

e  $g_{i,j} := g(x_i, y_j)$  è la discretizzazione data dall'immagine di partenza di  $(m + 2) \times (n + 2)$  pixels.

Partendo per ogni  $(i, j)$  dalla approssimazione iniziale  $(s_{i,j}^{(0)}, u_{i,j}^{(0)})$ , il sistema di equazioni algebriche non lineari (6) viene risolto con il seguente algoritmo di rilassamento iterativo di tipo Gauss-Seidel:

$$\mathbf{GS}_k \quad \begin{cases} s_{i,j}^{(p+1)} = \frac{1}{m_{i,j}(u_{i,j}^{(p)})} \left[ \frac{k^2}{4} + \widehat{s}_{i,j}^{(p)} \right] \\ u_{i,j}^{(p+1)} = \frac{1}{c_{i,j}(s_{i,j}^{(p+1)})} \left[ \mu g_{i,j} + \widehat{u}_{i,j}^{(p+1)} \right] \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} \widehat{u}_{i,j}^{(p+1)} &= a_{i,j}(s_{i,j}^{(p+1)})u_{i+1,j}^{(p)} + b_{i,j}(s_{i,j}^{(p+1)})u_{i-1,j}^{(p)} + d_{i,j}(s_{i,j}^{(p+1)})u_{i,j+1}^{(p)} \\ &\quad + e_{i,j}(s_{i,j}^{(p+1)})u_{i,j-1}^{(p)} \\ \widehat{s}_{i,j}^{(p)} &= \frac{1}{h^2} \left( s_{i+1,j}^{(p)} + s_{i-1,j}^{(p)} + s_{i,j+1}^{(p)} + s_{i,j-1}^{(p)} \right). \end{aligned}$$

Per ragioni di calcolo e per semplicità di notazione, indichiamo con

$$\begin{aligned} \overline{s}_k^{(p)} &= \left( s_{1,1}^{(p)}, \dots, s_{m,1}^{(p)}, s_{1,2}^{(p)}, \dots, s_{m,2}^{(p)}, \dots, s_{1,n}^{(p)}, \dots, s_{m,n}^{(p)} \right) \\ \overline{u}_k^{(p)} &= \left( u_{1,1}^{(p)}, \dots, u_{m,1}^{(p)}, u_{1,2}^{(p)}, \dots, u_{m,2}^{(p)}, \dots, u_{1,n}^{(p)}, \dots, u_{m,n}^{(p)} \right) \end{aligned}$$

le approssimazioni all'iterata  $p$ -esima delle soluzioni di  $(\mathbf{EL})_k$  ordinate per colonne.

Il criterio di arresto per il procedimento iterativo è dato da:

$$\frac{\left\| \overline{s}_k^{(p+1)} - \overline{s}_k^{(p)} \right\|_2}{\left\| \overline{s}_k^{(p+1)} \right\|_2} \leq \text{tolls}_{GS} \quad e \quad \frac{\left\| \overline{u}_k^{(p+1)} - \overline{u}_k^{(p)} \right\|_2}{\left\| \overline{u}_k^{(p+1)} \right\|_2} \leq \text{tollu}_{GS}$$

dove  $\text{tolls}_{GS}$  e  $\text{tollu}_{GS}$  sono tolleranze fissate per controllare l'errore relativo. In conclusione, se  $p^*$  è l'iterata per cui entrambe le disuguaglianze sono verificate, la soluzione numerica di  $(\mathbf{EL})_k$  è data da  $(\overline{s}_k^{(p^*)}, \overline{u}_k^{(p^*)})$ .

A questo punto per simulare la  $\Gamma$ -convergenza nel discreto, variando il valore di  $k$  opportunamente secondo una legge  $k(it)$ , generiamo una successione di problemi differenziali  $(\mathbf{EL})_{k(it)}$  e risolviamo numericamente ciascuno di essi con il metodo esposto in precedenza.

Poiché i risultati del problema continuo si hanno per  $k$  che tende ad infinito, nel discreto siamo interessati ad analizzare la convergenza numerica della successione delle approssimazioni discrete  $(\overline{s}_{k(it)}, \overline{u}_{k(it)})_{k(it)}$  di ogni sistema  $(\mathbf{EL})_{k(it)}$ , al crescere di  $it$ , finché l'errore non è inferiore a una prefissata tolleranza.

A tal fine utilizziamo una tecnica iterativa basata sulle sostituzioni successive o iterate di Picard.

Per  $it = 0$ , poniamo  $k(0) = 0$  e consideriamo come approssimazione iniziale per il metodo di Picard  $(\bar{s}_0, \bar{u}_0) = (\mathbf{1}, g)$ , ossia la segmentazione uguale ad 1 su tutto  $\Omega$  e la  $u$  coincidente con l'immagine data  $g$ .

Per la prima iterata,  $it = 1$ , poniamo  $k(1) = 1$  e calcoliamo  $(\bar{s}_1^{(p^*)}, \bar{u}_1^{(p^*)})$ , la soluzione numerica del sistema  $(\mathbf{EL})_1$ , mediante l'algoritmo precedente  $\mathbf{GS}_1$ .

In generale, per ogni  $it$ , sia  $(\bar{s}_{k(it)}^{(p^*)}, \bar{u}_{k(it)}^{(p^*)})$  la soluzione numerica del sistema  $(\mathbf{EL})_{k(it)}$  calcolata con l'algoritmo  $\mathbf{GS}_{k(it)}$ .

In questo contesto, iterare mediante sostituzioni successive alla Picard significa che l'approssimazione iniziale per il metodo  $\mathbf{GS}_{k(it+1)}$ , usato per risolvere  $(\mathbf{EL})_{k(it+1)}$ , è la soluzione numerica ottenuta al passo precedente da  $\mathbf{GS}_{k(it)}$ , ossia

$$(\bar{s}_{k(it+1)}^{(0)}, \bar{u}_{k(it+1)}^{(0)}) = (\bar{s}_{k(it)}^{(p^*)}, \bar{u}_{k(it)}^{(p^*)}) \equiv (\bar{s}_{k(it)}, \bar{u}_{k(it)}).$$

Il procedimento iterativo di Picard viene bloccato quando è verificato il seguente criterio di arresto sugli errori relativi:

$$(errs)_{k(it+1)} = \frac{\|\bar{s}_{k(it+1)} - \bar{s}_{k(it)}\|_2}{\|\bar{s}_{k(it+1)}\|_2} \leq tolls$$

e

$$(erru)_{k(it+1)} = \frac{\|\bar{u}_{k(it+1)} - \bar{u}_{k(it)}\|_2}{\|\bar{u}_{k(it+1)}\|_2} \leq tollu$$

dove  $tolls$  e  $tollu$  sono tolleranze fissate su  $s$  e  $u$  rispettivamente.

Definiamo la legge  $k(it)$  di variazione del parametro  $k$  ricorsivamente nel seguente modo:

$$\begin{cases} k(0) = 0, & k(1) = 1 \\ k(it + 1) = k(it) + \left\lceil \frac{(errs)_{k(it)}}{tolls} \right\rceil & \text{se } it \geq 1 \end{cases}$$

dove  $\lceil \cdot \rceil$  è la funzione parte intera superiore.

## 4.2 Esperimenti numerici

In tutti gli esperimenti l'immagine data  $g$  ha una risoluzione di  $(m + 2) \times (n + 2)$  pixels e il passo di discretizzazione considerato è  $h = 1$ . Inoltre abbiamo normalizzato la scala di 256 livelli di grigio di  $g$  (nero (0), bianco (255)) in modo tale che  $g_{i,j} \in [0, 1]$ , per ogni  $i$  e  $j$ .

Per la risoluzione numerica, i valori dei parametri  $\alpha$  e  $\mu$  del problema continuo e di  $tolls_{GS}$ ,  $tollu_{GS}$  e  $tolls$ ,  $tollu$  del problema discreto devono

essere assegnati. In effetti la scelta ottimale di tali valori non è semplice da fare; sulla base delle esperienze effettuate abbiamo fissato  $toll_{s_{GS}} = toll_{u_{GS}} = toll_s = toll_u = 0.05$ , e scelto i parametri di volta in volta (i valori dei parametri sono indicati nelle didascalie di Figura 2 e Figura 3).

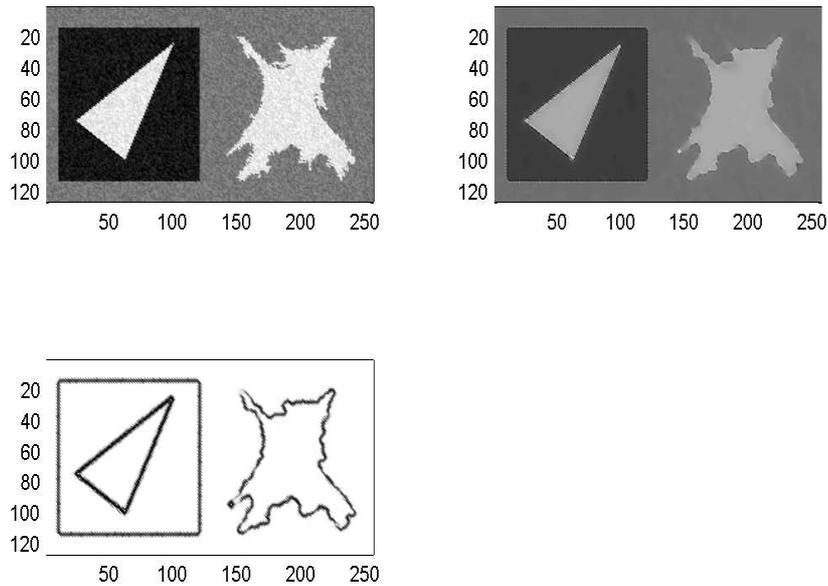


Figura 2: In alto a sinistra l'immagine originale  $g$  e a destra la regolarizzata a tratti  $u$ ; in basso la segmentazione  $s$ . Per i parametri abbiamo scelto i valori  $\alpha = 0.05$  e  $\mu = 0.1$ . Come si può facilmente notare, l'immagine di partenza ha molto rumore di fondo; segmentando l'immagine otteniamo un'immagine più "pulita", cioè  $u$ , non perdendo le informazioni essenziali, ossia i bordi delle regioni omogenee nell'immagine di partenza, che sono individuati e localizzati con precisione.

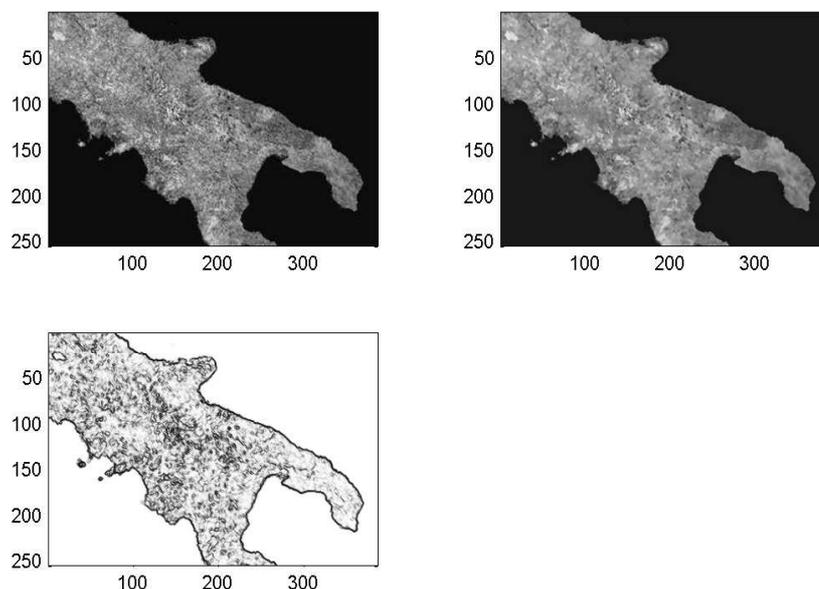


Figura 3: In alto a sinistra l'immagine originale  $g$  e a destra la regolarizzata a tratti  $u$ ; in basso la segmentazione  $s$ . I valori dei parametri sono:  $\alpha = 0.005$  e  $\mu = 1$ . L'immagine di partenza non presenta rumore e quindi la regolarizzata a tratti è molto simile all'immagine di partenza. I risultati più significativi si hanno in questo caso per la  $s$ : i contorni (cioè le coste della penisola) sono infatti perfettamente individuati e localizzati, ed in maniera più netta rispetto alla figura precedente.

## Riferimenti bibliografici

- [A1] **L. Ambrosio:** A compactness theorem for a new class of functions of bounded variation, *Bollettino U.M.I.* **3-B** (1989), 857-881.
- [A2] **L. Ambrosio:** Existence theory for a new class of variational problems, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **111** (1990), 291-322.
- [A3] **L. Ambrosio:** Variational problems in SBV and image segmentation, *Acta Applicandae Mathematicae* **17** (1989), 1-40.
- [AFP] **L. Ambrosio, N. Fusco & D. Pallara:** *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press 2000.
- [AT] **L. Ambrosio & V.M. Tortorelli:** On the approximation of free discontinuity problems, *Bollettino U.M.I.* **6-B** (1992), 105-123.

- [BZ] **A. Blake & A. Zisserman:** *Visual Reconstruction*, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts 1987.
- [CFS] **M. Carriero, A. Farina & I. Sgura:** Image segmentation in the framework of free discontinuity problems: a survey on Mumford & Shah functional and numerical simulations *Preprint n° 1/2002, Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi", Lecce*.
- [DMS] **G. Dal Maso, J.M. Morel & S. Solimini:** A variational method in image segmentation: existence and approximation results, *Acta Math.* **168** (1992), 89-151.
- [DG] **E. De Giorgi:** Free discontinuity problems in Calculus of Variations, *Proc. Meeting in J.L. Lions's honour, June 6-10, Paris, 1988*.
- [DGCL] **E. De Giorgi, M. Carriero & A. Leaci:** Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **108** (1989), 195-218.
- [DGF] **E. De Giorgi & T. Franzoni:** Su un tipo di convergenza variazionale, *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **58** (1975), 842-850.
- [GG] **S. Geman & D. Geman:** Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images, *IEEE Trans. PAMI* **6** (1984).
- [M] **R. March:** Visual reconstruction with discontinuities using variational methods, *Image and Vision Computing* **10** (1992), 30-38.
- [MS] **J.M. Morel & S. Solimini:** *Variational Methods in Image Segmentation*, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [MS1] **D. Mumford & J. Shah:** Boundary detection by minimizing functionals, *Proc. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, San Francisco (1985).
- [MS2] **D. Mumford & J. Shah:** Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems, *Comm. Pure Appl. Math.* **42** (1989), 577-685.
- [SMA] **R. Spitaleri, R. March & D. Arena:** Finite difference solution of Euler equations arising in variational image segmentation, *Numerical Algorithms* **21** (1999) 353-365.