

Convegno Nazionale  
**Matematica senza Frontiere**  
Lecce, 5-8 marzo 2003

## Lo studio dell'elettromagnetismo negli ultimi 50 anni: il contributo delle tecnologie informatiche e dei metodi matematici

Mario Calamia

Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni - Università di Firenze  
Osservatorio Ambientale di Campi Salentina (Le)

### 1 Richiami

I fenomeni elettrici e magnetici sono noti dall'antichità. I fenomeni elettrici (il nome deriva dalla parola greca "elektron") sono prodotti da cariche elettriche e vengono caratterizzati dal campo elettrico  $E$ , misurato in V/m. I fenomeni magnetici (il nome deriva dalla magnetite, un minerale del ferro) sono prodotti da cariche magnetiche, sempre in coppia, e vengono caratterizzati dal campo magnetico  $H$ , misurato in A/m.

Allorché i fenomeni elettrici e magnetici sono temporalmente variabili, si parla di campi elettromagnetici, cioè campi elettrici e magnetici concatenati. Il grado di concatenamento è funzione della variabilità temporale, quindi della frequenza. Al crescere della frequenza, i fenomeni sono sempre più strettamente concatenati.

Parlando di elettromagnetismo, allo scopo di evidenziare il ruolo avuto dalla matematica, torna utile distinguere due aspetti significativi:

1. l'aspetto fenomenologico (sperimentale) che parte dall'osservazione dell'esperienza (o dall'analogia) per risalire alla legge che la governa; i referenti principali sono Coulomb (1785), Volta (1799), Oersted (1820) e Faraday (1831).
2. L'aspetto matematico, con i tentativi di sintesi che portarono alla formulazione di teorie che hanno trovato validazione proprio nell'esperienza; i referenti principali sono Poisson (1811), Green (1828), Maxwell (1873).

Senza soffermarsi sui contributi degli scienziati citati, e di altri, l'elettromagnetismo in senso stretto trova i due riferimenti principali in Faraday e Maxwell.

Faraday, proveniente da modesta famiglia e privo pertanto della cultura matematica dei grandi contemporanei, ma fornito di un prodigioso intuito fisico, introdusse il concetto di elettromagnetismo, ripreso poi da Maxwell in forma matematica.

Faraday postulò l'esistenza delle linee di forza, assegnando alle stesse una vera e una propria realtà fisica (Maxwell postulerà persino l'esistenza dell'etere) e introdusse il concetto di polarizzazione del dielettrico tra due conduttori e quindi la scomparsa dell'azione immediata a distanza (che era alla base dei lavori di Coulomb).

Maxwell tradusse in forma matematica la visione di Faraday introducendo l'ipotesi della corrente di spostamento dielettrico e quindi della sua propagazione, nel vuoto, con velocità  $c$ . La coincidenza di  $c$  con la velocità della luce e il fatto che il campo e.m. fosse trasversale, condussero Maxwell ad enunciare la teoria elettromagnetica della luce. Maxwell arrivò così alla formulazione delle sue equazioni, che non sto a riscrivere, ormai assunte come postulato fondamentale dell'elettromagnetismo. Da queste equazioni si possono derivare tutte le classiche leggi dell'elettromagnetismo, ottenute dalle esperienze di laboratorio, e prevedere situazioni nuove, confermate a loro volta da esperienze sempre più sofisticate.

Ecco l'intreccio tra esperienza e matematica in un nesso continuo, che lo sviluppo degli strumenti di calcolo ha reso sempre più prodigioso.

Le equazioni di Maxwell sono equazioni differenziali, di cui i matematici fanno darci la soluzione.

Pertanto potremmo concludere che, avendo le equazioni e le soluzioni, tutto sia risolto. La situazione è, purtroppo, completamente diversa.

## 2 Soluzioni delle equazioni di Maxwell

La soluzione delle equazioni di Maxwell (che sono, lo ripeto, delle equazioni differenziali) richiede la conoscenza del contorno (e delle relative condizioni). La soluzione in forma chiusa è stata possibile solo in pochissimi casi (sfera, cilindro, cono, semipiani, etc.). Se il contorno non apparteneva a questi casi, lo si scompondeva e riconduceva a forme semplici, in modo da utilizzare le soluzioni note.

È questo il periodo delle soluzioni per forme semplici, che si è sviluppato nella prima metà del secolo XX.

Nella seconda metà del secolo XX si sono sviluppati i metodi approssimati, che trovano supporto nello sviluppo dei calcolatori (periodo delle soluzioni con approssimazione). Al momento, i calcolatori erano ancora lenti e quindi bisognava mettere a punto particolari algoritmi per rendere contenuti i tempi di calcolo.

### a. Metodo del Momento (MoM).

È il più noto fra i metodi approssimati, presentato nel 1967 da R.F. Harrington ("Applicazione ad antenne filari") e nel 1982 da A. W. Glisson, D. R. Wilton, S. M. Rao ("Applicazione a strutture molteplici connesse").

Il metodo dei momenti opera nel dominio della frequenza e la versione più diffusa è il Numerical Electromagnetic Code (NEC).

Nel metodo dei momenti, la struttura viene suddivisa in tratti elementari su cui si suppone nota la forma della distribuzione di corrente, ma è incognita la sua ampiezza. Data la sorgente e imposte le condizioni al contorno il problema è ricondotto alla soluzione di un sistema lineare che generalmente richiede l'inversione di una matrice.

L'inversione della matrice costituisce il limite di applicabilità del metodo perché per strutture grandi (in termini di lunghezza d'onda) la dimensione della matrice conduce a :

- elevati tempi di calcolo;
- elevata occupazione di memoria dinamica;
- problemi di malcondizionamento.

b. Metodi derivati dal metodo dei momenti (FDTD e FEM).

b.1 Metodo delle Differenze Finite nel Dominio del Tempo (FDTD): è stato introdotto da K. Yee (1966) ed è generalmente applicato alle soluzioni di equazioni differenziali.

I punti chiave del metodo sono:

- *Semplicità*: le equazioni di Maxwell in forma differenziale sono discretizzate nel dominio *spaziale e temporale* in modo semplice;
- fa uso di una *matematica reale* (contrapposta a quella in campo complesso dei metodi che operano nel dominio della frequenza);
- ben si presta a una visualizzazione dell'andamento temporale delle varie quantità (ciò permette una percezione fisica del comportamento del campo elettromagnetico);
- elevata *flessibilità geometrica* che permette la soluzione di una ampia varietà di problemi elettromagnetici (problemi di accoppiamento, di antenna, di reirradiazione, ...)

In tale metodo:

- la struttura è discretizzata uniformemente (o non uniformemente);
- le derivate spaziali e temporali sono approssimate da differenze finite centrali operate su due punti e si ottiene così una buona accuratezza con costi computazionali minimi.

L'FDTD si dimostra generalmente più efficiente del MoM quando è richiesta la valutazione su una *ampia banda di frequenza*.

b.2 Metodo degli Elementi Finiti (FEM).

- Introdotto da Courant (1943) ma applicato a un problema pratico solo nel 1959 da Duffin.
- Applicato sia ad equazioni differenziali che integrali.

- La struttura suddivisa in elementi non sovrapposti in cui il campo è approssimato tramite funzioni polinomiali.
- Efficiente nel caso di strutture di forma complessa in cui sono presenti pi materiali.
- Matrice risultante sparsa (escluso eventualmente la parte in cui sono presenti pi materiali).
- Matrice risultante sparsa (escluso eventualmente la parte che tiene conto della radiazione).

c. Metodi asintotici.

L'approssimazione asintotica si attua con uno sviluppo in serie e studia l'interazione di un'onda (prodotta da una sorgente lontana) con un oggetto grande rispetto alla lunghezza d'onda, conduttore o non, per mezzo dell'equazione delle onde con opportune condizioni al contorno. I termini della serie sono funzione della complessità del contorno ed è possibile identificare i vari contributi (ottica fisica, diffrazione).

d. Metodi perturbativi.

Utilizzati, in particolare, nello scattering di superficie ruvide.

e. Metodi variazionali.

### 3 Soluzioni numeriche

La disponibilità di calcolatori sempre più veloci ha modificato il modo di affrontare la soluzione dei problemi di elettromagnetismo.

Vediamone rapidamente il processo.

Si parte da uno dei metodi approssimati (MOM-FEM-FDTD) e si scrivono le equazioni matriciali riferite ai tratti in cui si decompone la struttura.

Al fine di aumentare la fedeltà di rappresentazione bisogna creare una mesh sempre più fitta e quindi la soluzione è legata alla velocità del calcolatore.

Lo sviluppo di metodi numerici sempre più efficienti ha permesso di ridurre notevolmente sia i tempi di calcolo che l'occupazione di memoria rispetto alle tecniche numeriche tradizionali.

	Metodi numerici tradizionali	Nuovi metodi numerici
Tempi di calcolo	$O(N^2)$	$O(N \log N)$
Occupazione di memoria	$O(N^2)$	$O(N \log N)$

$N$  è il numero di incognite del problema

L'aumentata velocità dei calcolatori non viene quindi utilizzata in maniera brutale, ma attraverso l'uso di algoritmi sempre più efficienti, che fanno riferimento a modelli sempre più evoluti.

## 4 Modellizzazione elettromagnetica

Su un binario parallelo, si è sviluppata la messa a punto di modelli. Già nella prima metà del secolo XX (quello che abbiamo chiamato il periodo delle soluzioni per forme semplici), se l'oggetto era appena più complesso, lo si scomponesse in forme semplici dalle soluzioni note. Il processo di adeguamento del modello allo strumento di calcolo disponibile è stato costante e trova riferimento nel modo come è stato impostato lo studio dell'interazione tra onda elettromagnetica ed oggetto, passando dall'analogia ottica all'uso di teorie sempre più complesse per meglio caratterizzare gli oggetti. Si è passati così dai modelli fondati sull'ottica geometrica, attraverso quelli che utilizzano l'ottica fisica, a quelli che introducono i centri di diffusione per una più puntuale caratterizzazione degli oggetti.

Possiamo così riassumere il procedimento descritto:

- a. l'ottica geometrica si basa sull'applicabilità delle leggi dell'ottica e richiede quindi superfici essenzialmente piane;
- b. l'ottica fisica, con l'introduzione delle correnti superficiali consente anche l'estensione a superfici leggermente curve (rispetto alla lunghezza d'onda);
- c. la teoria geometrica della diffrazione (sia GTD che UTD), richiede l'individuazione dei centri di diffusione e quindi una migliore descrizione del contorno dell'oggetto.

Al crescere del numero dei centri di diffusione, cresce la complessità del modello e quindi delle soluzioni numeriche, per le quali si richiedono algoritmi sempre più efficienti.

## 5 Conclusioni

Da quanto detto precedentemente, è immediato arrivare alle conclusioni. Lo sviluppo di calcolatori veloci ha effettivamente modificato il modo in cui scienziati ed ingegneri usano gli strumenti di simulazione elettromagnetica. Si continua a studiare e cercare modelli (elettromagnetici) ad alta risoluzione che richiedono anche calcolatori sempre più veloci.

Può sembrare un gioco esasperato ed inutile. Ma non è così perché credo che in pochi campi della scienza, come in quello elettromagnetico, lo stimolo reciproco tra lo sviluppo delle tecnologie informatiche e la ricerca di più adeguate modellizzazioni, abbia avuto una importanza di tali dimensioni.

Nella figura 1. si è messo a confronto la complessità della struttura da studiare con le potenzialità dello strumento di calcolo e le ridotte dimensioni dello stesso al passare del tempo.

Nella figura 2. a), b), c) l'evoluzione nella modellizzazione di un aereo nell'arco, più o meno, di 50 anni.

Nel lavoro dei colleghi A. Freni e A. Mori, saranno illustrati e descritti alcuni metodi, derivati da quelli presentati, per evidenziare la loro applicabilità a casi concreti.

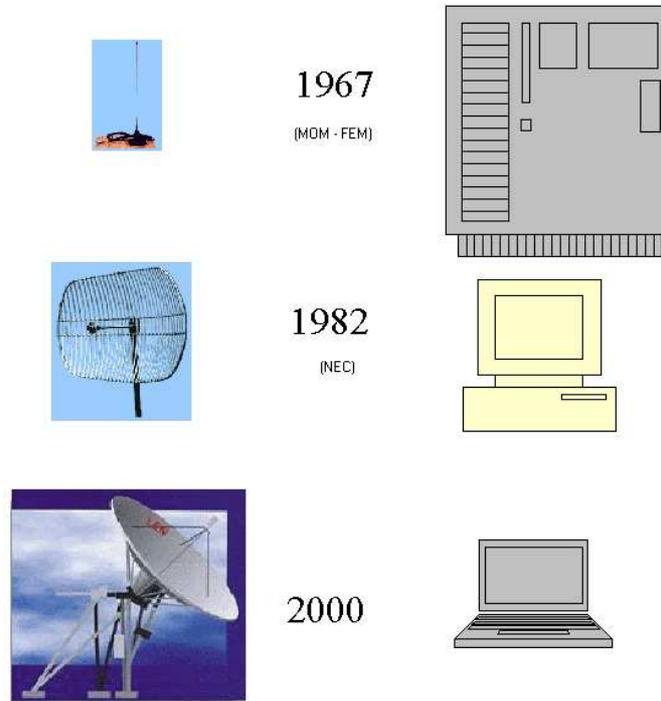


Figura 1

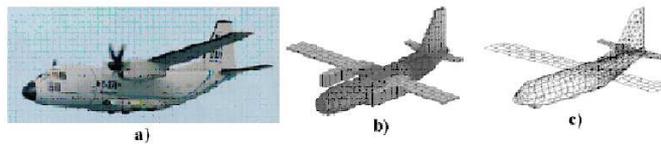


Figura 2