CAPITOLO 7

ALCUNE APPLICAZIONI

7.1 Coefficienti illimitati (cenni)

Consideriamo in questa sezione un operatore differenziale della forma

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c,$$

con $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $c \leq 0$ e tale che

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu(x)|\xi|^2 \qquad x\,, \xi \in \mathbb{R}^N,$$

dove $\inf\limits_{x\in K} \nu(x) > 0$ per ogni compatto K. Quindi un tale operatore è uniformemente ellittico su ogni compatto di $\mathbb{R}^N$.

In questa situazione, non è difficile provare l'esistenza di una soluzione limitata e in $C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ per l'equazione $\lambda u - Au = f$, con $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda \geq 0$. Infatti, presa la palla B_R di centro l'origine e raggio R, la teoria precedente ci garantisce di poter trovare un'unica funzione $u_R \in C^{2,\alpha}_0(B_R)$ soluzione del problema

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } B_R \\ u = 0 & \text{su } \partial B_R \end{cases}$$

Osserviamo che $\|u_R\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty$. Supponiamo che $f \geq 0$ (nel caso generale basterà scrivere $f = f^+ - f^-$). Fissati $0 < \varrho < R_1 < R_2$, risulta $u_{R_1} \leq u_{R_2}$ in B_{R_1}. Infatti $u_{R_2} - u_{R_1}$ soddisfa

$$\begin{cases} \lambda(u_{R_2} - u_{R_1}) - A(u_{R_2} - u_{R_1}) = 0 & \text{in } B_{R_1} \\ u_{R_2} - u_{R_1} = f_{|\partial B_{R_1}} & \text{su } \partial B_{R_1} \end{cases}$$

e siccome il dato al bordo è positivo, il principio del massimo implica che anche la soluzione $u_{R_2} - u_{R_1}$ è positiva. Per monotonia, si ha pertanto che la successione (u_R) converge puntualmente ad una certa funzione u. Applicando le stime di Schauder interne (5.7.3) possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\|u_{R_2} - u_{R_1}\|_{2,\alpha,\varrho} &\leq C(\varrho, R_1)\big(\|Au_{R_2} - Au_{R_1}\|_{\alpha,B_{R_1}} + \|u_{R_2} - u_{R_1}\|_{\infty,B_{R_1}}\big)\\ &\leq C\,\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Usando il Teorema di Ascoli-Arzelà otteniamo che, a meno di sottosuccessioni, u_R converge a u in $C^{2,\alpha}(B_\varrho)$. Siccome ϱ è arbitrario, risulta $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ e, per costruzione, $\lambda u(x) - Au(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Osserviamo che in queste ipotesi più deboli non è più assicurata l'unicità.

7.2 Confronto tra teoria L^2 e teoria C^α

Consideriamo il solito operatore A in un aperto Ω limitato e con bordo di classe $C^{2,\alpha}$. Per quanto riguarda i coefficienti richiediamo che $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b_i, c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ con $c \leq 0$. Inoltre assumiamo che sia soddisfatta la condizione di ellitticità uniforme. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{7.1}$$

e i seguenti operatori

$$\begin{aligned} A_2 &= (A, H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \quad \text{in } L^2(\Omega),\\ A_\alpha &= (A, C^{2,\alpha}_0(\Omega)) \quad \text{in } C^{0,\alpha}(\Omega).\end{aligned}$$

Abbiamo provato che

- se $\lambda \geq 0$ e $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ allora esiste un'unica soluzione $u \in C^{2,\alpha}_0(\Omega)$ del problema (7.1);
- se $\lambda \geq \lambda_0 = \dfrac{K^2}{2\nu_0} + \sup_{\overline{\Omega}} c + \dfrac{\nu_0}{2}$, dove $K^2 = \sup_{\overline{\Omega}} \sum_i |b_i|^2$ (si veda (2.6)) e $f \in L^2(\Omega)$ allora esiste un'unica soluzione di (7.1) nello spazio $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

In termini di risolventi abbiamo cioè provato che $(\lambda - A_\alpha)^{-1}$ esiste nella semiretta $\{\lambda > 0\}$, mentre $(\lambda - A_2)^{-1}$ è definito in $\{\lambda > \lambda_0\}$. E' interessante vedere che questa distinzione è solo apparente, poichè i due operatori hanno di fatto lo stesso spettro.

Teorema 7.2.1 *Risulta*

$$\sigma(A_2) = \sigma(A_\alpha).$$

Inoltre le autofunzioni associate a $\lambda \in \sigma(A_2) = \sigma(A_\alpha)$ coincidono.

DIM. Osserviamo intanto che entrambi gli operatori considerati hanno risolvente compatto perchè le inclusioni dei domini nei rispettivi spazi sono compatte. Ciò implica che gli spettri sono puntuali. L'inclusione $\sigma(A_\alpha) \subseteq \sigma(A_2)$ è allora ovvia. Viceversa, sia $\tilde{\lambda} \in \sigma(A_2)$. Siccome gli spettri sono discreti, possiamo trovare $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B}_\varepsilon(\tilde{\lambda})$ non contenga altri autovalori di A_2 e A_α. Pertanto, usando il calcolo funzionale per operatori chiusi, possiamo considerare le proiezioni spettrali

$$P_{\tilde{\lambda}}(A_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\tilde{\lambda}|=\varepsilon} (\lambda - A_2)^{-1} d\lambda,$$
$$P_{\tilde{\lambda}}(A_\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\tilde{\lambda}|=\varepsilon} (\lambda - A_\alpha)^{-1} d\lambda.$$

Siccome $\tilde{\lambda} \in \sigma(A_2)$, risulta $\mathrm{Im}P_{\tilde{\lambda}}(A_2) = \ker(\tilde{\lambda} - A_2)^\mu$, dove $\mu \in \mathbb{N}$ è l'indice dell'autovalore $\tilde{\lambda}$. Inoltre, se $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ allora $P_{\tilde{\lambda}}(A_2)f = P_{\tilde{\lambda}}(A_\alpha)f$ poichè i risolventi coincidono su f (se il dato è regolare la soluzione classica e quella variazionale sono uguali). Tenendo conto di tutto questo e del fatto che $C^{0,\alpha}(\Omega)$ è denso in $L^2(\Omega)$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\ker(\tilde{\lambda} - A_2)^\mu &= P_{\tilde{\lambda}}(A_2)(L^2(\Omega)) = \overline{P_{\tilde{\lambda}}(A_2)(C^{0,\alpha}(\Omega))}^{L^2(\Omega)} \\
&= \overline{P_{\tilde{\lambda}}(A_\alpha)(C^{0,\alpha}(\Omega))}^{L^2(\Omega)} = P_{\tilde{\lambda}}(A_\alpha)(C^{0,\alpha}(\Omega)) \\
&= \ker(\tilde{\lambda} - A_\alpha)^\mu.
\end{aligned}$$

□

7.3 L'EQUAZIONE $\lambda u - Au = f$ CON f CONTINUA

Riprendiamo il problema posto all'inizio del primo capitolo relativo alla risolubilità dell'equazione $\lambda u - Au = f$, con $f \in C(\overline{\Omega})$ e $\lambda \geq 0$. Più precisamente siamo interessati alla regolarità delle soluzioni del problema

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Se l'operatore è in forma di divergenza, la teoria L^2 fornisce immediatamente un'unica soluzione di classe $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Consideriamo una successione $(f_n) \subseteq C^{0,\alpha}(\Omega)$ che converge uniformemente a f. Se u_n indica la soluzione classica (ossia in $C_0^{2,\alpha}(\Omega)$) del problema

$$\begin{cases} \lambda u_n - Au_n = f_n & \text{in } \Omega \\ u_n = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

allora per il principio del massimo si ha $\|u_n\|_\infty \leq \frac{\|f_n\|_\infty}{\lambda}$, per cui applicando questa stima alle differenze otteniamo

$$\|u_n - u_m\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda}\|f_n - f_m\|_\infty.$$

Ne segue che u_n converge uniformemente a u e u è continua in $\overline{\Omega}$. Per dedurre maggiore regolarità si possono usare stime L^p, con p sufficientemente grande. Con le stesse tecniche usate per la regolarità $C^{0,\alpha}$, quindi evitando la teoria L^p, possiamo però provare almeno che $u \in C^{1,\alpha}$ per ogni $\alpha < 1$, nel caso in cui A coincide con il Laplaciano.

Osservazione 7.3.1 Ricordiamo che per il Lemma 5.2.3 per operatori puri del secondo ordine a coefficienti costanti, se $u \in H^1(B_R)$ risolve $\Delta u = 0$, allora

$$\int_{B_r} |u - u_r|^2 \leq c\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |u - u_R|^2, \qquad r < R \tag{7.2}$$

essendo u_r la media di u in B_r.

Inoltre il problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } B_R \\ u = 0 & \text{su } \partial B_R \end{cases}$$

con $f \in L^2(B_R)$, ammette un'unica soluzione u in $H_0^1(B_R) \cap H^2(B_R)$ che soddisfa la stima

$$\|u\|^2_{H^2(B_R)} \leq C(R)\|f\|^2_{L^2(B_R)}.$$

Posto $v(x) = u(Rx)$, per $x \in B_1$, si ha che v risolve il precedente problema in B_1 con dato $g(x) = R^2 f(Rx)$. Pertanto

$$\|v\|^2_{H^2(B_1)} \leq C(1)\|g\|^2_{L^2(B_1)}.$$

Sostituendo u al posto di v e cambiando variabile si ottiene

$$R^{-4}\|u\|^2_{L^2(B_R)} + R^{-2}\|\nabla u\|^2_{L^2(B_R)} + \|D^2 u\|^2_{L^2(B_R)} \leq C\|f\|^2_{L^2(B_R)} \tag{7.3}$$

con $C = C(1)$.

Il seguente teorema fornisce delle stime simili alla (ii) del Teorema 5.2.4, ma ora direttamente per la soluzione e per le sue derivate prime, dato che il nostro intento è ora provare, tramite la caratterizzazione integrale delle funzioni hölderiane, che $u \in C^{1,\alpha}$.

Teorema 7.3.2 *Sia $u \in H^2(B_R)$ soluzione di $\Delta u = f$ in B_R, con $f \in L^2(B_R)$. Allora per ogni $r < R$*

(a) $$\int_{B_r} |u - u_r|^2 \leq c(N)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |u - u_R|^2 + R^4 \int_{B_R} |f|^2\right);$$

(b) $$\int_{B_r} |\nabla u - (\nabla u)_r|^2 \leq c(N)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R} |\nabla u - (\nabla u)_R|^2 + R^2 \int_{B_R} |f|^2\right).$$

DIM. La dimostrazione è sostanzialmente la stessa del Teorema 5.2.4.

(a) Sia w l'unica soluzione dell'equazione $\Delta w = f$ in $H_0^1(B_R) \cap H^2(B_R)$. Per differenza, $v := u - w \in H^2(B_R)$ risolve l'omogenea associata. Applicando (7.2) a v e (7.3) a w e ricordando l'Osservazione 5.2.2 si ha

$$\begin{aligned}\int_{B_r} |u-u_r|^2 &\le 2\int_{B_r}|v-v_r|^2 + 2\int_{B_r}|w-w_r|^2\\ &\le c(N)\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R}|v-v_R|^2 + 2\int_{B_R}|w-w_R|^2\\ &\le c(N)\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R}|u-u_R|^2\\ &\quad + c(N)\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R}|w|^2 + 2\int_{B_R}|w|^2\\ &\le c(N)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2}\int_{B_R}|u-u_R|^2 + R^4\int_{B_R}|f|^2\right).\end{aligned}$$

(b) Si dimostra come (a), considerando $D_i v$ al posto di v. □

Come conseguenza delle disuguaglianze (a) e (b) si ottengono i due seguenti corollari.

Corollario 7.3.3 *Per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, con $p > \max\{2, N\}$, risulta $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, dove $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, ed esiste una costante $c = c(N,\alpha) > 0$ tale che*

$$\|u\|_{1,\alpha} \le c(N,\alpha)(\|\Delta u\|_p + \|u\|_\infty).$$

DIM. Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, con p come nell'enunciato. Le immersioni di Sobolev assicurano che $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, con $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$. Inoltre, per ogni fissato $R > 0$, $u \in H^2(B_R)$ per cui possiamo usare (b) del teorema precedente con $f = \Delta u$. Tenendo conto del fatto che $\nabla u \in C^{0,\alpha}$ e applicando la disuguaglianza di Hölder abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\int_{B_r}|\nabla u - (\nabla u)_r|^2 &\le c(N)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} R^{N+2\alpha}[\nabla u]^2_{\alpha,\mathbb{R}^N}\right.\\ &\quad\left. + R^2\left(\int_{B_R}|\Delta u|^p\right)^{\frac{2}{p}}(\omega_N R^N)^{\frac{p-2}{p}}\right)\\ &\le c(N)\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{N+2} R^{N+2\alpha}[\nabla u]^2_{\alpha,\mathbb{R}^N}\right.\\ &\quad\left. + \|\Delta u\|^2_{p,B_R} R^{N+2\alpha}\right).\end{aligned}$$

Adesso prendiamo $R = q\,r$, con $q > 1$ e otteniamo

$$\int_{B_r}|\nabla u - (\nabla u)_r|^2 \le c(N) r^{N+2\alpha}\left(q^{2\alpha-2}[\nabla u]^2_\alpha + q^{N+2\alpha}\|\Delta u\|_p^2\right).$$

Dividendo per $r^{N+2\alpha}$ e prendendo l'estremo superiore su $r > 0$, per il Teorema 4.3.4 abbiamo

$$[\nabla u]_\alpha^2 \le c(N) \left(q^{2\alpha-2}[\nabla u]_\alpha^2 + q^{N+2\alpha}\|\Delta u\|_p^2 \right).$$

Scegliendo q abbastanza grande affinchè $c(N)q^{2\alpha-2} = 1/2$ abbiamo

$$[\nabla u]_\alpha \le c(N,\alpha)\|\Delta u\|_p.$$

Siccome $\|u\|_{1,\alpha} \le \text{cost}\,(\|u\|_\infty + [\nabla u]_\alpha)$. □

Corollario 7.3.4 *Se $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, con $\frac{N}{2} < p < N$ e $p \ge 2$ allora*

$$[u]_\alpha \le c(N,\alpha)\|\Delta u\|_p,$$

con $\alpha = 2 - \dfrac{N}{p}$.

DIM. La dimostrazione di questo corollario è lasciata per esercizio (basta imitare quella del corollario precedente e usare (a) del Teorema 7.3.2 al posto di (b)).

Teorema 7.3.5 *Se $0 < \alpha < 1$, esiste una costante $c = c(N,\alpha) > 0$ tale che per ogni $u \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ risulta*

$$\|u\|_{1,\alpha} \le c(N,\alpha)(\|u\|_\infty + \|\Delta u\|_\infty).$$

DIM. Sia $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $0 \le \eta \le 1$, $\eta \equiv 1$ su $B_1(x_0)$ e supp$\eta \subset B_2(x_0)$. Applicando il Corollario 7.3.3 alla funzione ηu con $p = \frac{N}{1-\alpha}$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\|\eta\, u\|_{1,\alpha} &\le c(N,\alpha)(\|\eta\, u\|_\infty + \|\Delta(\eta\, u)\|_p) \\
&\le c(N,\alpha)(\|u\|_\infty + \|\Delta(\eta\, u)\|_{\infty,B_2(x_0)}) \\
&\le c(N,\alpha)(\|u\|_\infty + \|\eta\Delta u\|_\infty + \|\nabla u\cdot\nabla\eta\|_\infty + \|u\Delta\eta\|_\infty) \\
&\le c(N,\alpha)(\|\Delta u\|_\infty + \|u\|_1).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\|u\|_{1,\alpha,B_1(x_0)} \le c(N,\alpha)(\|\Delta u\|_\infty + \|u\|_1),$$

da cui passando all'estremo superiore su $x_0 \in \mathbb{R}^N$ otteniamo

$$\|u\|_{1,\alpha} \le c(N,\alpha)(\|\Delta u\|_\infty + \|u\|_1).$$

Dall'ultima stima segue la tesi una volta applicata la disuguaglianza di interpolazione $\|u\|_1 \le \varepsilon\|u\|_{1,\alpha} + C_\varepsilon\|u\|_\infty$. □

Esercizio 7.3.6 Sia $0 < \alpha < 1$. Provare che per ogni funzione $u \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ risulta

$$\|u\|_{1,\alpha} \le c(\alpha, N)\|u - \Delta u\|_\infty. \tag{7.4}$$

(Basta applicare il Teorema 7.3.5 e il principio del massimo).

Esercizio 7.3.7 Sia $0 < \alpha < 1$. Provare che per ogni funzione $u \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ risulta

$$[\nabla u]_\alpha \le c(\alpha, N)\|\Delta u\|_\infty^{\frac{1+\alpha}{2}} \|u\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

(E' sufficiente applicare il Teorema 7.3.5 alla funzione $v(x) = u(\lambda x)$ e minimizzare su λ).

7.4 Alcuni problemi non lineari

In questa sezione applichiamo i risultati ottenuti allo studio di alcuni problemi ellittici semilineari. Al fine di usare la teoria sviluppata finora, supporremo ovunque che Ω sia un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ con bordo di classe $C^{2,\alpha}$ e che $A = \sum a_{ij}D_{ij} + \sum b_i D_i + c$ sia un operatore uniformemente ellittico, con coefficienti α-hölderiani, ($0 < \alpha < 1$) e $c \le 0$.

Esempio 7.4.1 Consideriamo il seguente problema semilineare

$$\begin{cases} \lambda u - Au + F(u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{7.5}$$

dove $\lambda \ge 1$, $F : [-a, a] \to \mathbb{R}$ è una funzione lipschitziana di classe C^2 e $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Se u_0 è una soluzione del problema, allora essa verifica l'identità $u_0 = (\lambda - A)^{-1}(f - F(u_0))$, dove $(\lambda - A)^{-1} : C^{0,\alpha}(\Omega) \to C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ è il risolvente di A. Ciò suggerisce di cercare la soluzione come punto fisso dell'operatore

$$G(u) = (\lambda - A)^{-1}(f - F(u)).$$

Cominciamo a studiare l'applicazione $u \to F(u)$, definita in

$$B_a = \left\{u \in C^{0,\alpha}(\Omega) \mid \|u\|_\alpha \le a\right\}.$$

Se $M = \|F\|_\infty$ e L è la costante di Lipschitz di F, risulta

$$|F(u(x)) - F(u(y))| \le L|u(x) - u(y)| \le L[u]_\alpha |x - y|^\alpha$$

da cui segue che $[F(u)]_\alpha \le L[u]_\alpha \le L\,a$. Inoltre, evidentemente $\|F(u)\|_\infty \le M$. Pertanto $F : B_a \to B_{M+aL}$. Proviamo che F è lipschitziana rispetto alla norma $\|\cdot\|_\alpha$. Siano $u, v \in B_a$. Allora

$$|F(u(x)) - F(v(x))| \le L|u(x) - v(x)| \quad \Rightarrow \quad \|F(u) - F(v)\|_\infty \le L\|u - v\|_\infty. \tag{7.6}$$

Applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale, possiamo scrivere poi

$$\begin{aligned} F(v(x)) - F(u(x)) &= (v(x)-u(x)) \int_0^1 F'\left(u(x)+t(v(x)-u(x))\right) dt \\ &=: (v(x)-u(x))H(x), \end{aligned}$$

da cui segue che

$$[F(v)-F(u)]_\alpha \le [v-u]_\alpha \|H\|_\infty + \|v-u\|_\infty [H]_\alpha \le \|v-u\|_\alpha (\|H\|_\infty + [H]_\alpha).$$

Ora, naturalmente $\|H\|_\infty \le \sup |F'| = L$. Per stimare la seminorma hölderiana di H osserviamo che

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^1 F'(u(x)+t(v(x)-u(x)))dt - \int_0^1 F'(u(y)+t(v(y)-u(y)))dt \right| \\ &\quad \le \int_0^1 |F'(u(x)+t(v(x)-u(x))) - F'(u(y)+t(v(y)-u(y)))| dt \\ &\quad \le \int_0^1 \|F''\|_\infty \left((1-t)|u(x)-u(y)| + t|v(x)-v(y)|\right) dt \\ &\quad \le ([u]_\alpha + [v]_\alpha) \|F''\|_\infty |x-y|^\alpha. \end{aligned}$$

Ne segue

$$[H]_\alpha \le ([u]_\alpha + [v]_\alpha)\|F''\|_\infty \le 2a\|F''\|_\infty.$$

e quindi

$$[F(u)-F(v)]_\alpha \le (L + 2a\|F''\|_\infty)\|u-v\|_\alpha. \tag{7.7}$$

A questo punto (7.6) e (7.7) implicano

$$\|F(u)-F(v)\|_\alpha = \|F(u)-F(v)\|_\infty + [F(u)-F(v)]_\alpha \le L_1 \|u-v\|_\alpha,$$

con $L_1 = 2(L + a\|F''\|_\infty)$.

Ricordiamo ora la stima sul risolvente dell'Osservazione 5.6.5

$$\|(\lambda - A)^{-1}\varphi\|_\alpha \le c(\nu_0, k_0, \Omega)\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\|\varphi\|_\alpha.$$

Se $u \in B_a$, per quanto provato si ha che $f - F(u) \in B_{a_1}$, dove $a_1 = M + aL + \|f\|_\alpha$, per cui scegliendo λ abbastanza grande, risulta

$$\|G(u)\|_\alpha = \|(\lambda - A)^{-1}(f - F(u))\|_\alpha \le c(\nu_0, k_0, \Omega)\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1} a_1 \le a.$$

Questo prova che $G : B_a \to B_a$. Infine G è una contrazione, poichè

$$\begin{aligned} \|G(u_2) - G(u_1)\|_\alpha &= \|(\lambda - A)^{-1}(F(u_2) - F(u_1))\|_\alpha \\ &\le c(\nu_0, k_0, \Omega)\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\|F(u_2) - F(u_1)\|_\alpha \\ &\le c(\nu_0, k_0, \Omega)\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1} L_1 \|u_2 - u_1\|_\alpha, \end{aligned}$$

e basta prendere λ sufficientemente grande affinchè sia anche $c(\nu_0, k_0, \Omega)$ $\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1} L_1 < 1$. Per il teorema delle contrazioni, esiste un unico punto fisso u_0 per l'operatore G e quindi un'unica soluzione per il problema (7.5). Osserviamo che tale u_0 è, per costruzione, in $C_0^{2,\alpha}(\Omega)$.

Esempio 7.4.2 Sia dato ora il problema quasi lineare

$$\begin{cases} \lambda u - Au + F(u, \nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $\lambda \geq 1$, $F : [-a, a]^{N+1} \to \mathbb{R}$ è una funzione lipschitziana di classe C^2 e $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.
Procedendo come per il problema precedente, consideriamo stavolta $U_a = \{u \in C^{1,\alpha}(\Omega) \mid \ \|u\|_{1,\alpha} \leq a\}$. Si dimostra che F trasforma U_a in $U_{a_1} = \{u \in C^{0,\alpha}(\Omega) \mid \|u\|_\alpha \leq a_1\}$, per qualche $a_1 > 0$ e che verifica la condizione di lipschitzianità

$$\|F(u, \nabla u) - F(v, \nabla v)\|_\alpha \leq L_1 \|u - v\|_{1,\alpha}, \qquad u, v \in U_a,$$

per un'opportuna costante $L_1 > 0$. Se $G(u) = (\lambda - A)^{-1}(f - F(u, \nabla u))$, ricordando la stima sul risolvente di A (Osservazione 5.6.5)

$$\|(\lambda - A)^{-1}\varphi\|_{1,\alpha} \leq c\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}} \|\varphi\|_\alpha \qquad (\lambda \geq 1),$$

si ha che

$$\|G(u)\|_{1,\alpha} \leq c\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}} \|f - F(u, \nabla u)\|_\alpha \leq c\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}} (\|f\|_\alpha + L_2 \|u\|_{1,\alpha}).$$

Quindi se $u \in U_a$, scegliendo λ grande e usando la stima precedente si può ottenere che anche $G(u) \in U_a$. Inoltre se $u_1, u_2 \in U_a$ risulta

$$\begin{aligned} \|G(u_1) - G(u_2)\|_{1,\alpha} &\leq c\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}} \|f - F(u_1, \nabla u_1) - f + F(u_2, \nabla u_2)\|_\alpha \\ &\leq c\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}} L_1 \|u_1 - u_2\|_{1,\alpha}, \end{aligned}$$

per cui, scegliendo λ abbastanza grande, otteniamo che G è una contrazione. Ne segue che esiste un unico punto fisso, che è la soluzione del nostro problema.

Esempio 7.4.3 Proponiamoci ora di risolvere il seguente problema semilineare

$$\begin{cases} u - \Delta u + F(u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{7.8}$$

sotto ipotesi di regolarità per F più deboli: $F \in C^1(\mathbb{R})$ con $F(0) = 0$ e $F' \geq 0$. La principale differenza con (7.5) è, comunque, il fatto di fissare $\lambda = 1$. Sia invece come sempre $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Dimostriamo di seguito un risultato di unicità per il problema (7.8).

Lemma 7.4.4 (Principio del massimo) *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ risolve (7.8), allora*

$$\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

DIM. Per il teorema di Weierstrass, esiste un punto $x_0 \in \overline{\Omega}$ tale che $\|u\|_\infty = |u(x_0)|$. Assumiamo $\|u\|_\infty = u(x_0)$ e $x_0 \notin \partial\Omega$ (altrimenti $u(x_0) = 0$ e quindi $u \equiv 0$). Allora risulta $\Delta u(x_0) \leq 0$ e $F(u(x_0)) \geq F(0) = 0$, da cui segue che

$$\|u\|_\infty = u(x_0) \leq u(x_0) - \Delta u(x_0) + F(u(x_0)) = f(x_0) \leq \|f\|_\infty.$$

□

Proposizione 7.4.5 (Unicità) *Se $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ risolvono (7.8), allora $u_1 = u_2$.*

DIM. Applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo scrivere

$$\begin{aligned} F(u_2(x)) - F(u_1(x)) &= (u_2(x) - u_1(x)) \int_0^1 F'\left(u_1(x) + t(u_2(x) - u_1(x))\right) dt \\ &=: (u_2(x) - u_1(x)) G(x). \end{aligned}$$

Riguardo alla funzione G si ha che $G \in C(\overline{\Omega})$ e $G \geq 0$. Inoltre

$$\begin{cases} u_2(x) - u_1(x) - \Delta(u_2 - u_1)(x) + (u_2(x) - u_1(x))G(x) = 0 & \text{in } \Omega \\ u_2 - u_1 = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

cioè $u_2 - u_1$ risolve il problema *lineare*

$$\begin{cases} w - \Delta w + G\, w = 0 & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

per il quale l'unica soluzione, come è noto, è quella nulla. Ne segue che $u_1 \equiv u_2$. □

Passiamo adesso a provare l'esistenza per il problema 7.8 e poniamo

$$\mathcal{N}(s) = \sup_{|t| \leq s} \left(|F(t)| + |F'(t)|\right).$$

Se $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, posto $\|u\|_\infty = s$, per il teorema di Lagrange si ha

$$|F(u(y)) - F(u(x))| \leq \mathcal{N}(s)|u(y) - u(x)| \leq \mathcal{N}(s)[u]_\alpha |x - y|^\alpha$$

e quindi

$$[F(u)]_\alpha \leq \mathcal{N}(\|u\|_\infty)[u]_\alpha. \tag{7.9}$$

Inoltre

$$\|F(u)\|_\infty \leq \mathcal{N}(\|u\|_\infty). \tag{7.10}$$

Nella proposizione che segue dimostriamo delle stime di Schauder non lineari, che ci permetteranno come nel caso lineare di provare l'esistenza della soluzione di (7.8).

Proposizione 7.4.6 *Esiste una funzione $\mathcal{M} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ che dipende solo da $\mathcal{N}$, α e Ω, tale che per ogni $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ risulta*

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq \mathcal{M}(\|f\|_\alpha),$$

essendo $f = u - \Delta u + F(u)$.

DIM. Siano u, f come nell'enunciato. Applicando le stime di Schauder per il Laplaciano e tenendo conto di (7.9) e (7.10) si ha

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,\alpha} &\leq c(\Omega)(\|u - \Delta u\|_\alpha) \\
&\leq c(\Omega)(\|u - \Delta u + F(u)\|_\alpha + \|F(u)\|_\alpha) \\
&= c(\Omega)(\|f\|_\alpha + \|F(u)\|_\alpha) \\
&\leq c(\Omega)\Big(\|f\|_\alpha + [u]_\alpha \mathcal{N}(\|u\|_\infty) + \mathcal{N}(\|u\|_\infty)\Big).
\end{aligned}$$

Grazie al Lemma 7.4.4 e alla monotonia di $\mathcal{N}$ risulta poi

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\Omega)\Big(\|f\|_\alpha + [u]_\alpha \mathcal{N}(\|f\|_\alpha) + \mathcal{N}(\|f\|_\alpha)\Big).$$

Usando la disuguaglianza interpolativa $[u]_\alpha \leq \varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|u\|_\infty$, abbiamo quindi

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c(\Omega)\Big(\|f\|_\alpha + \mathcal{N}(\|f\|_\alpha)\varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + \mathcal{N}(\|f\|_\alpha)c_\varepsilon\|f\|_\alpha + \mathcal{N}(\|f\|_\alpha)\Big).$$

Scegliendo $\varepsilon = (2c(\Omega)\mathcal{N}(\|f\|_\alpha))^{-1}$ otteniamo

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq 2c(\Omega)\Big(\|f\|_\alpha + \mathcal{N}(\|f\|_\alpha)c_\varepsilon\|f\|_\alpha + \mathcal{N}(\|f\|_\alpha)\Big),$$

e quindi la tesi. $\square$

Teorema 7.4.7 (Esistenza) *Per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ esiste un'unica soluzione $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ del problema (7.8).*

DIM. L'unicità è stata già provata nella Proposizione 7.4.5. Per dimostrare l'esistenza, supponiamo dapprima $F \in C^3(\mathbb{R})$. Consideriamo il problema

$$(P_t) \qquad \begin{cases} u - \Delta u + tF(u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $t \in [0,1]$ e $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ fissata. Poniamo

$$E = \{t \in [0,1] \mid (P_t) \text{ ammette soluzione in } C_0^{2,\alpha}(\Omega)\}.$$

$E \neq \emptyset$ dato che per $0 \in E$.

Proviamo che E è chiuso. Sia $(t_n) \subseteq E$ tale che $t_n \to t_0$ e siano u_n le soluzioni di (P_{t_n}). Per la proposizione precedente risulta

$$\|u_n\|_{2,\alpha} \leq \mathcal{M}(\|f\|_\alpha),$$

con $\mathcal{M}$ indipendente da n. Per compattezza, esiste un'estratta, che indichiamo ancora con u_n, che converge ad una certa u_0 in $C^2(\overline{\Omega})$. Usando ancora la stima precedente, si vede che $u_0 \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. Infine, passando puntualmente al limite nell'equazione differenziale e nella condizione al bordo soddisfatte da u_n, si trova che u_0 risolve (P_0).

Proviamo ora che E è aperto. Sia $t_0 \in E$ e sia u_0 la soluzione corrispondente a (P_{t_0}). Linearizziamo il problema intorno a u_0 andando a cercare, per t vicino a t_0, la soluzione di (P_t) nella forma $u = u_0 + v$. Risulta allora che

$$u - \Delta u + tF(u) = f \quad \Leftrightarrow \quad v - \Delta v + tF(u_0 + v) = t_0 F(u_0)$$

ossia

$$v - \Delta v + tF'(u_0)v = (t_0 - t)F(u_0) - t\Big(F(u_0+v) - F(u_0) - F'(u_0)v\Big). \tag{7.11}$$

Se $w \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, il problema

$$\begin{cases} v - \Delta v + tF'(u_0)v = (t_0 - t)F(u_0) & \\ \qquad\qquad\qquad -t\Big(F(u_0 + w) - F(u_0) - F'(u_0)w\Big) & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

è lineare in v. Inoltre, come vedremo, se w è in una palla scelta opportunamente il secondo membro è una funzione α-hölderiana, per cui, applicando i risultati della sezione 5.6, esiste un'unica soluzione che dipende in modo non lineare da w: $v = R_t(w)$. Per il nostro scopo, è quindi necessario trovare un punto fisso per l'operatore R_t. Sia dunque

$$G(w) = F(u_0 + w) - F(u_0) - F'(u_0)w.$$

Si ha che $G(0) = 0$ e $G'(0) = 0$. Sia $M > 0$ tale che $\|u_0\|_\alpha \leq M$. Poniamo

$$k = \sup_{|x| \leq 2M} \left(|F(x)| + |F''(x)| + |F'''(x)|\right).$$

Siano $\|w_1\|_\alpha \leq M$ e $\|w_2\|_\alpha \leq M$. Posto $w_s = (1 - s)w_1 + sw_2$, risulta

$$G(w_2) - G(w_1) = (w_2 - w_1) \int_0^1 (F'(u_0 + w_s) - F'(u_0))ds,$$

e quindi

$$\|G(w_2) - G(w_1)\|_\infty \leq k\,\|w_2 - w_1\|_\infty(\|w_1\|_\infty + \|w_2\|_\infty). \tag{7.12}$$

Per stimare la seminorma hölderiana di G, osserviamo che, puntualmente, possiamo scrivere

$$F'(u_0+w_s)-F'(u_0)=\int_{u_0}^{w_s+u_0}F''(t)dt=w_s\int_0^1F''(u_0+rw_s)dr,$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}[F'(u_0+w_s)-F'(u_0)]_\alpha \quad &\leq \quad \|w_s\|_\infty\left[\int_0^1F''(u_0+rw_s)dr\right]_\alpha \\ &\quad +[w_s]_\alpha\left\|\int_0^1F''(u_0+rw_s)dr\right\|_\infty \end{aligned} \tag{7.13}$$

Risulta

$$\begin{aligned}&\Big(F''(u_0(x)+rw_s(x))-F''(u_0(y)+rw_s(y))\Big)\\ &\qquad\qquad = F'''(\xi)\big(u_0(x)-u_0(y)+r(w_s(x)-w_s(y)\big)\end{aligned}$$

e quindi

$$\left[\int_0^1F''(u_0+rw_s)dr\right]_\alpha\leq k\,([u_0]_\alpha+[w_s]_\alpha).$$

Riprendendo la stima (7.13), abbiamo

$$[F'(u_0+w_s)-F'(u_0)]_\alpha\leq\|w_s\|_\infty k\,([u_0]_\alpha+[w_s]_\alpha)+[w_s]_\alpha\,k$$

da cui

$$\begin{aligned}\left[\int_0^1(F'(u_0+w_s)-F'(u_0))ds\right]_\alpha \quad &\leq \quad k\,\|w_s\|_\infty([u_0]_\alpha+[w_s]_\alpha)+k\,[w_s]_\alpha\\ &\leq \quad k\,(\|w_1\|_\alpha+\|w_2\|_\alpha)(\|w_1\|_\alpha+\|w_2\|_\alpha\\ &\qquad +\|u_0\|_\alpha)+k\,(\|w_1\|_\alpha+\|w_2\|_\alpha)\\ &\leq \quad k(3M+1)\,(\|w_1\|_\alpha+\|w_2\|_\alpha).\end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned}[G(w_2)-G(w_1)]_\alpha \quad &\leq \quad [w_2-w_1]_\alpha\left\|\int_0^1(F'(u_0+w_s)-F'(u_0))ds\right\|_\infty\\ &\qquad +\|w_2-w_1\|_\infty\left[\int_0^1(F'(u_0+w_s)-F'(u_0))ds\right]_\alpha\\ &\leq \quad k\,[w_2-w_1]_\alpha(\|w_1\|_\infty+\|w_2\|_\infty)\\ &\qquad +k(3M+1)\|w_2-w_1\|_\infty(\|w_1\|_\alpha+\|w_2\|_\alpha)\\ &\leq \quad k_1\|w_2-w_1\|_\alpha(\|w_1\|_\alpha+\|w_2\|_\alpha).\end{aligned}$$

Infine, tenendo conto di (7.12), abbiamo

$$\|G(w_2) - G(w_1)\|_\alpha \leq k_2 \|w_2 - w_1\|_\alpha (\|w_1\|_\alpha + \|w_2\|_\alpha).$$

Tenendo conto del fatto che $G(0) = 0$, otteniamo

$$\|G(w)\|_\alpha \leq k_2 \|w\|_\alpha^2. \tag{7.14}$$

A questo punto notiamo che le stime di Schauder per l'operatore $\Delta - tF'(u_0)$ (vedi (5.6.5)) sono indipendenti da $t \in [0,1]$ e, siccome $R_t(u) = \big(1 - (\Delta - tF'(u_0)\big)^{-1}$, risulta

$$\|R_t(w)\|_\alpha \leq C(\Omega, \alpha)(\|(t_0 - t)F(u_0)\|_\alpha + \|G(w)\|_\alpha) \tag{7.15}$$

e

$$\|R_t(w_2) - R_t(w_1)\|_\alpha \leq C(\Omega, \alpha) \|G(w_2) - G(w_1)\|_\alpha.$$

Vogliamo scegliere a questo punto $\delta, \delta_1 > 0$ tali che se $|t - t_0| \leq \delta_1$ allora R_t mappa B_δ in B_δ ed è una contrazione. Se $\|w\|_\alpha \leq \delta$ e $|t - t_0| \leq \delta_1$, allora tenendo conto delle stime (7.14) e (7.15) abbiamo

$$\|R_t(w)\|_\alpha \leq C(\Omega, \alpha)(\delta_1 \|F(u_0)\|_\alpha + k_2 \delta^2),$$

per cui scegliendo δ, δ_1 sufficientemente piccoli otteniamo $\|R_t(w)\|_\alpha \leq \delta$. Se $\|w_1\|_\alpha \leq \delta$, $\|w_2\|_\alpha \leq \delta$ allora

$$\|R_t(w_2) - R_t(w_1)\|_\alpha \leq 2\, C(\Omega, \alpha) \delta k_2 \|w_2 - w_1\|_\alpha$$

e quindi basta prendere δ in modo che $2\, C(\Omega, \alpha)\delta k_2 < 1$ affinchè R_t sia una contrazione. Pertanto esiste un'unica funzione v_t tale che $R_t(v_t) = v_t$, ossia un'unica soluzione dell'equazione (7.11), per ogni $|t - t_0| < \delta_1$. Ciò dimostra che $u_t = u_0 + v_t$ è la soluzione di (P_t) per ogni $|t - t_0| < \delta_1$ e quindi l'insieme E è anche aperto. Per connessione, deve essere $E = [0,1]$ e questo conclude la dimostrazione nell'ipotesi che $F \in C^3(\mathbb{R})$.

Nel caso generale, basta approssimare F mediante convoluzione. Poniamo pertanto

$$\widetilde{F}_\varepsilon(x) = (F * \phi_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x - y)\phi_\varepsilon(y)dy \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

dove (ϕ_ε) è una famiglia di mollificatori: $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$ e supp $\phi \subset B_1(0)$. E' chiaro $\widetilde{F}_\varepsilon(x) \to F(x)$ e $\widetilde{F}'_\varepsilon(x) = (F' * \phi_\varepsilon)(x) \to F'(x)$, per $\varepsilon \to 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre $\widetilde{F}_\varepsilon(x) \geq 0$. Per quanto dimostrato, in corrispondenza di un dato $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ fissato, esistono funzioni u_ε che soddisfano

$$\begin{cases} u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + F_\varepsilon(u_\varepsilon) = f & \text{in } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $F_\varepsilon(x) = \widetilde{F}_\varepsilon(x) - \widetilde{F}_\varepsilon(0)$. Inoltre, per la Proposizione 7.4.6 valgono le stime

$$\|u_\varepsilon\|_{2,\alpha} \le \mathcal{M}_\varepsilon(\|f\|_\alpha). \tag{7.16}$$

Ripercorrendo la dimostrazione della stessa proposizione si vede che la dipendenza di $\mathcal{M}_\varepsilon$ da ε è attraverso la funzione $\mathcal{N}_\varepsilon(s) = \sup_{|t|\le s}(|F_\varepsilon(t)| + |F'_\varepsilon(t)|)$. Ma è immediato verificare che $\mathcal{N}_\varepsilon(s) \le 2\mathcal{N}(s+1)$ per ε piccolo, per cui la stima (7.16) implica che la famiglia (u_ε) è limitata in $C^{2,\alpha}(\Omega)$. Applicando il teorema di Ascoli-Arzelà e procedendo in modo standard si costruisce una successione (u_n) che converge alla soluzione del problema (7.8).

Esempio 7.4.8 Consideriamo la seguente equazione quasi lineare in $\mathbb{R}^N$

$$u - \Delta u - F(\nabla u) = f. \tag{7.17}$$

Il nostro obiettivo è provare il seguente teorema

Teorema 7.4.9 *Se $F \in C^2(\mathbb{R}^N)$ allora per ogni $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ esiste un'unica $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ soluzione di (7.17).*

Vale il seguente principio del massimo.

Lemma 7.4.10 (Principio del massimo) *Sia $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con $F(0) = 0$. Sia $u \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ soluzione dell'equazione $u - \Delta u - F(\nabla u) = f$, dove $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$. Allora*

$$\|u\|_\infty \le \|f\|_\infty.$$

DIM. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, possiamo scrivere

$$F(y) - F(x) = (y - x) \cdot \int_0^1 (\nabla F)(x + t(y - x))dt,$$

da cui segue, prendendo $x = 0$ e tenendo conto che $F(0) = 0$

$$F(\nabla u) = \nabla u \cdot \int_0^1 (\nabla F)(t\nabla u)dt$$

puntualmente in $\mathbb{R}^N$. Pertanto l'equazione soddisfatta da u diventa $u - \Delta u - G \cdot \nabla u = f$, dove la funzione $G(x) = \int_0^1 (\nabla F)(t\nabla u(x))dt$ è continua e limitata in $\mathbb{R}^N$.

Sia $v(x) = \gamma + |x|^2$, $x \in \mathbb{R}^N$. Scegliendo $\gamma > 0$ abbastanza grande si trova che

$$\Delta v + G \cdot \nabla v \le v.$$

Sia $u_\varepsilon = u - \varepsilon v$, $\varepsilon > 0$. Allora u_ε ammette massimo in qualche $x_0 \in \mathbb{R}^N$, dove risulta

$$\Delta u_\varepsilon(x_0) + G(x_0) \cdot \nabla u_\varepsilon(x_0) \le 0$$

e

$$\begin{aligned}
(u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon - G\cdot\nabla u_\varepsilon)(x_0) &= (u-\varepsilon v)(x_0) - (\Delta u - \varepsilon\Delta v)(x_0)\\
&\quad -G(x_0)\cdot(\nabla u(x_0) - \varepsilon\nabla v(x_0))\\
&= f(x_0) - \varepsilon(v - \Delta v - G\cdot\nabla v)(x_0)\\
&\le f(x_0).
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
u(x) - \varepsilon v(x) &= u_\varepsilon(x) \le u_\varepsilon(x_0) \le u_\varepsilon(x_0) - \Delta u_\varepsilon(x_0) - G(x_0)\cdot\nabla u_\varepsilon(x_0)\\
&\le f(x_0) \le \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Mandando $\varepsilon \to 0$ si ottiene che $u(x) \le \|f\|_\infty$. La dimostrazione della disuguaglianza $u(x) \ge -\|f\|_\infty$ è analoga con $u + \varepsilon v$ al posto di $u - \varepsilon v$. $\square$

Corollario 7.4.11 *Se $u \in C_b^3(\mathbb{R}^N)$ risolve l'equazione $u - \Delta u - F(\nabla u) = f$ con $f \in C_b^1(\mathbb{R}^N)$ e $F \in C^2(\mathbb{R}^N)$ allora*

$$\|\nabla u\|_\infty \le \|\nabla f\|_\infty.$$

DIM. Derivando l'equazione differenziale rispetto a x_i e ponendo $v = D_i u$ si vede facilmente che v soddisfa

$$v - \Delta v - G\cdot\nabla v = D_i f,$$

dove $G(x) = \nabla F(\nabla u(x))$. Applicando il Lemma 7.4.10, si ha che $\|D_i u\|_\infty \le \|D_i f\|_\infty$, da cui segue immediatamente la tesi. $\square$

Com'è naturale, a questo punto cerchiamo delle stime a priori al fine di provare l'esistenza di una soluzione per l'equazione (7.17).

D'ora in avanti assumiamo che $F \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Introduciamo la funzione

$$\mathcal{S}(t) = \sup_{|x|\le t}\{|F(x)| + |\nabla F(x)| + |D^2F(x)|\},$$

dove D^2F denota l'hessiano di F.

Proposizione 7.4.12 *Esiste una funzione $\mathcal{M} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, dipendente da $\mathcal{S}$, α e N, tale che per ogni $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ risulta*

$$\|u\|_{3,\alpha} \le \mathcal{M}(\|f\|_{1,\alpha}),$$

dove $f = u - \Delta u - F(\nabla u)$.

DIM. Sia $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Applicando la stima (5.49) con $k = 1$, $\lambda = 1$, $A = \Delta$ otteniamo

$$\|u\|_{3,\alpha} \le C(\alpha)\|u - \Delta u\|_{1,\alpha},$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\|u\|_{3,\alpha} &\leq C(\alpha)(\|u-\Delta u-F(\nabla u)\|_{1,\alpha}+\|F(\nabla u)\|_{1,\alpha})\\ &= C(\alpha)(\|f\|_{1,\alpha}+\|F(\nabla u)\|_{1,\alpha}). \end{aligned}\tag{7.18}$$

Stimiamo singolarmente i termini che definiscono la norma $\|F(\nabla u)\|_{1,\alpha}$, ovvero, passando ad una norma equivalente, $\|F(\nabla u)\|_\infty$ e $[\nabla(F(\nabla u))]_\alpha$. Tenendo conto del Corollario 7.4.11 e del fatto che la funzione $\mathcal{S}$ è crescente, si ha

$$\|F(\nabla u)\|_\infty \leq \mathcal{S}(\|\nabla u\|_\infty) \leq \mathcal{S}(\|\nabla f\|_\infty) \leq \mathcal{S}(\|f\|_{1,\alpha}). \tag{7.19}$$

Stimiamo ora la seminorma hölderiana di $\nabla(F(\nabla u) = D^2u \cdot \nabla F(\nabla u)$. Applicando la disuguaglianza triangolare e il teorema di Lagrange in forma debole, risulta

$$\begin{aligned}|\nabla(F(\nabla u))(x)-\nabla(F(\nabla u))(y)| &\leq |(D^2u(x)-D^2(y))(\nabla F)(\nabla u(x))|\\ &\quad +|D^2u(y)\big(\nabla F(\nabla u(x))-\nabla F(\nabla u(y))\big)|\\ &\leq [D^2u]_\alpha|x-y|^\alpha\mathcal{S}(\|\nabla u\|_\infty)\\ &\quad +\|D^2u\|_\infty\,\mathcal{S}(\|\nabla u\|_\infty)|\nabla u(x)-\nabla u(y)|\\ &\leq \|u\|_{2,\alpha}\mathcal{S}(\|\nabla u\|_\infty)(1+[\nabla u]_\alpha)|x-y|^\alpha\\ &\leq \|u\|_{2,\alpha}\mathcal{S}(\|f\|_{1,\alpha})(1+[\nabla u]_\alpha)|x-y|^\alpha\end{aligned}$$

e quindi

$$[\nabla(F(\nabla u))]_\alpha \leq \mathcal{S}(\|f\|_{1,\alpha})(1+[\nabla u]_\alpha)\|u\|_{2,\alpha}.$$

Tenendo conto delle stime (7.4) e (7.19) si ha

$$\begin{aligned}[\nabla u]_\alpha &\leq C(\alpha,N)\|u-\Delta u\|_\infty \leq C(\alpha,N)(\|f\|_\infty+\|F(\nabla u)\|_\infty)\\ &\leq C(N,\alpha)(\|f\|_{1,\alpha}+\mathcal{S}(\|f\|_{1,\alpha})).\end{aligned}$$

Pertanto

$$[\nabla(F(\nabla u))]_\alpha \leq C(\alpha,N)\widetilde{\mathcal{S}}(\|f\|_{1,\alpha})\|u\|_{2,\alpha}, \tag{7.20}$$

per qualche nuova funzione $\widetilde{\mathcal{S}}$.

D'altronde per il principio di massimo classico, possiamo scrivere

$$\|u\|_\infty \leq \|u-\Delta u\|_\infty. \tag{7.21}$$

Tenendo conto di (7.19) e (7.20) la (7.18) implica

$$\|u\|_{3,\alpha} \leq C(N,\alpha)\Big(\|f\|_{1,\alpha}+\mathcal{S}_1(\|f\|_{1,\alpha})+\mathcal{S}_2(\|f\|_{1,\alpha})\|u\|_{2,\alpha}\Big)$$

per opportune funzioni $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$. Interpolando $\|u\|_{2,\alpha}$ tra $\|u\|_{3,\alpha}$ e $\|u\|_\infty$ si ottiene

$$\|u\|_{3,\alpha} \leq C(N,\alpha)\mathcal{S}_3(\|f\|_{1,\alpha})\|u\|_\infty.$$

Infine tenendo conto di (7.21) e ancora di (7.19) possiamo maggiorare $\|u\|_\infty$ con una funzione dipendente da $\|f\|_{1,\alpha}$ e concludere pertanto la dimostrazione. □

Veniamo ora al teorema di esistenza.

Teorema 7.4.13 *Assumiamo $F \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Allora per ogni $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ esiste un'unica $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ tale che $u - \Delta u - F(\nabla u) = f$.*

DIM. La dimostrazione dell'unicità è identica a quella della Proposizione 7.4.5. Per provare l'esistenza, supponiamo dapprima $F \in C^3(\mathbb{R}^N)$. Sia $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ fissata. Introduciamo l'insieme

$$E = \left\{ t \in [0,1] \mid u - \Delta u - tF(\nabla u) = f \text{ ammette soluzione in } C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Siccome $0 \in E$, $E \neq \emptyset$.

Proviamo che E è chiuso. Sia $(t_n) \subseteq E$ tale che $t_n \to t_0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $u_n \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ tale che $u_n - \Delta u_n - t_n F(\nabla u_n) = f$. Per la Proposizione 7.4.12, risulta

$$\|u_n\|_{3,\alpha} \leq \mathcal{M}(\|f\|_{1,\alpha}),$$

dove $\mathcal{M}$ si è potuta scegliere indipendente da n. Applicando il teorema di Ascoli-Arzelà si trova un'estratta (u_{nk}) che converge uniformemente sui compatti, insieme alle derivate fino al terzo ordine, ad una certa funzione $u \in C^3(\mathbb{R}^N)$. Siccome le seminorme hölderiane delle funzioni approssimanti sono equilimitate, si ottiene anche che $u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Infine, passando puntualmente al limite nelle equazioni soddisfatte da u_{nk}, si vede che u è soluzione dell'equazione corrispondente a t_0, per cui $t_0 \in E$.

Proviamo adesso che E è aperto. Sia $t_0 \in E$ e sia u_0 la corrispondente soluzione. Sia $|t - t_0| < \delta_1$, dove $\delta_1 > 0$ verrà scelto in seguito. Cerchiamo la soluzione relativa a t linearizzando l'equazione intorno a u_0. Presa pertanto una funzione della forma $u = u_0 + v$, risulta che $u - \Delta u - tF(\nabla u) = f$ se e solo se v soddisfa

$$\begin{aligned} & v - \Delta v - t(\nabla F)(\nabla u_0) \cdot \nabla v = \\ & \qquad (t - t_0)F(\nabla u_0) + t\Big(F(\nabla u_0 + \nabla v) - F(\nabla u_0) - (\nabla F)(\nabla u_0) \cdot \nabla v\Big). \end{aligned}$$

Studiamo allora l'equazione lineare

$$\begin{aligned} & v - \Delta v - t(\nabla F)(\nabla u_0) \cdot \nabla v = \\ & \qquad (t - t_0)F(\nabla u_0) + t\Big(F(\nabla u_0 + \nabla w) - F(\nabla u_0) - (\nabla F)(\nabla u_0) \cdot \nabla w\Big). \end{aligned} \tag{7.22}$$

Gli argomenti della dimostrazione della Proposizione 7.4.12 provano che se $z \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ allora $F(\nabla z) \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e $\|F(\nabla z)\|_{1,\alpha}$ si può stimare mediante $\mathcal{S}(\|z - \Delta z - F(\nabla z)\|_{1,\alpha})$ e $\|z\|_{2,\alpha}$. Analogamente allora se $w \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ allora la funzione a secondo membro in (7.22) è in $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Applicando quindi i risultati della teoria lineare, si trova un'unica soluzione $v \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ dell'equazione (7.22). Risulta così ben definito il seguente operatore (non lineare)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_t : C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N) &\to C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N) \\ w &\longmapsto v \end{aligned}$$

Il nostro obiettivo a questo punto è trovare un punto fisso per $\mathcal{R}_t$.

Introduciamo la funzione (definita puntualmente)

$$\begin{aligned} G(w) &= F(\nabla u_0 + \nabla w) - F(\nabla u_0) - (\nabla F)(\nabla u_0)\cdot \nabla w \\ &= \nabla w \cdot \int_0^1 \Big((\nabla F)(\nabla u_0 + s\nabla w) - (\nabla F)(\nabla u_0)\Big) ds \\ &= \nabla w \cdot H(w). \end{aligned}$$

Se $\|u_0\|_{1,\alpha} \leq M$, scegliamo $w_1, w_2 \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ tali che $\|w_1\|_{1,\alpha}, \|w_2\|_{1,\alpha} \leq M$. Allora risulta

$$G(w_1) - G(w_2) = \nabla w_1 \cdot \Big(H(w_1) - H(w_2)\Big) + (\nabla w_1 - \nabla w_2)\cdot H(w_2)$$

e quindi

$$\begin{aligned} [G(w_1) - G(w_2)]_\alpha \leq\; & [\nabla w_1]_\alpha \|H(w_1) - H(w_2)\|_\infty \\ & + \|\nabla w_1\|_\infty [H(w_1) - H(w_2)]_\alpha \\ & + [\nabla w_1 - \nabla w_2]_\alpha \|H(w_2)\|_\infty \\ & + \|\nabla w_1 - \nabla w_2\|_\infty [H(w_2)]_\alpha. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Si ha

$$H(w_1) - H(w_2) = \int_0^1 \Big((\nabla F)(\nabla u_0 + s\nabla w_1) - (\nabla F)(\nabla u_0 + s\nabla w_2)\Big) ds$$

per cui, applicando il teorema di Lagrange in forma debole otteniamo

$$\|H(w_1) - H(w_2)\|_\infty \leq K \|\nabla w_1 - \nabla w_2\|_\infty, \tag{7.24}$$

con $K = \sup_{|\xi|\leq 4M} |(D^2F)(\xi)| + \sup_{|\xi|\leq 4M} |(D^3F)(\xi)|$. Per stimare la seminorma hölderiana di $H(w_1) - H(w_2)$, che è una funzione vettoriale, consideriamone la componente i-sima

$$\int_0^1 \Big((D_iF)(\nabla u_0 + s\nabla w_1) - (D_iF)(\nabla u_0 + s\nabla w_2)\Big) ds.$$

Si ha

$$\begin{aligned} & D_iF(\nabla u_0 + s\nabla w_1) - (D_iF)(\nabla u_0 + s\nabla w_2) = \\ & = s(\nabla w_1 - \nabla w_2)\cdot \int_0^1 \Big(\nabla (D_iF)\Big)(\nabla u_0 + s\nabla w_1 + r\, s(\nabla w_1 - \nabla w_2)) dr \\ & := s(\nabla w_1 - \nabla w_2)\cdot J(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Perciò risulta

$$\begin{aligned} & [D_iF(\nabla u_0 + s\nabla w_1) - (D_iF)(\nabla u_0 + s\nabla w_2)]_\alpha \leq \\ & \qquad \|\nabla w_1 - \nabla w_2\|_\infty [J(w_1, w_2)]_\alpha + [\nabla w_1 - \nabla w_2]_\alpha \|J(w_1, w_2)\|_\infty. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Per stimare $[J(w_1,w_2)]_\alpha$ osserviamo che

$$\Big[\Big(\nabla(D_iF)\Big)(\nabla u_0+s\nabla w_1+r\,s(\nabla w_1-\nabla w_2))\Big]_\alpha \le \\ \sup_{|\xi|\le 4M}|(D^3F)(\xi)|\big([\nabla u_0]_\alpha+[\nabla w_1]_\alpha+[\nabla w_1-\nabla w_2]_\alpha\big)\le 4MK$$

pertanto, riprendendo (7.25) abbiamo

$$[H(w_1)-H(w_2)]_\alpha \le 4MK\|\nabla w_1-\nabla w_2\|_\infty + K[\nabla w_1-\nabla w_2]_\alpha. \tag{7.26}$$

Se $w_1=0$ si deducono

$$[H(w)]_\alpha \le 4MK\|\nabla w\|_\infty + K[\nabla w]_\alpha \tag{7.27}$$

e

$$\|H(w)\|_\infty \le K\|\nabla w\|_\infty. \tag{7.28}$$

Usando le stime (7.24), (7.26), (7.27) e (7.28) in (7.23) si ottiene

$$\begin{aligned}
[G(w_1)-G(w_2)]_\alpha \;\le\;& K\Big(\|w_1\|_{1,\alpha}+\|w_2\|_{1,\alpha}\Big)\|w_1-w_2\|_\infty\\
&+\Big(\|w_1\|_{1,\alpha}+\|w_2\|_{1,\alpha}\Big)\Big(4KM\|w_1-w_2\|_{1,\alpha}\\
&+K\|w_1-w_2\|_{1,\alpha}\Big)\\
&+K\,\|w_1-w_2\|_{1,\alpha}\Big(\|w_1\|_{1,\alpha}+\|w_2\|_{1,\alpha}\Big)\\
&+\|w_1-w_2\|_{1,\alpha}\Big(4KM(\|w_1\|_{1,\alpha}+\|w_2\|_{1,\alpha})\\
&+M(\|w_1\|_{1,\alpha}+\|w_2\|_{1,\alpha})\Big)\\
\le\;& K'\|w_1-w_2\|_{2,\alpha}(\|w_1\|_{2,\alpha}+\|w_2\|_{2,\alpha}).
\end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned}
\|G(w_1)-G(w_2)\|_\infty \;\le\;& \|\nabla w_1\|_\infty\|H(w_1)-H(w_2)\|_\infty\\
&+\|\nabla w_1-\nabla w_2\|_\infty\|H(w_2)\|_\infty\\
\le\;& K''\|w_1-w_2\|_{2,\alpha}(\|w_1\|_{2,\alpha}+\|w_2\|_{2,\alpha}).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\|G(w_1)-G(w_2)\|_\alpha \le \tilde K\|w_1-w_2\|_{2,\alpha}(\|w_1\|_{2,\alpha}+\|w_2\|_{2,\alpha}). \tag{7.29}$$

e

$$\|G(w)\|_\alpha \le \tilde k\|w\|^2_{2,\alpha}. \tag{7.30}$$

Siccome

$$R_t(w)=\Big(1-\Delta-t(\nabla F)(\nabla u_0)\cdot\nabla\Big)^{-1}\Big((t-t_0)F(\nabla u_0)+t\,G(w)\Big)$$

usando la stima sul risolvente da $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ in $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, se $|t-t_0|<\delta_1$ e $\|w\|_{2,\alpha}\le\delta$ risulta

$$\begin{aligned}\|R_t(w)\|_{2,\alpha} &\le C(\|F(\nabla u_0)\|_\alpha|t-t_0|+t\|G(w)\|_\alpha)\\ &\le C(\|F(\nabla u_0)\|_\alpha\delta_1+\tilde{K}\delta^2).\end{aligned}$$

Scegliamo δ_1 abbastanza piccolo affinchè il secondo membro della disuguaglianza di sopra sia minore di δ. In questo modo è garantito che R_t mappa $\overline{B}_\delta=\{z\in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N):\|z\|_{2,\alpha}\le\delta\}$ in sè. Poi

$$\|R_t(w_1)-R_t(w_2)\|_{2,\alpha}\le C\|G(w_1)-G(w_2)\|_\alpha\le C\tilde{K}\|w_1-w_2\|_{2,\alpha}\,2\delta.$$

Adesso scegliamo δ affinchè $2C\tilde{K}\delta<1$ in modo da avere che R_t è una contrazione. Allora esiste un'unica funzione $v\in\overline{B_\delta}$ tale che $R_t(v)=v\in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. La funzione $u=u_0+v$ è la soluzione richiesta.

L'ultimo punto della dimostrazione, cioè il caso generale $F\in C^2(\mathbb{R}^N)$ si prova per approssimazione come nell'esempio precedente.