CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

Oggetto del nostro studio sono operatori differenziali lineari ellittici del secondo ordine

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_i u(x) + c(x)u(x). \tag{1.1}$$

Assumiamo che i coefficienti a_{ij},b_i e c siano funzioni reali limitate e uniformemente continue in Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ e, senza restrizione, che la matrice (a_{ij}) dei coefficienti del secondo ordine sia simmetrica (cioè $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j). Richiediamo inoltre che l'operatore soddisfi la condizione di ellitticità

$$\exists \quad \nu_0 > 0 \quad \text{t.c.} \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu_0|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Osserviamo che la (1.2) dà una stima dal basso sulla forma quadratica associata alla matrice (a_{ij}), mentre la limitatezza dei coefficienti implica facilmente una stima dall'alto

$$\left| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \right| \leq M \sum_{i,j=1}^{N} |\xi_i\xi_j| \leq MN^2|\xi|^2.$$

Un operatore che soddisfa le condizioni di sopra si dice **uniformemente ellittico**.

E' utile per il seguito richiamare la seguente definizione.

Definizione 1.0.1 *Diciamo che un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ è di* **classe $\mathbf{C^k}$**, *con $k \in \mathbb{N}$, se per ogni $x \in \partial\Omega$ esistono U intorno di x in $\mathbb{R}^N$ e $H : \overline{B}_R \to \overline{U}$ diffeomorfismo di classe C^k, tali che*

$$U \cap \Omega = H(B_R^+) \quad e \quad U \cap \partial\Omega = H(\overline{B}_R^+ \cap \{x_N = 0\}).$$

La coppia (U, H) *è detta* **carta locale** *su* Ω.

Osservazione 1.0.2 Componendo eventualmente con un'omotetia, si può sempre prendere $R = 1$ nella definizione precedente.

1.1 Alcuni controesempi all'esistenza e alla regolarità rispetto alla norma uniforme di soluzioni di equazioni ellittiche

L'interesse verso operatori come quello appena introdotto è legato soprattutto alla risoluzione di problemi al contorno del tipo

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

La scelta dello spazio funzionale al quale deve appartenere il dato f ed entro il quale cercare la soluzione è fondamentale per la risolubilità del problema. Per esempio, esso è mal posto in spazi di funzioni continue, nel senso che se $f \in C(\overline{\Omega})$ allora non è assicurata l'esistenza di una soluzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$, neanche quando come A si considera il Laplaciano Δ. L'esempio che segue mira a chiarire questo punto, mostrando peraltro che il problema è di regolarità interna.

Esempio 1.1.1 Poniamoci in $\mathbb{R}^2$ e costruiamo intanto una funzione $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che u_{xx} e u_{yy} sono continue nell'origine, mentre u_{xy} non lo è. Definiamo

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{4^k} (\eta P)(2^k x, 2^k y) \tag{1.4}$$

dove $P(x, y) = xy$, $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ è tale che $\eta \equiv 1$ in $B_1(0)$, $\eta \equiv 0$ in $B_2(0)^c$ e $0 \le \eta \le 1$, e la successione (c_k) è infinitesima con $0 \le c_k \le 1$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \infty$.

Per come sono stati scelti P ed η, il prodotto ηP è una funzione limitata con tutte le derivate limitate, perciò la serie (1.4) converge totalmente insieme alla serie delle derivate prime; ciò prova che $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Lo stesso argomento non si estende alla serie delle derivate seconde, perciò occorre fare un discorso locale: sia $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Posto $r_0 = |(x_0, y_0)|$, denotiamo con U la sfera di raggio $\frac{r_0}{2}$ centrata in (x_0, y_0), (osserviamo che $(0, 0) \notin U$). In U la serie che definisce u risulta essere una somma finita (perchè da un certo k in poi vale $2^k r_0 \ge 2$), pertanto u è C^∞ al di fuori dell'origine.

A questo punto per studiare il comportamento delle derivate seconde di u vicino allo zero, dividiamo $B_1(0)$ in corone circolari aperte $C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2^{r+2}} < |(x,y)| < \frac{1}{2^r}\}$ (non disgiunte). Per (x,y) in C_r risulta

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{k=0}^{r+2} \frac{c_k}{4^k}(\eta P)(2^k x, 2^k y) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \frac{c_k}{4^k} 4^k xy + \frac{c_{r+1}}{4^{r+1}}(\eta P)(2^{r+1}x, 2^{r+1}y) \\ &\quad + \frac{c_{r+2}}{4^{r+2}}(\eta P)(2^{r+2}x, 2^{r+2}y) \end{aligned}$$

e quindi

$$u_{xx}(x,y) = c_{r+1}(\eta P)_{xx}(2^{r+1}x, 2^{r+1}y) + c_{r+2}(\eta P)_{xx}(2^{r+2}x, 2^{r+2}y) \to 0$$

se $(x,y) \to 0$. Ne segue che esiste $u_{xx}(0,0)$ ed è pari a 0.

Con le stesse argomentazioni si ottiene che $u_{yy}(0,0) = 0$. Invece

$$u_{xy}(x,y) = \sum_{k=0}^{r} c_k + c_{r+1}(\eta P)_{xy}(2^{r+1}x, 2^{r+1}y) + c_{r+2}(\eta P)_{xy}(2^{r+2}x, 2^{r+2}y)$$

esplode per $(x,y) \to (0,0)$ $(r \to \infty)$, perchè per ipotesi il primo termine tende a $+\infty$ e gli altri due sono limitati.

A questo punto poniamo $\Omega := B_r(0)$, $f = \Delta u \in C(\Omega)$. Allora non esiste alcuna funzione v in $C^2(B_r(0))$ tale che $\Delta v = f$.

Se per assurdo esistesse una tale v, si avrebbe $\Delta(u - v) = 0$ in $B_r(0) \setminus \{(0,0)\}$ .Quindi $u - v$ sarebbe armonica in $B_r(0) \setminus \{(0,0)\}$ e limitata, come tale prolungabile ad una funzione armonica in tutto $B_r(0)$. Tale estensione sarebbe pertanto di classe $C^\infty(B_r(0))$ e ciò implicherebbe che la stessa u è $C^2(B_r(0))$, contro quanto provato in precedenza.

L'esempio appena illustrato mostra anche che la possibilità di tenere sotto controllo le singole derivate pure non permette di controllare la limitatezza della derivata mista e anticipa in parte il prossimo risultato generale.

Teorema 1.1.2 (Ornstein) *Siano B, $A_1, \cdots, A_r$, operatori differenziali a coefficienti costanti, omogenei di grado m e linearmente indipendenti. Allora non esiste alcuna costante C tale che per ogni u in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ risulti:*

$$\|Bu\|_\infty \leq C(\sup_{1 \leq i \leq r} \|A_i u\|_\infty + \|u\|_\infty).$$

DIM. Definiamo per ogni intero positivo n la funzione

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{2^{mk}}(\eta P)(2^k x),$$

dove P è un polinomio omogeneo di grado m tale che $B(P) = 1$ e $A_i(P) = 0$ per ogni i (per la sua esistenza si veda l'Esercizio 1.1.4), mentre i coefficienti (c_k) e la funzione η sono presi come nell'esempio precedente. Poichè sono definite come somme finite di funzioni di classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, le u_n sono in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Dalla definizione di u_n si vede immediatamente che

$$|u_n(x)| \leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{mk}}\right) \|\eta P\|_\infty =: K,$$

ossia la successione (u_n) è limitata uniformemente in n. Inoltre, se $|x| \geq 1$ allora $u_n(x) = 0$. Se $|x| < 1$, esiste $r \in \mathbb{N}_0$ tale che $\frac{1}{2^{r+2}} < |x| < \frac{1}{2^r}$. Ne segue che (convenendo di porre $c_k = 0$ se $n < r \leq r + 2$)

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sum_{k=0}^{r+2} \frac{c_k}{2^{mk}} (\eta P)(2^k x) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \frac{c_k}{2^{mk}} 2^{mk} P(x) + \frac{c_{r+1}}{2^{(r+1)m}} (\eta P)(2^{r+1} x) \\ &+ \frac{c_{r+2}}{2^{(r+2)m}} (\eta P)(2^{r+2} x). \end{aligned}$$

Quindi, tenendo conto della scelta di P e del fatto che ogni A_i è un operatore differenziale omogeneo di grado m, otteniamo che

$$(A_i u_n)(x) = c_{r+1} A_i(\eta P)(2^{r+1} x) + c_{r+2} A_i(\eta P)(2^{r+2} x)$$

e analogamente

$$(B u_n)(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k + c_{r+1} B(\eta P)(2^{r+1} x) + c_{r+2} B(\eta P)(2^{r+2} x).$$

Siccome ηP è una funzione limitata con tutte le derivate limitate e i coefficienti di A_i sono costanti, per ogni n, i, si ha

$$\|u_n\|_\infty + \|A_i u_n\|_\infty \leq K + 2C$$

dove $C = \max\limits_{1 \leq i \leq r} \{\|A_i(\eta P)\|_\infty, \|B(\eta P)\|_\infty\}$, mentre per $n = r$ risulta

$$\|B u_r\|_\infty \geq \left(\sum_{k=0}^{r} c_k\right) - 2C.$$

Mandando $r \to +\infty$, deduciamo l'asserto. $\square$

Esercizio 1.1.3 Provare che la funzione $f(x, y) = xy \lg(x^2 + y^2)$ in $B_1(0)$ ha le derivate seconde f_{xx} e f_{yy} limitate, mentre f_{xy} è illimitata.

Esercizio 1.1.4 Provare che dato X spazio vettoriale sul campo scalare K, se $f_1, ..., f_n, f$ sono funzionali lineari su X tali che $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker f$, allora esistono costanti $c_1, ..., c_n \in K$ per cui $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$. Dedurre da qui l'esistenza del polinomio usato nella dimostrazione del teorema di Ornstein.

1.2 ALCUNE STIME A PRIORI PER IL LAPLACIANO IN L^2

Il teorema di Ornstein è un risultato negativo di regolarità interna. Osserviamo però che la norma considerata nelle stime è la norma $\|\cdot\|_\infty$. La situazione migliora considerando la norma $\|\cdot\|_{L^2}$.

Proposizione 1.2.1 *Per ogni ϕ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ risulta*

(a) $\|\nabla\phi\|_{L^2} \le \|\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\Delta\phi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^N \|D_{ij}\phi\|_{L^2}^2 = \|\Delta\phi\|_{L^2}^2$.

In particolare $\|\phi\|_{H^2} \le C(\|\phi\|_{L^2} + \|\Delta\phi\|_{L^2})$.

DIM. Sia $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Per dimostrare (a) è sufficiente usare l'identità

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi\,\Delta\phi = -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2$$

e la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

Integrando per parti risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_{ii}\phi D_{jj}\phi = \int_{\mathbb{R}^N} (D_{ij}\phi)^2,$$

da cui sommando su i, j si ha subito (b).

Infine tenendo conto della disuguaglianza $ab \le 2^{-1}(a^2 + b^2)$ da (a) e (b) si deduce l'ultima stima. □

La proposizione che segue rappresenta un primo risultato di regolarità ellittica in norma L^2 per il Δ.

Proposizione 1.2.2 *Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ a supporto compatto; supponiamo $\Delta u = f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ nel senso delle distribuzioni. Allora $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.*

DIM. Sia $\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $0 \le \varrho \le 1$, $\int_{\mathbb{R}^N} \varrho = 1$, ϱ pari (quest'ultima ipotesi serve per non avere problemi di segno nelle convoluzioni). Se $\varepsilon > 0$, consideriamo le funzioni approssimanti $\varrho_\varepsilon = \varepsilon^{-N}\varrho(\frac{x}{\varepsilon})$. E' noto che $u_\varepsilon := \varrho_\varepsilon * u$ appartiene a $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e che converge a u in norma L^2, per $\varepsilon \to 0$.

Siccome $\Delta u_\varepsilon = \varrho_\varepsilon * f$ (vedi Esercizio 1.2.3), si ha anche che Δu_ε converge a f in L^2, quando $\varepsilon \to 0$.

Ponendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e indicando con (u_n) la successione così ottenuta, si ha per la Proposizione 1.2.1

$$\|u_n - u_m\|_{H^2} \leq C\,(\|u_n - u_m\|_{L^2} + \|\Delta u_n - \Delta u_m\|_{L^2}).$$

Quindi (u_n) è una successione di Cauchy in $H^2(\mathbb{R}^N)$, come tale convergente ad un elemento di $H^2(\mathbb{R}^N)$ che è necessariamente u, perchè $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Ciò conclude la dimostrazione. □

Esercizio 1.2.3 Provare che $\Delta(\varrho_\varepsilon * u) = \varrho_\varepsilon * f$ nel senso delle distribuzioni, se $\Delta u = f$ nel senso delle distribuzioni, $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

1.3 Alcune stime interpolative in L^2

In questa sezione proviamo alcune disuguaglianze interpolative che permettono di stimare la norma L^2 delle derivate prime di una funzione con le norme della funzione stessa e delle sue derivate seconde. Per dare un'idea, prima di procedere, consideriamo il caso semplice, unidimensionale con la norma uniforme.

Esempio 1.3.1 Per ogni $u \in C_b^2(\mathbb{R})$ risulta

$$\|u'\|_\infty \leq 2\,(\|u\|_\infty^{\frac{1}{2}}\|u''\|_\infty^{\frac{1}{2}}). \tag{1.5}$$

Sia $u \in C_b^2(\mathbb{R})$; se $h > 0$, applicando la formula di Taylor si ha

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(\xi),$$

da cui

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{1}{2}\,h\,u''(\xi),$$

e quindi

$$|u'(x)| \leq \frac{2}{h}\|u\|_\infty + \frac{h}{2}\|u''\|_\infty \qquad \forall\, h > 0. \tag{1.6}$$

Prendendo il valore di h che minimizza il secondo membro della (1.6) e sostituendolo nella stessa, si ha

$$|u'(x)| \leq 2\|u\|_\infty^{\frac{1}{2}}\|u''\|_\infty^{\frac{1}{2}}.$$

Dall'arbitrarietà di x segue la tesi.

Esercizio 1.3.2 Migliorare la costante con $\sqrt{2}$ nella stima (1.5) prendendo $u(x+h)-u(x-h)$.

Esercizio 1.3.3 Supponiamo che per ogni $v \in C_b^3(\mathbb{R})$ valga la stima

$$\|v'\|_\infty \le c\|v\|_\infty^\alpha \|v'''\|_\infty^\beta \tag{1.7}$$

con $c > 0$ costante. Determinare α e β.

Osservazione 1.3.4 La stima (1.6) con $h = \varepsilon$ oppure $h = \varepsilon^{-1}$ fornisce

$$\|u'\|_\infty \le \frac{1}{\varepsilon}\,\|u\|_\infty + \varepsilon\,\|u''\|_\infty$$

e

$$\|u'\|_\infty \le \varepsilon\,\|u\|_\infty + \frac{1}{\varepsilon}\,\|u''\|_\infty.$$

Lemma 1.3.5 *Per ogni u in $H^2(\mathbb{R}^N)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ risulta*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2. \tag{1.8}$$

DIM. Per densità, basta provare l'enunciato per funzioni u in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sia allora $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Tenendo conto della Proposizione 1.2.1 e della disuguaglianza $ab \le 2^{-1}(a^2+b^2)$, se $\eta > 0$ risulta

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\eta}|u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2\eta\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{1}{2\eta}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 + \frac{\eta}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2.
\end{aligned}$$

Prendendo $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$ si ottiene la tesi. □

Osservazione 1.3.6 Se al posto di $\mathbb{R}^N$ si considera un aperto qualunque Ω, allora la stessa tecnica dimostrativa consente di provare la (1.8) per $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (vedi Esercizio 1.3.15). Non è possibile, tuttavia, andare oltre e guadagnare una disuguaglianza simile in tutto $H^2(\Omega)$ (senza cioè alcuna condizione al bordo) anche se Ω è regolare. Per convincersene, basta considerare $\Omega = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$; allora una stima del tipo del tipo $\|u\|_{H^1} \le C(\|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2})$ non può valere perchè la successione di funzioni armoniche $u_n(x,y) = z^n$ ne è un chiaro controesempio.

Proposizione 1.3.7 *Sia Ω aperto limitato con bordo C^2 o $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Allora esiste una costante $c_\Omega > 0$ tale che per ogni $u \in H^2(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ risulta*

$$\|\nabla u\|^2_{L^2} \leq \varepsilon \|u\|^2_{H^2} + \frac{c_\Omega}{\varepsilon}\|u\|^2_{L^2}. \tag{1.9}$$

DIM. Data la regolarità di Ω, esiste E, operatore di estensione, cioè $E : H^2(\Omega) \to H^2(\mathbb{R}^N)$ lineare tale che

$$(Eu)_{|\Omega} = u \qquad \text{e} \qquad \|Eu\|_{H^k(\mathbb{R}^N)} \leq c\|u\|_{H^k(\Omega)}, \quad k = 0, 1, 2$$

dove $c = c(\Omega)$. Applicando il Lemma 1.3.5 a $v = Eu$, risulta

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\leq \varepsilon\|\Delta v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{4\,\varepsilon}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \varepsilon\|v\|^2_{H^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{4\,\varepsilon}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon\, c^2\|u\|^2_{H^2(\Omega)} + \frac{c^2}{4\,\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

da cui segue la tesi ponendo $\eta = \varepsilon\, c^2$ e $c_\Omega = c^4/4$. □

Corollario 1.3.8 *Nelle stesse ipotesi della proposizione precedente, per ogni $u \in H^2(\Omega)$ e per ogni $\eta \leq 1$ si ha*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \eta \int_\Omega |D^2 u|^2 + \frac{\widetilde{c}_\Omega}{\eta}\int_\Omega |u|^2 \tag{1.10}$$

dove $(D^2 u)$ denota la matrice hessiana di u.

DIM. Tenendo conto della Proposizione 1.3.7 si ha

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq \varepsilon\left(\int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |D^2 u|^2\right) + \frac{c_\Omega}{\varepsilon}\int_\Omega |u|^2 \\ &= \varepsilon\int_\Omega |D^2 u|^2 + \varepsilon\int_\Omega |\nabla u|^2 + \left(\frac{c_\Omega}{\varepsilon} + \varepsilon\right)\int_\Omega |u|^2, \end{aligned}$$

da cui, per $\varepsilon < 1$ segue

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\int_\Omega |D^2 u|^2 + \frac{c_\Omega + 1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\int_\Omega |u|^2.$$

Se $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ allora $\frac{1}{1-\varepsilon} \leq 2$ e quindi

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq 2\,\varepsilon\int_\Omega |D^2 u|^2 + \frac{2\widetilde{c}_\Omega}{\varepsilon}\int_\Omega |u|^2$$

Ponendo $\eta = 2\varepsilon \leq 1$ si ha quanto richiesto dall'enunciato. □

Il seguente lemma rappresenta un risultato di omogeneità: sottoponendo il dominio Ω ad un'omotetia, le costanti coinvolte rimangono sostanzialmente indipendenti dalla trasformazione. Consideriamo il caso della palla per semplicità.

Lemma 1.3.9 *Sia $k > 0$ costante tale che per ogni $\varepsilon \le 1$ e per ogni $u \in H^2(B_1)$ valga la disuguaglianza*

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_1)} \le \varepsilon \|D^2 u\|_{L^2(B_1)} + \frac{k}{\varepsilon}\|u\|_{L^2(B_1)}. \tag{1.11}$$

Allora per ogni $\eta \le R$ e $u \in H^2(B_R)$ risulta

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_R)} \le \eta \|D^2 u\|_{L^2(B_R)} + \frac{k}{\eta}\|u\|_{L^2(B_R)}. \tag{1.12}$$

DIM. Presa $u \in H^2(B_R)$, definiamo $v(x) = u(Rx)$, per $|x| \le 1$. Allora $v \in H^2(B_1)$ e

$$\nabla v(x) = R\,\nabla u(Rx) \quad \text{e} \quad D^2 v(x) = R^2 D^2 u(Rx).$$

Scrivendo la (1.11) per v e cambiando variabile negli integrali otteniamo

$$R\,\|\nabla u\|_{L^2(B_R)} \le \varepsilon\, R^2\, \|D^2 u\|_{L^2(B_R)} + \frac{k}{\varepsilon}\|u\|_{L^2(B_R)},$$

da cui segue la tesi, dopo aver diviso per R e aver posto $\eta = \varepsilon\, R$. □

Il seguente lemma sarà utile nella dimostrazione del Teorema 1.3.12.

Lemma 1.3.10 *Definiamo le seminorme*

$$\Phi_k(u) = \sup_{\frac{1}{2}\le\sigma\le 1} (1-\sigma)^k R^k \|D^k u\|_{L^2(B_{\sigma R})} \qquad k = 0, 1, 2. \tag{1.13}$$

Allora esiste $k_1 = k_1(N)$ tale che per ogni $\varepsilon \le 1$ e per ogni $u \in H^2(B_R)$ si ha

$$\Phi_1(u) \le \varepsilon\, \Phi_2(u) + \frac{k_1}{\varepsilon}\Phi_0(u). \tag{1.14}$$

DIM. Fissato $\gamma > 0$, sia σ tale che

$$\Phi_1(u) \le (1-\sigma)R\,\|\nabla u\|_{L^2(B_{\sigma R})} + \gamma.$$

Allora dal Corollario 1.3.8 e dal Lemma 1.3.9 si ha

$$\|\nabla u\|_{L^2(B_{\sigma R})} \le \varepsilon\,\|D^2 u\|_{L^2(B_{\sigma R})} + \frac{k}{\varepsilon}\|u\|_{L^2(B_{\sigma R})} \qquad \forall\, \varepsilon \le \sigma R.$$

Moltiplicando entrambi i membri della disuguaglianza precedente per $(1-\sigma)R$ e ponendo $\varepsilon = (1-\sigma)\,R\,\eta$, con $\eta \leq 1$ (così $\varepsilon \leq \sigma R$ siccome $\sigma \geq \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned}(1-\sigma)R\,\|\nabla u\|_{L^2(B_{\sigma R})} &\leq \eta(1-\sigma)^2R^2\|D^2u\|_{L^2(B_{\sigma R})} + \frac{k}{\eta}\|u\|_{L^2(B_{\sigma R})}\\ &\leq \eta\,\Phi_2(u) + \frac{k}{\eta}\,\Phi_0(u),\end{aligned}$$

da cui

$$\Phi_1(u) \leq \eta\,\Phi_2(u) + \frac{k}{\eta}\,\Phi_0(u) + \gamma \qquad \forall\,\gamma \text{ e } \forall\eta \leq 1.$$

Facendo tendere $\gamma \to 0$, si conclude. $\square$

La proposizione che segue generalizza la Proposizione 1.2.1 ad un operatore puro del secondo ordine a coefficienti costanti.

Proposizione 1.3.11 *Sia* $Au = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}D_{ij}u$*, con* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *e* $\nu_0 > 0$ *costante di ellitticità. Allora per ogni* $u \in H_0^2(\Omega)$ *risulta*

$$\|u\|_{H^2} \leq \frac{1}{4\pi^2\nu_0}\|Au\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}. \tag{1.15}$$

DIM. Per densità basta provare la stima per un'arbitraria funzione test. Sia pertanto $u \in C_0^\infty(\Omega)$; allora $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ed è lecito usare la trasformata di Fourier definita da

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i\xi\cdot x}u(x)dx \qquad \forall\xi \in \mathbb{R}^N. \tag{1.16}$$

Tenendo conto delle proprietà di cui questa gode rispetto alla derivazione

$$\mathcal{F}(D^\beta u)(\xi) = (2\pi i\xi)^\beta\mathcal{F}u(\xi) \qquad \forall\beta \in {\mathbb{N}_0}^N$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(Au)(\xi) &= \mathcal{F}\left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}D_{ij}u\right)(\xi) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\mathcal{F}(D_{ij}u)(\xi)\\ &= -4\pi^2\left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j\right)\mathcal{F}u(\xi).\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\mathcal{F}\left(u - \frac{1}{4\pi^2\nu_0}Au\right)(\xi) = \mathcal{F}u(\xi)\left(1 + \frac{1}{\nu_0}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j\right).$$

Prendendo i moduli segue che

$$\left|\mathcal{F}\left(u-\frac{1}{4\pi^2\nu_0}Au\right)(\xi)\right| = |\mathcal{F}u(\xi)|\left(1+\frac{1}{\nu_0}\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}\xi_i\xi_j\right) \geq |\mathcal{F}u(\xi)|(1+|\xi|^2)$$

e quindi dal teorema di Plancherel otteniamo

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^2} &= \|(1+|\xi|^2)\,\mathcal{F}u(\xi)\|_{L^2} \leq \left\|\mathcal{F}\left(u-\frac{1}{4\pi^2\nu_0}Au\right)(\xi)\right\|_{L^2} \\ &= \left\|\left(u-\frac{1}{4\pi^2\nu_0}Au\right)\right\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}+\frac{1}{4\pi^2\nu_0}\|Au\|_{L^2} \quad (1.17)\end{aligned}$$

che è l'asserto. □

Torniamo adesso a considerare un operatore generale come in (1.1). L'Osservazione 1.3.6 mostra che una stima del tipo $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|Au\|_{L^2(\Omega)})$ con $u \in H^2(\Omega)$, fallisce anche quando Ω è regolare e A è il Laplaciano. Si possono però ottenere delle stime interne come quelle del teorema che segue.

Teorema 1.3.12 *Sia A l'operatore definito in (1.1) e sia $M = \max_{i,j}\{\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty\}$. Allora per ogni aperto Ω_1 a chiusura compatta contenuta in Ω (brevemente $\Omega_1 \subset\subset \Omega$), esiste una costante $c = c(\Omega, \Omega_1, \nu_0, M)$ tale che per ogni $u \in H^2(\Omega)$ risulta*

$$\|u\|_{H^2(\Omega_1)} \leq c\,(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|Au\|_{L^2(\Omega)}). \quad (1.18)$$

DIM. Fissiamo $x_0 \in \Omega$ e introduciamo l'operatore

$$(A_0u)(x) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_0)(D_{ij}u)(x).$$

Applicando la proposizione precedente ad A_0 otteniamo

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\nu_0}\|A_0u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^2_0(\Omega). \quad (1.19)$$

Sia R_0 tale che se $|x-y| \leq R_0$

$$\left(\sum_{i,j=1}^N |a_{ij}(x)-a_{ij}(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\nu_0}{2}$$

(l'esistenza di R_0 è garantita dall'uniforme continuità dei coefficienti); allora

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)(D_{ij}u)(x) - (A_0u)(x)\right| &\leq \sum_{i,j=1}^N |a_{ij}(x)-a_{ij}(x_0)|\,|D_{ij}u(x)| \\ &\leq \frac{\nu_0}{2}|(D^2u)(x)|\end{aligned}$$

quando $|x - x_0| \le R_0$. Se $u \in H^2(\Omega)$ ha supporto contenuto in $B_R(x_0)$, dove $R \le R_0$, allora

$$\left\| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u - A_0 u \right\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\nu_0}{2} \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.20}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\Omega)} &\le \frac{1}{\nu_0}\|A_0 u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{\nu_0}\left\| A_0 u - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u \right\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \frac{1}{\nu_0}\left(\left\| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu_0}{2}\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \right) + \|u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \le \|u\|_{H^2(\Omega)} &\le \frac{1}{\nu_0}\left\| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \frac{1}{2}\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato che per ogni $u \in H^2(\Omega)$ con supporto contenuto in $B_R(x_0)$, $R \le R_0$ vale

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{2}{\nu_0}\left\| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u \right\|_{L^2(\Omega)} + 2\|u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.21}$$

A questo punto, poniamo, per semplicità di notazione, $B(x_0, \rho) = B_\rho$; fissato σ con $\frac{1}{2} \le \sigma \le 1$, sia $\eta \in C_0^\infty(B_{(\frac{1+\sigma}{2})R})$ tale che $0 \le \eta \le 1$, $\eta \equiv 1$ su $B_{\sigma R}$ e

$$|\nabla \eta| \le \frac{L}{R(1-\sigma)} \quad \text{e} \quad |D^2 \eta| \le \frac{L}{R^2(1-\sigma)^2}$$

(L non dipende nè da σ nè da R). Se $u \in H^2(\Omega)$, applicando la (1.21) ad ηu si ottiene

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_{L^2(B_{\sigma R})} &= \|D^2(\eta u)\|_{L^2(B_{\sigma R})} \le \|D^2(\eta u)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \frac{2}{\nu_0}\left\| \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij}(\eta u) \right\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\eta u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Siccome

$$D_{ij}(\eta u) = u D_{ij}\eta + D_i u D_j \eta + D_j u D_i \eta + \eta D_{ij} u$$

e $a_{ij} = a_{ji}$, si ha

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}(\eta u) = \eta A u - \eta \sum_{i=1}^N b_i D_i u - \eta c u + 2 \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i \eta D_j u + \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} \eta \, u$$

per cui, tenendo conto delle proprietà di η:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij}(\eta u) \right\|_{L^2(\Omega)} & \leq \|Au\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} \\ & + c_1(M) \Bigg(\|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} + \|u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} \\ & + \frac{1}{R(1-\sigma)} \|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} + \frac{1}{R^2(1-\sigma)^2} \|u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} \Bigg) \\ \leq \; & c_2(M,R) \Bigg(\|Au\|_{L^2(B_R)} + \frac{1}{R(1-\sigma)} \|\nabla u\|_{L^2(B_{\frac{1+\sigma}{2}R})} \\ & + \frac{1}{R^2(1-\sigma)^2} \|u\|_{L^2(B_R)} \Bigg) . \end{aligned} \tag{1.23}$$

Usando la stima (1.22), otteniamo

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_{L^2(B_{\sigma R})} \leq \; & c_3(\nu_0, M, R) \Bigg(\|Au\|_{L^2(B_R)} + \frac{1}{R(1-\sigma)} \|\nabla u\|_{L^2(B_{(\frac{1+\sigma}{2})R})} \\ & + \frac{1}{R^2(1-\sigma)^2} \|u\|_{L^2(B_R)} \Bigg). \end{aligned}$$

Per eliminare a secondo membro il termine con ∇u, non si può interpolare immediatamente ∇u con u e $D^2 u$ perchè i domini di integrazione sono diversi. Il Lemma 1.3.10 consente di superare questa difficoltà. Moltiplichiamo la disuguaglianza di sopra per $R^2(1-\sigma)^2$ e otteniamo, con le notazioni del Lemma 1.3.10

$$\begin{aligned} R^2(1-\sigma)^2 \|D^2 u\|_{L^2(B_{\sigma R})} & \leq c_3(\nu_0, M, R) \big(R^2(1-\sigma)^2 \|Au\|_{L^2(B_R)} \\ & \quad \frac{2R(1-\sigma)}{2} \|\nabla u\|_{L^2(B_{(\frac{1+\sigma}{2})R})} + \|u\|_{L^2(B_R)} \Big) \\ & \leq c_3(\nu_0, M, R) \big(R^2(1-\sigma)^2 \|Au\|_{L^2(B_R)} \\ & \quad + 2\, \Phi_1(u) + \Phi_0(u) \big) . \end{aligned}$$

Prendendo l'estremo superiore per $\sigma \in [1/2, 1]$, otteniamo

$$\begin{aligned} \Phi_2(u) & \leq c_4(\nu_0, M, R) \big(R^2 \|Au\|_{L^2(B_R)} + \Phi_1(u) + \Phi_0(u) \big) \\ & \leq c_4(\nu_0, M, R) \left(R^2 \|Au\|_{L^2(B_R)} + \varepsilon \Phi_2(u) + \frac{k_1}{\varepsilon} \Phi_0(u) \right) . \end{aligned}$$

Prendendo ε in modo che $\varepsilon\, c_4 = \frac{1}{2}$ e tenendo conto del fatto che $\Phi_0(u) = \|u\|_{L^2(B_R)}$ si ha

$$\Phi_2(u) \le c_5(\nu_0, M, R)(R^2\|Au\|_{L^2(B_R)} + \|u\|_{L^2(B_R)}).$$

Ricordando che $\Phi_2(u) = \sup_{\frac{1}{2}\le\sigma\le 1} R^2(1-\sigma)^2\|D^2u\|_{L^2(B_{\sigma R})}$, prendendo $\sigma = \frac{1}{2}$ si ottiene

$$\frac{R^2}{4}\|D^2u\|_{L^2(B_{\frac{R}{2}})} \le \Phi_2(u) \le c_5(\nu_0, M, R)(R^2\,\|Au\|_{L^2(B_R)} + \|u\|_{L^2(B_R)})$$

e quindi, dividendo per R^2

$$\|D^2u\|_{L^2(B_{\frac{R}{2}})} \le \Phi_2(u) \le c_6(\nu_0, M, R)(\|Au\|_{L^2(B_R)} + \|u\|_{L^2(B_R)}).$$

Applicando infine la stima interpolativa del Corollario 1.3.8 per aperti regolari con $\Omega = B_R$, risulta

$$\|u\|_{H^2(B_{\frac{R}{2}})} \le c_7(\nu_0, M, R)(\|Au\|_{L^2(B_R)} + \|u\|_{L^2(B_R)}). \tag{1.24}$$

Sia ora Ω_1 un aperto a chiusura compatta contenuta in Ω. Ricopriamo $\overline{\Omega}_1$ con un numero finito m di palle $B_{\frac{R_i}{2}}(x_i)$, con $x_i \in \overline{\Omega}_1$, $R_i \le R_0$ e $R_i < \mathrm{dist}(\Omega_1, \partial\Omega)$ (in modo che siano tutte contenute in Ω). La (1.24) vale, dunque, in ogni palla $B_{R_i}(x_i)$ e quindi

$$\|u\|_{H^2(\Omega_1)} \le \sum_{i=1}^{m} \|u\|_{H^2(B_{\frac{R_i}{2}}(x_i))} \le c(\nu_0, M, \Omega_1, \Omega)(\|Au\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

cioè la tesi. □

Osservazione 1.3.13 Vale la pena di sottolineare la tecnica dimostrativa adottata nel teorema precedente, nota come *metodo di Korn*. Essa può essere schematizzata nei seguenti passi

- si considera dapprima il caso di un operatore a coefficienti costanti;
- si congelano i coefficienti del secondo ordine in un punto del dominio e si fanno stime per funzioni u con supporto compatto contenuto in una palla piccola;
- si applica il punto precedente a ηu, con η cut-off in una palla piccola;
- si conclude con un argomento di ricoprimento.

Osservazione 1.3.14 E' naturale chiedersi se il risultato appena provato si generalizza anche al caso $p \ne 2$. Per $p = \infty$, il Teorema 1.3.12 è falso, come testimoniano i controesempi della prima sezione, e così anche per $p = 1$.

Invece, quando $1 < p < +\infty$, l'asserto continua a valere esattamente negli stessi termini. Tuttavia è più difficile ottenere l'analogo per $p \neq 2$ della Proposizione 1.3.11, cioè

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^N)} \leq c\left(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\right) \quad , \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \quad (1.25)$$

(avere Δ o un operatore a coefficienti costanti con termini solo del secondo ordine è sostanzialmente la stessa cosa). La tecnica per dimostrare la (1.25) si basa su stime di integrali singolari ed è dovuta a Calderon e Zygmund. Superato questo punto, la dimostrazione del teorema con $1 < p < +\infty$ è invece identica a quella appena esposta.

Esercizio 1.3.15 Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Provare che per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ risulta

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \varepsilon \int_\Omega |\Delta u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega |u|^2.$$