5.10 *E. Giusti,*
RICORDO DI ENNIO DE GIORGI.

Articolo apparso in “Matematica e cultura 2004”, (a cura) di M. Emmer ed. Springer, 2004, 3–8

Ho incontrato per la prima volta Ennio De Giorgi nel novembre 1958. All’ epoca, De Giorgi era a Roma, assistente di Aldo Ghizzetti, e teneva le esercitazioni di analisi per gli studenti di Fisica del primo anno. Io mi ero iscritto quell’ anno a Fisica, e seguivo le sue lezioni. Qualche settimana dopo l’ inizio trovammo un altro assistente e venimmo a sapere che De Giorgi aveva vinto la cattedra di Analisi a Messina e si era trasferito. Dal fatto che il nuovo assistente ne parlasse con evidente ammirazione si poteva dedurre che De Giorgi aveva fatto delle scoperte importanti, anche se nessuno di noi studenti ebbe mai la curiosità di chiedere di che si trattasse.

Più tardi seppi che poco tempo prima del nostro fugace incontro, De Giorgi aveva dimostrato uno dei suoi risultati più importanti, oggi noto come “teorema di De Giorgi-Nash”, in poche parole la regolarità delle soluzioni di equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico a coefficienti discontinui. Con questo teorema si colmava una lacuna importante tra i risultati di esistenza e quelli di regolarità nel calcolo delle variazioni, e più in generale nella teoria delle equazioni ellittiche non lineari.

Un secondo incontro con De Giorgi, questa volta più duraturo, avvenne nel 1965 a Pisa, dove ero arrivato dopo una breve quanto infelice esperienza nel campo della fisica delle particelle elementari. Grazie ai buoni auspici di Giuseppe Da Prato, anch’ egli transfuga dalla fisica teorica, riuscii a ottenere un posto di assistente incaricato di analisi con Sergio Campanato, e mi trasferii a Pisa. Il caso volle che mi venisse assegnato uno studio in coabitazione con Mario Miranda, che si era laureato qualche anno prima con De Giorgi e continuava a occuparsi di superfici di area minima, mentre io studiavo equazioni alle derivate parziali con l’ ausilio dei metodi di Campanato.

De Giorgi era considerato all’ epoca una specie di oracolo, a cui si ricorreva quando si aveva bisogno di una spinta che aiutasse a superare un punto morto o di un parere sulla plausibilità di un’ ipotesi. Anch’ io ebbi occasione di rivolgermi al suo consiglio quando, insieme a Da Prato, studiavamo equazioni di evoluzione e avevamo pensato a una possibile dimostrazione che De Giorgi smontò con poche parole. In genere un’ affermazione di De Giorgi era considerata come un dato di fatto, ma al mio arrivo a Pisa ero piuttosto inesperto e non tenni nel debito conto il suo parere. Si parlava di alcuni problemi aperti nella teoria delle equazioni a derivate parziali, e io accennai all’ estensione del teorema di De Giorgi–Nash dalle equazioni singole ai sistemi di equazioni. De Giorgi rispose che credeva che per i sistemi il teorema fosse falso, e che pensandoci un po’ si sarebbe anche trovato un controesempio, cioè un sistema di equazioni ellittiche con una soluzione discontinua. Se avessi conosciuto meglio De Giorgi mi sarei precipitato a cercare l' esempio a cui aveva accennato, e forse avrei anche potuto trovarlo; invece lasciai cadere lì il problema, e poco tempo dopo lo stesso De Giorgi pubblicava un esempio di limpida semplicità.

L' esempio di De Giorgi riguardava un sistema lineare a coefficienti discontinui; parlandone con Miranda, con cui, come dicevo, condividevo lo studio, riuscimmo a trovarne uno simile per un sistema non lineare ma con coefficienti regolari, chiudendo così ogni possibilità di estendere il risultato di regolarità da una a più dimensioni.

Da questo lavoro cominciò un periodo breve ma intenso di collaborazione con Miranda. Quasi contemporaneamente ai controesempi alla regolarità generale dei sistemi ellittici non lineari, Charles B. Morrey dimostrava un risultato più debole, ma che alla luce degli esempi precedenti acquistava un significato molto maggiore. Il risultato di Morrey si può enunciare così: pur non essendo in genere regolari dappertutto, le soluzioni di sistemi ellittici non lineari non sono però "troppo" singolari: le loro singolarità infatti sono limitate a un insieme chiuso di misura nulla. Il metodo di Morrey coniugava la teoria delle equazioni ellittiche con le tecniche delle superfici di area minima, introdotte da De Giorgi e rielaborate da Fred Almgren. Mettendo insieme le nostre conoscenze nei due campi, Miranda e io riuscimmo a semplificare e migliorare i risultati di Morrey, e a dimostrare tra l' altro che per sistemi in dimensione n le singolarità avevano una dimensione inferiore a $n-2$. Da questo lavoro e dall' articolo di Morrey avrebbe preso l' avvio la teoria della regolarità parziale, che caratterizza i sistemi ellittici e i minimi di funzionali vettoriali nel calcolo delle variazioni.

A questo punto conviene fare un passo indietro di alcuni anni, e accennare all' opera di Alessandro Faedo nella creazione della scuola matematica pisana.

Dopo la morte di Leonida Tonelli, la matematica a Pisa aveva conosciuto un periodo di decadenza, nonostante la presenza della Scuola Normale Superiore che reclutava studenti di notevoli capacità da tutta Italia. L' inversione di tendenza avvenne grazie all' opera lungimirante di Alessandro Faedo, un matematico di buon livello, all' epoca rettore dell' università. Faedo si pose l' obiettivo di ricoprire i posti vacanti, e altri che si venivano creando, con i migliori matematici disponibili a trasferirsi a Pisa. Vennero così chiamati tra gli altri Ennio De Giorgi, Giovanni Prodi, Guido Stampacchia e, più tardi, Sergio Campanato per l' analisi; Aldo Andreotti ed Edoardo Vesentini per la geometria, Iacopo Barsotti per l' algebra. Insieme a loro, arrivarono a Pisa moltissimi giovani di diversa formazione provenienti sia da Pisa che da altre università, attratti questi ultimi dalla qualità dell' ambiente scientifico pisano e dalle opportunità che erano loro offerte. Grazie a una politica di estrema apertura, tutti si inserirono immediatamente, nella maggior parte dei casi con successo, nelle ricerche promosse a Pisa. Questa concentrazione di matematici di assoluta rilevanza internazionale fece sì che Pisa diventasse il centro di maggior rilievo per la matematica in Italia, e provocò l' arrivo di numerosissimi visitatori da ogni parte del mondo, sia matematici affermati che contribuirono a innalzare ancora di più il livello degli studi, sia giovani brillanti che vedevano nell' ambiente pisano un' occasione per affinare le proprie conoscenze e per mettere alla prova il loro talento.

Tra gli avvenimenti più rilevanti della politica di Faedo fu l' arrivo a Pisa di Enrico Bombieri. Arrivato giovanissimo alla cattedra, Bombieri dopo un anno passato a Cagliari si trasferì a Pisa, dove grazie al suo carattere aperto e alla sua capacità di padroneggiare i più differenti campi della matematica instaurò ben presto una serie di collaborazioni con i colleghi e divenne un punto di riferimento per chiunque avesse incontrato difficoltà in qualsiasi settore della matematica. Bombieri arrivava a Pisa accompagnato da una fama acquistata soprattutto per le sue ricerche in teoria dei numeri, iniziate quando era ancora studente liceale, ma dopo poco le sue ricerche comprendevano parti lontane come la geometria algebrica e le equazioni alle derivate parziali. Quanto a metodo di lavoro Bombieri, almeno stando alle apparenze, era per molti versi agli antipodi di De Giorgi: sistematico ed enciclopedico il primo, intuitivo e quasi distaccato il secondo. L' incontro tra i due era destinato a produrre in breve importanti risultati.

Ancora una volta il tramite tra i due fu Mario Miranda. All' epoca De Giorgi stava studiando il problema della regolarità dei grafici di area minima, cioè delle superfici minime che si potevano rappresentare come grafici di una funzione $u(x)$ di n variabili. Questo caso era in un certo senso più semplice di quello generale, perché la funzione $u(x)$ era soluzione, anche se in un senso molto generalizzato, di un' equazione alle derivate parziali. Il problema della regolarità della funzione u (e dunque della superficie che ne era il grafico) si poteva ridurre in questo caso a dimostrare che le sue derivate erano limitate; in parole più precise ma un po' più gergali, si trattava di ottenere una maggiorazione *a–priori* per le derivate di u.

Poco prima dell' arrivo di Bombieri a Pisa, in occasione di un convegno sulle equazioni alle derivate parziali, Miranda aveva dato un risultato di regolarità parziale e aveva annunciato che De Giorgi aveva ottenuto una dimostrazione della maggiorazione *a priori* valida per ogni dimensione. Da quanto fu dato di capire, la dimostrazione di De Giorgi procedeva per assurdo; in altre parole si supponeva che la maggiorazione non sussistesse e poi con una serie molto complessa di deduzioni si faceva vedere che una tale ipotesi non poteva sussistere in quanto veniva in contraddizione con risultati dimostrati in precedenza.

In realtà, nessuno che io sappia ha mai letto la dimostrazione di De Giorgi, e non so nemmeno se essa sia mai stata esposta oralmente in modo completo.

Quello che è certo è che la collaborazione tra De Giorgi, Miranda e Bombieri, che al suo arrivo a Pisa sapeva poco di equazioni alle derivate parziali ma aveva una grandissima esperienza nelle valutazioni "fini" della teoria dei numeri, produsse in breve tempo una dimostrazione diretta della maggiorazione a priori, più esplicita e per molti versi più bella di quella originale che venne abbandonata. Alcuni anni più tardi, N. Trudinger doveva trovare una dimostrazione quasi completamente elementare, che è quella che ora si trova nei libri sull'argomento.

Come si è detto, la maggiorazione del gradiente aveva come conseguenza la regolarità dei grafici di area minima, cioè di quelle superfici minime che erano esprimibili come grafico di una funzione di un numero qualsiasi di variabili. Essa fu anche un ingrediente fondamentale per gli sviluppi successivi della teoria.

Alcuni problemi rilevanti restavano ancora aperti. In primo luogo, quello della regolarità delle superfici minime generali[1], senza supporre che fossero esprimibili come grafici di funzioni. In secondo luogo, l' estensione a un numero qualsiasi di dimensioni del cosiddetto “teorema di Bernstein”. Quest' ultimo era un risultato che Sergei Bernstein aveva dimostrato agli inizi del '900 per i grafici di area minima nello spazio tridimensionale: le sole soluzioni dell' equazione delle superfici minime su tutto il piano sono i piani. Si trattava dunque di estendere questo teorema a grafici minimi in n dimensioni.

Grazie a dei risultati di W. Fleming e di De Giorgi, ambedue questi problemi si potevano ricondurre a quello dell' esistenza di coni di area minima. Più precisamente, Fleming e De Giorgi avevano dimostrato in lavori successivi che la non esistenza di coni minimi in $\mathbb{R}^n$ è equivalente alla regolarità delle superfici minime nello spazio n-dimensionale e implica la validità del teorema di Bernstein in $\mathbb{R}^{n+1}$. In particolare, dato che non esistono coni minimi in dimensione 2, i risultati di Fleming e De Giorgi forniscono una nuova dimostrazione del teorema di Bernstein.

Dimostrare la non esistenza di coni minimi non era compito dei più agevoli. Miranda aveva fatto un primo passo passando da due a tre dimensioni, F. Almgren aveva portato il limite a quattro e J. Simons aveva escluso la possibilità di coni minimi fino a sette dimensioni. Allo stesso tempo però Simons aveva indicato l' esistenza di un cono nello spazio a otto dimensioni che rappresentava un minimo “locale”, tale cioè che la sua area aumentava quando veniva sottoposto a variazioni abbastanza piccole. Non si era ancora a un cono di area minima, per il quale occorreva dimostrare che l' area aumentava sempre, anche per deformazioni grandi, ma certamente il cono di Simons poneva in questione la convinzione, abbastanza diffusa tra gli specialisti, che le superfici minime fossero regolari in ogni dimensione.

Più radicata era l' altra convinzione, della possibilità di estendere il teorema di Bernstein a dimensione arbitraria. Il motivo di questa differenza è presto detto. La non esistenza di coni minimi, come si è visto, era equivalente alla regolarità delle superfici minime; di conseguenza, il fatto che ci

[1]Per la precisione, si tratta di ipersuperfici, cioè di superfici di dimensione $n-1$ in uno spazio di dimensione n, altrimenti dette superfici di codimensione 1. A quanto mi risulta, De Giorgi non si è mai occupato seriamente di superfici a codimensione maggiore di 1.

fosse un cono che poteva essere minimo poneva in dubbio questa regolarità. Al contrario, la relazione tra coni minimi e teorema di Bernstein era più strumentale: è vero che se si fosse dimostrato che i coni minimi non esistevano allora si sarebbe esteso automaticamente il teorema, ma ciò non perché le due cose fossero in linea di principio equivalenti, ma solo a causa della particolare dimostrazione di Fleming-De Giorgi. Di conseguenza, anche se questa fosse venuta a mancare per l'apparizione di un cono minimo, non era però esclusa la possibilità di dimostrare lo stesso teorema per un' altra strada, che non facesse uso della tecnica introdotta da Fleming e De Giorgi.

Per De Giorgi invece il cono di Simons era il peso che faceva inclinare l' ago della bilancia sulla parte negativa, e questo non solo per la regolarità, ma anche per la possibilità di estendere il teorema di Bernstein. La direzione in cui bisognava muoversi era dunque da una parte di dimostrare che il cono di Simons era un minimo assoluto, e dall' altra costruire un esempio di un grafico minimo in dimensione 8 che non fosse un piano, o almeno dimostrarne l' esistenza.

Naturalmente una cosa è dire e un' altra è fare. In questo caso la collaborazione tra Bombieri e De Giorgi si rivelò essenziale, anche grazie alle diverse caratteristiche dei due. E poiché Miranda, vinto da poco il concorso a cattedra, si era trasferito a Genova, mi trovai io a collaborare con loro in questa impresa.

Il metodo di lavoro si era organizzato quasi spontaneamente in modo da esaltare le capacità di tutti. In genere, ci si trovava nella tarda mattinata o nel primo pomeriggio, per lo più nello studio di De Giorgi in Normale, per discutere la situazione e i possibili sviluppi. Una volta individuate le direzioni più promettenti, era per lo più compito di Bombieri e mio di esplorarle nei dettagli, non di rado piuttosto complessi e prolissi. Qui veniva messa a frutto la capacità di Bombieri di vedere le simmetrie e le possibili semplificazioni in formule che talvolta superavano la mezza pagina, e quindi di progredire dove altri si sarebbero arrestati con un sentimento di impotenza. La velocità con cui Bombieri procedeva era sorprendente, e a volte era difficile non dico precederlo ma anche tenergli dietro. In ogni caso, questo lavoro prendeva spesso tutto il pomeriggio, quando non avevamo lezioni o altri impegni, e a volte continuava anche dopo cena. Il giorno dopo, i risultati trovati e le eventuali novità emerse venivano di nuovo discusse con De Giorgi, che nel frattempo si era mosso autonomamente nella ricerca di una strada.

Non è possibile descrivere nei dettagli né il tipo di ostacoli che fu necessario superare né le soluzioni tecniche che condussero al successo. La questione della minimalità del cono di Simons venne ridotta a un problema di analisi qualitativa di un' equazione differenziale ordinaria, legata alla particolare simmetria del cono. Per quello che riguarda la falsità del teorema di Bernstein in dimensione 8, nell' impossibilità di trovare un esempio esplicito di soluzione intera dell' equazione delle superfici minime, diversa da un piano, fu possibile costruire una soluzione come limite di opportune soluzioni su insiemi limitati, e dimostrare che non poteva essere un piano. In questo programma un ruolo determinante fu giocato dalla maggiorazione a priori di Bombieri, De Giorgi e Miranda.

Guardando le cose all' indietro può sembrare che in fondo non si sia fatto altro che seguire il cammino naturale che doveva condurre alla dimostrazione. In effetti il racconto, quando ciò è possibile, non può che riferire la strada maestra senza riportare gli innumerevoli meandri e i tentativi andati a vuoto; tutti eventi destinati ad essere immediatamente dimenticati. Per dare però un'idea della mole di lavoro durato alcuni mesi (non ricordo di aver mai sudato tanto su un singolo risultato) basterà dire che solo per i calcoli necessari a condurlo a termine Bombieri e io abbiamo consumato una scatola di gessi e due risme di carta.

II lavoro venne pubblicato nel 1969 con il titolo *Minimal cones and the Bernstein problem*. A detta di R. Osserman, fu uno dei risultati più sorprendenti di quegli anni.