CAPITOLO 23

Nidi misti

Ricordiamo che

TEOREMA 23.1. (Johnson-Pomareda [**96**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo che contiene $K \cong GF(q)$. Se π ammette un gruppo G nel complemento di traslazione tale che G é il prodotto diretto di due gruppi ciclici di omologie di ordine $q+1$ con assi affini, allora, si ha una delle seguenti situazioni:

(1) π é un piano di André,

(2) q é dispari e π é costruito a partire da un piano di Desargues Σ tramite sostituzione di un $(q+1)$-nido,

(3) q é dispari e π é costruito da un piano di Desargues Σ con una combinazione della sostituzione di un $(q+1)$-nido e della sostituzione delle reti di André in Σ.

Sia G il gruppo di ordine $(q+1)^2$ descritto nel teorema sopra. In questa situazione (cioé, la situazione in cui si ha un $(q+1)$-nido), esiste un sottopiano di Baer L di un piano Desarguesiano Σ di ordine q^2 tale che LG é un insieme di $(q+1)^2/2$ sottopiani di Baer . Inoltre, tale insieme di sottopiani produce una rete tale che possiamo usare reti di sostituzione per ottenere da Σ un $(q+1)$-nido di regoli. Esiste un unico regolo R_L di grado $(q+1)$ che contiene L come sottopiano di Baer. Il $(q+1)$ - nido é R_LG.

Assumiamo $q \equiv 1 \mod 4$. Ci sono due sottogruppi ciclici di omologie di ordine $(q+1)/2$ in G. Sia G^- il sottogruppo corrispondente di ordine $(q+1)^4/4$. In questo caso, R_LG^- é un insieme di $(q+1)/2$ regoli. I risultati di Johnson e Pomareda implicano che ci sono $(q+1)/2$ reti di André in Σ tale che ciascuna ha due componenti in comune con R_L. Supponiamo che

ci siano j di queste reti di André tali che le componenti in comune con R_L giacciono nelle orbite del gruppo G^-. Quindi, ci sono $((q+1)/2-j)$ reti di André tali che le due componenti in comune con R_L sono nelle stesse orbite del gruppo G^-. Nella situazione di prima, succede che LG copre esattamente $(q+1)/2$ sottopiani di Baer di ogni rete di André; nell'ultima situazione, LG ha un'intersezione con ogni sottopiano di Baer della rete di André. Denotiamo le reti di André che hanno due componente con R_L in orbite diverse con $A_1, A_2, \ldots, A_i$. Poiché ogni rete A_j é una rete di un regolo, se consideriamo l'insieme di reti $R_L G^- \cup A_j$ come un insieme di $((q+1)/2+j)$-regoli, si ottiene anche un $((q+1)/2+j)$-nido. Poiché questa rete contiene varie tipi di reti che possono essere ottenute dalla rete R_L, da un gruppo particolare G^- e da reti di André, si chiama un $((q+1)/2+j)$-nido misto o più semplicemente un nido misto. In realà, ci sono due nidi misti che possono essere ottenuti dal gruppo di ordine $(q+1)^2$ dato sopra e due piani di traslazione che possono essere costruiti con reti di sostituzioni di questi nidi misti. Ogni piano di traslazione di questo tipo ammette due gruppi di omologie di ordine $(q+1)/2$. Si ricordi che il piano originale ammette due gruppi di omologie di ordine $(q+1)$. In questo caso, i piani costruiti non ammettono un gruppo di omologia di ordine $(q+1)$. Recentamente, Pomareda e Johnson hanno studiato queste reti miste. In particolare ci hanno interessato i piani di traslazione con fibrazione in $PG(3,q)$ che ammettono due gruppi di omologie di ordine $(q+1)/2$ che si normalizzano. Quando $q \equiv 1 \bmod 4$, possiamo ipotizzare che esiste un gruppo di ordine $(q+1)^2/4$ contenente questi sottogruppi di omologie. Per ragioni tecniche, quando q $\equiv -1 \bmod 4$, dobbiamo fare l'ipotesi che c'é un gruppo abeliano di ordine $(q+1)^2/2$ che contene questi sottogruppi di omologie.
Si noti che quando si studia un piano di traslazione con fibrazione in $PG(3,q)$ che ammette un gruppo G^- abeliano di ordine $(q+1)^2/2(2,(q-1)/2)$ é possible ottenere un piano di traslazione che può essere costruito con rete di sostituzione di un $(q+1)$-nido di regoli. In questo caso, c'é anche un gruppo abeliano G di ordine $(q+1)^2$ tale che $G^- \subset G$. Non é difficile vedere che esistono G^--**due orbite** di lunghezza $(q+1)^2/4$. Questa possibilità crea qualche difficoltá. Se si ipotizza che c'é solo un'orbita di lunghezza maggiore di $(q+1)$, allora é possibilie avere una classificazione.

Teorema 23.2. (Johnson e Pomareda [**95**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2, per q dispari e diverso da 3 o 7, con fibrazione in $PG(3,q)$. Si assuma che il piano ammette due gruppi ciclici di omologie di ordine $(q+1)/2$ contenuti in un gruppo abeliano di collineazioni di ordine $(q+1)^2/2(2,(q-1)/2)$. Se esiste un'unica orbita di componenti di lunghezza maggiore di $(q+1)/(2,(q-1)/2)$ allora esiste un piano associato Desarguesiano Σ, un nido misto M, e si ha uno dei due casi
:

(1) Il piano π può essere costruito da Σ con rete di sostituzione del nido misto M

(2) C'é un insieme di reti di André N che possono essere definite con l'asse e il coasse dei gruppi di omologie tale che π può essere costruito da reti di sostituzioni di M unito alla derivazione multipla di reti di André di N.

Sia Σ un piano Desarguesiano di ordine q^2 con coordinate nel campo F isomorfo a $GF(q^2)$ con q e $(q+1)/2$ sono dispari. Sia $\{1,t\}$ una base per F su $K \simeq GF(q)$ con $t^2 = \gamma$ dove γ é un non quadrato. Allora, $t^{q+1} = -\gamma$ tale che $t^q = -t$. Consideriamo una rete di André $\{y = xm$ in Σ tale che $A_\alpha = m^{q+1} = \alpha\}$ per α in K. Sia T un sottospazio di dimensione 2 che non giace nella rete di André e che non abbia un'intersezione con $x = 0$ o $y = 0$. Consideriamo la rete del regolo R_T in Σ di grado $q+1$ che contiene T come sottopiano di Baer. Sia $G^- = \{\mathrm{Diag}\,(a,b) \mid a,b$ in F con l'ordine che divide $(q+1)/2\}$. Allora, l'ordine di G^- é $(q+1)^2/4$. Si noti che G^- é il prodotto diretto di due gruppi di omologie di Σ di ordine $(q+1)/2$.

(1) Sia A una rete di André tale che A e R_T hanno due componenti in comune. Poiché T non é in A come sottopiano di Baer, esistono due sottopiani di Baer (che sono sottospazi vettoriali) di A aventi intersezione non-banale con T. Una rete di André di questo tipo si chiama una $D/S-$rete se e solo se le componenti dell'intersezione sono in orbite diverse ma i sottopiani di Baer dell' intersezione sono nelle stesse orbite.
Analogamente possiamo avere reti di tipo S/D, S/S, D/D.

(2) Una rete di André che ha solo una retta in comune con R_T si chiama una 1-rete.

Proposizione 23.3. (Johnson-Pomareda [**95**]).

(1) Per uno spazio T, se esiste una D/S - rete di André allora tutte le reti di André dell' intersezione sono D/S o S/D -reti.

(2) Se esiste una D/S - rete di André allora possiamo scegliere coordinate tali che $T = \langle$(1,1), (ta,-tb)$\rangle$ con a,b che hanno ordini che dividono (q+1)/2 e $ab \neq 1$.

Teorema 23.4. (Johnson-Pomareda, si veda [**95**] (Theorem 8).

Sia Σ un piano Desarguesiano di ordine q^2 tale che $q \equiv 1 \bmod 4$. Se T é uno spazio di dimensione due tale che esiste una rete di André di tipo D/S o S/D allora tutte le immagini di T sotto l'azione del gruppo G^- (di ordine $(q+1)^2/2$ che é il prodotto diretto di due gruppi di omologie in Σ) hanno a due a due intersezione identica.
Esistono j reti di André che sono D/S-reti. Siano queste reti $N_1, N_2, \ldots, N_j$. Allora, per ogni rete N_k, esiste un insieme B_k di $(q+1)/2$ sottopiani che non hanno intersezione in TG^-.
Sia R_L la rete del regolo di grado $q+1$ in Σ che contiene T come sottopiano di Baer. Allora, $R_L \cup \{N_1, N_2, \ldots, N_j\}$ é un $((q+1)/2+j)$-nido misto che ammette una rete di sostituzione che consiste di $TG^- \cup \{B_1, B_2, \ldots, B_j\}$.

Abbiamo un teorema simile per $q \equiv -1 \bmod 4$ con un opportuno cambio dell'ipotesi. Abbiamo visto che per un $(q+1)$-nido, ci sono $((q+1)+j)$-nidi. Anche, da un $((q+1)/2+j)$-nido possiamo costruire un $(q+1)$-nido.

Teorema 23.5. (Johnson-Pomareda [**95**]).

Sia π un piano di traslazione con fibrazione in $PG(3,q)$ che può essere costruito da un $((q+1)/2+j)$-nido e tale che ammette un gruppo abeliano di ordine $(q+1)^2/2(2,(q-1)/2)$. Allora, esiste un piano di traslazione che può essere costruito da un $(q+1)$-nido e ammette due gruppi di omologie di ordine $q+1$.

Con un $((q+1)/2+j)$-nido possiamo costruire $(q+1-j)$-nidi.

Teorema 23.6. (Johnson-Pomareda [**95**]).

$((q+1)/2+j)$-nidi sono equivalenti a $((q+1)-i)$-nidi.

Dim: Consideriamo un piano Desarguesiano Σ e un insieme di reti di André. Deriviamo rispetto a queste reti. É facile vedere che questa costruzione produce a un altro piano Desarguesiano Σ^* che ha solo due componenti in comune con Σ. Ora, verifichiamo che una D/S-rete di André in Σ produce a una $S/D-$rete di André in Σ^*. Allora, ci sono (q-1) reti di André in Σ e di queste (q+1)/2 reti di intersezione di cui esattamente j di queste reti sono di tipo D/S. Allora $(q+1)/2-j$ di queste reti sono S/D-reti. Possiamo dimostrare che ad un sottospazio T di Σ corrisponde un sottospazio T^* di

Σ^* tale che una D/S-rete in Σ diventa una S/D-rete in Σ^* e una S/D-rete in Σ^* diventa una D/S-rete in Σ^*. Quindi un $((q+1)/2+j)$-nido misto in Σ dá luogo a un $((q+1)/2+(q+1)/2-j)=(q+1-j)$-nido misto.

Una domanda naturale é se questi piani di traslazione che possono essere costruiti con nidi misti sono piani nuovi.

Teorema 23.7. (Johnson-Pomareda [**95**]).

Sia π un piano di traslazione con fibrazione in $PG(3,q)$ che ammette un gruppo abeliano di ordine $(q+1)^2/2(2,(q-1)/2)$ che contenente due gruppi di omologie di ordine $(q+1)/2$. Allora, π é un piano di André se e solo se ogni orbita di componenti ha lunghezza minore o uguale $(q+1)/(2,(q-1)/2)$.

Allora, si ha:

Teorema 23.8. (Johnson-Pomareda [**95**]).

Sia π un piano di traslazione con fibrazione in $PG(3,q)$ che ammette un gruppo abeliano di ordine $(q+1)^2/2(2,(q-1)/2)$ contenente due gruppi di omologie di ordine $(q+1)/2$. Se esiste un'orbita di componenti con lunghezza maggiore di $(q+1)$ allora π non può essere un piano di André. In particolare, un piano di traslazione che puó essere costruito con un nido misto non é un piano di André.