CAPITOLO 17

Piani di traslazione di ordine k che ammettono due gruppi di omologie di ordine $(k-1)/2$

Nel paragrafo precedente ci siamo occupati del legame tra insiemi parziali stretti in $P\Gamma L(2,q)$ e reti di traslazione.
Recentemente, Bonisoli [**19**] ha trovato alcuni insiemi che sono strettamente transitivi in $P\Gamma L(2,q)$.
Si ricordio che un piano finito di Minkowski M può essere rappresentato da un insieme S di permutazioni di X che é strettamente 3-transitivo. I punti sono $X \times X$, i cerchi $y = x\sigma$, $\sigma \in S$ dove (x,y) é plus parallelo a (x,z) e (x,a) é minus parallelo a (w,z). In questo caso, un flock di M é un insieme di cerchi che ricoprono i punti di M e che a hanno due a due intersezione identica.
Sia $M(\sigma,q)$, per q dispari, un piano di Minkowski dove $S : \{Z \to (Z^\tau a + b)/(Z^\tau c + d)$: dove $\tau = \sigma \in$ Aut $GF(q)$ quando det$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ non é un quadrato e $\tau = 1$ quando det$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é un quadrato, con $a,b,c,d \in GF(q)^*\}$.
S é 3-transitivo.
Sia E un sottogruppo ciclico di $PSL(2,q)$ di ordine $(q+1)/2$. Sia $g \in P\Gamma L(2,q)$ tale che g normalizza E. Bonisoli ha dimostrato che ci sono valori di q ed elementi g tali che $E \cup E\ g$ é strettamente transitivo. Allora, $E \cup E\ g$ produce un piano di traslazione π_E di ordine q^2 che é unione delle $q+1$ reti derivabili (si veda anche [**84**]). Se E corrisponde all'insieme (gruppo) $H = \langle (x_1,x_2) \to (x_1,x_2)M_i | i = 1,2,\ldots,(q+1)/2\rangle$ e g corrisponde a $(x_1,x_2) \to (x_1^\sigma, x_2^\sigma)N_o$, allora $E \cup E\ g$ corrisponde al piano di traslazione con fibrazione $x = 0$, $y = 0$, $y = x^\sigma N_o M_i u\ I_2$, e $y = x\ M_j v\ I_2$ per $i,j = 1,2,\ldots,(q+1)/2$ e per $u,\ v \in GF(q)^*$.Allora, π ammette il gruppo di omologie $< (x,y) \to (x, xM_i) | i = 1,2,\ldots,(q+1)/2\rangle = H_y$ e, poiché g normalizza E, il gruppo di omologie $\langle (x,y) \to (xM_i, y)\rangle = H_x$ dove $|H_y| = |H_x| = (q+1)/2$. Inoltre π ammette i gruppi $\langle (x,y) \to (x, yuI_2) | u \in GF(q)^*\rangle = H_y^o$ e $\langle (x,y) \to (xv\ I_2, y) | v \in GF(q)^*\rangle = H_x^o$, e $|H_x^o| = |H_y^o| = (q-1)$, quindi $|H_x H_x^o| = |H_y H_y^o| = (q^2-1)/2$.
Allora, questi piani di traslazione che possono essere costruiti da insiemi di

Bonisoli hanno ordine k ed hanno almeno due gruppi di omologie di ordine $(k-1)/2$.
Recentemente, Hiramine ed Johnson hanno studiato piani di traslazione di ordine k che hanno almeno due gruppi di omologie di ordine $(k-1)/2$.
Siano H_1, H_2 due gruppi di questo tipo con assi L_1, L_2 e coassi M_1, M_2. Supponiamo che $\{L_1, M_1\} \cap \{L_2, M_2\}$ sia non banale ma gli insiemi non sono eguali. Allora, per un teorema di André [**2**], esiste un gruppo di elazioni di ordine $p^s \geq (k-1)/2$ dove $p^r = k$. In questo caso, $2p^s \geq k = p^r$ che implica, per p dispari , $p^s = p^r$. Allora, il piano é un piano su un semicorpo, e poiché H_1 corrisponde a un sottogruppo di un campo, é facile provare che il piano é Desarguesiano.
Supponiamo che $\{L_1, M_1\} = \{L_2, M_2\}$. Se non é vero per tutti i gruppi di questo tipo, ci sono tre possibilità: (siano le orbite non-banali sulla retta all'infinito L_∞ di $H_i = \Gamma_{1,i}$, $\Gamma_{2,i}$ per $i = 1, 2$ rispettivamente.)

(i) $L_1 \cap L_\infty \rightarrow\in \Gamma_{1,1}$ o $(\Gamma_{2,1})$, $M_1 \cap L_\infty \rightarrow\in \Gamma_{1,1}$ o $\Gamma_{2,1})$, rispettivamente. In questo caso, le lunghezze delle orbite sono: $(k+3)/2$, $(k-1)/2$.

(ii) $L_1 \cap L_\infty \rightarrow \in \Gamma_{2,1}(o\Gamma_{1,1})$, $M_1 \cap L_\infty \rightarrow \in \Gamma_{1,1}(o\ \Gamma_{2,1})$ rispettivamente. In questo caso, le lunghezze delle orbite sono: $(k+1)/2$, $(k+1)/2$.

(iii) $< H_1, H_2 >$ ha solo un'orbita di lunghezza $k+1$.

Nei casi (i) e (ii), esiste $\sigma \in\ H_2$ tale che $L_1 \rightarrow M_1$. Allora, $\{L_1, M_1\} = \{L_1\sigma, M_1\sigma\}$. Cioé, si può considerare $\{L_1, M_1\} = \{L_2, M_2\}$.
Allora, se $\{L_1, M_1\} \neq \{L_2, M_2\}$, abbiamo due orbite Γ_1 e Γ_2 di lunghezza $(k+1)/2$, $(k+1)/2 - si$ rispettivamente. Quindi, $\langle H_1, H_2\rangle$ é 2-transitivo su Γ_1 e Γ_2. In questo caso, é possible usare la classificazione dei gruppi semplici per eliminare questa possibilità. Quindi, possiamo considerare $\{L_1, M_1\} = \{L_2, M_2\}$ e usare il seguente risultato:

Teorema 17.1. (Lüneburg [**112**]).

Sia π un piano di traslazione che ammette un gruppo abeliano G che fissa due rette (cioé, due componenti) L, M. Per ogni componente $N \neq L$, M, se G_N é irriducibile su N, allora π é un piano di André generalizzato.

Si noti che $| < H_1, H_2 > | = (k-1)^2/4$. Sia $k = p^r$ e supponiamo che esista un divisore p-primitivo u di $p^r - 1$. Allora, un u-sottogruppo S_u^i di H_i é ciclico e il gruppo $S_u^1 \times S_u^2$ é abeliano. Inoltre, $|\langle H_1, H_2\rangle_N| = ((k-1)^2/4)\ /\ d$ con $d = (k-1)$ o $(k-1)/2$. Allora, é possibile usare il sottogruppo $S_u^1 \times\ S_u^2$

per dimostrare che $(S_u^1 \times\ S_u^2)_N$ opera irriducibile su N e che π é un piano di André generalizzato.

Tuttavia esistono sono alcuni esempi eccezionali. Il piano sul quasicorpo associativo irregolare di ordine 7^2 o 23^2. Esiste anche un piano eccezionale di Lüneburg di ordine 7^2 che ammette due gruppi di omologie che sono isomorfi a SL(2,3) (si ricordi $|SL(2,3)| = 24 = (7^2 - 1)/2$).

Teorema 17.2. (Hiramine, Johnson [**45**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine k che ammette almeno due gruppi di omologie di ordine $(k-1)/2$. Allora, abbiamo una delle seguenti possibilità:

(1) π é un piano di André generalizzato,

(2) l'ordine di π é 7^2 e π é il piano sul quasicorpo associativo irregolare di ordine 7^2,

(3) l'ordine di π é 7^2 e π é il piano eccezionale di Lüneburg,

(4) l'ordine di π é 23^2 e π é il piano sul quasicorpo associativo irregolare di ordine 23^2.

Il fatto che, nel caso (1), π sia un piano di André generalizzato non é molto esplicativo. Allora, sono stati studiati i piani di André generalizzati di ordine k che hanno almeno un gruppo di omologia di ordine $(k-1)/2$. In questo caso, esiste una coppia di Dickson $\{q, n\}$ (per $n \neq 4$, tutti i divisori primi di n sono anche divisori di $(q-1)$) tale che $k = q^n$. Esiste anche un piano di Dickson π_D (cioé un piano di traslazione su un quasicorpo associativo di Dickson) che é associato a π tale che $\pi \cap \pi_D$ é una rete di grado $(k-1)/2+2$ e $\pi - \pi_D$ é una rete che può essere costruita dalla rete di sostituzione $\pi_D - \pi$. Tuttavia ci sono diverse possibilità per le sostituzioni. Per esempio, per ogni sottocampo $GF(p^s)$ di $GF(q)$, é possibile costruire un piano di ordine $q^n = k$ che ammette un gruppo di omologie di ordine $(q^n - 1)/2$ con nucleo $GF(p^s)$. Tra questi piani é possibile trovare quelli che hanno due gruppi di omologie di ordine $(q^n - 1)/2$. Allora, in Hiramine-Johnson [**44**], hanno ottenuto una classificazione di tutti i piani di André generalizzati di ordine k che ammettono un gruppo di omologie di ordine $(k-1)/2$.
Un problema aperto é sapere se ci sono piani di traslazione di questo tipo che non sono piani di André generalizzati.