CAPITOLO 16

Insiemi parziali stretti in $P\Gamma L(n, q)$

DEFINIZIONE 16.1. *Un insieme S di permutazioni di un insieme X é detto un insieme parziale stretto se per ogni x, y in X e per ogni g, h in S risulta $xg = xh$ se e soltanto se $g = h$, e $x\,g = y\,g$ se e soltanto se $x = y$. Quando $|S| = |X| < \infty$, si dice che S é strettamente transitivo.*

Si ricordi che un piano di traslazione di ordine q^n con nucleo $K \cong GF(q)$ é equivalente a un insieme in $GL(r, K)$ strettamente transitivo.
Anche una rete di traslazione R di ordine q^r e grado $d \geq 3$ é equivalente a un insieme S parziale stretto in $GL(r, K)$ con $|S| = d - 2$.
Sia V uno spazio vettoriale di dimenzione 2r sopra K. Sia $\{L_1, L_2, \ldots, L_d\}$ una fibrazione parziale e si fissino due componenti L_1, L_2. Ricordiamo che questi L_i sono i sottospazi di dimensione r che hanno due a due intersezione identica. Allora, $V = L_1 + L_2$ e si scelga una base $B = \{B_1, B_2\}$ tale che B_i é una base per L_i, $i = 1, 2$. Identificando L_1 e L_2 abbiamo $V = \{(x, y)|x, y \in W\}$ dove W é uno spazio vettoriale di dimensione r sopra K. Siano L_1 e L_2 le componenti $y = 0$ e $x = 0$ rispettivamente. Gli altri sottospazi L_i; $d \geq i \geq 2$ sono $y = xM_i$ dove $\{M_i \mid i = 2, 3, 4, \ldots, d\}$ é un insieme parziale stretto di $GL(r, q)$ su $W - \{0\}$. Viceversa, un insieme di questo tipo produce una fibrazione parziale.
Gli insiemi parziali stretti sono interessanti anche perché sono legati ai flocks di una quadrica iperbolica:
Sia M la geometria dei punti $(x, y) \in PG(1, q) \times PG(1, q)$ e dei cerchi $y = x\,\sigma$ tali che $\sigma \in PGL(2, q)$. Si dice che i punti (x, y) e (x, z) sono +(plus) paralleli e i punti (x, y) e (w, y) sono (minus) paralleli. Allora, questo é un piano di Minkowski che é Miqueliano ed é isomorfo alla struttura dei punti delle coniche non-banali e delle rette di una quadrica iperbolica in $PGL(3, q)$ (dove le rette sono gli insiemi $\{(c, y)|y \in PG(1, q)\}$ o $\{(x, c)|x \in PG(1, q)\}$ per ogni $c \in PG(1, q)$).
Si ricordi la costruzione di Thas-Walker: Sia M una quadrica iperbolica in $PG(3, q)$ con un flock F di coniche date da $\{C_1, C_2, \ldots, C_{q+1}\}$. Sia π_i il piano che contiene C_i e supponiamo che $PG(3, q)$ é contenuto in $PG(5, q)$ in modo tale che M sia contenuta nella quadrica Q di Klein. Sia $\pi_i^{\perp}$ lo spazio

perpendicolare a π_i. Allora, $\{\pi_i^{\perp} \cap Q | i = 1, 2, \ldots, q+1\}$ é un insieme di q^2+1 di punti che sono a due a due non perpendicolari. Quindi, usando la corrispondenza di Klein, abbiamo una fibrazione di q^2+1 rette in $PG(3, q)$. Se si pensa ad M come ad un sottoinsieme di $PGL(2, q)$, un flock é equivalente a un insieme $\{y = x\sigma_i | i = 1, 2, \ldots, q+1\}$ dove $\{\sigma_i | i = 1, 2, \ldots, q+1\}$ é un insieme che é strettamente transitivo e produce un piano di traslazione. Si puó pensare a tutto ció anche senza la geometria di Klein:
sia $\{\sigma_i | i = 1, 2, \ldots, q+1\}$ un insieme in $PGL(2, q)$ che é strettamente transitivo. Sia σ_i, l'elemento $Z \to (Za+b)/(Zc+d)$; per esempio, consideriamo $(x, y) \to (x, y)M_i$ dove $(x/y) = Z$, $M_i = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con det $M_i \neq 0$. Allora, $\{M_i | i = 1, 2, \ldots, q+1\}$ é un insieme di $GL(2, q)$ che opera transitivamente sugli spazi di dimensione uno.
É anche facile verificare che $\{M_i u\ I_2 | i = 1, 2, \ldots, q+1,\ u \in GF(q)^*\}$ é un insieme in $GL(2, q)$ che é strettamente transitivo e quindi é equivalente a un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo che contiene $GF(q)$. Non é invece facile verificare che questo piano é isomorfo al piano che nasce dalla quadrica.
Thas ([**134**], [**136**]), Bader-Lunardon [**5**] hanno dimostrato che tutti i piani che possono essere costruiti da un flock di una quadrica iperbolica in $PG(3, q)$ sono piani su un quasicorpo associativo. Questo metodo per la costruzione di piani di traslazione dagli insiemi di questi tipo é estremamente generale. Infatti é possibile usare questo per costruire fibrazioni parziali. Per esempio, sia $S = \{\tau_i | i = 1, 2, \ldots, t\}$ un insieme parziale stretto in $P\Gamma L(n, q)$ che agisce sui punti di $PG(n-1, q)$.
Si scelga la rappresentazione $\{(x_{,1}, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1^\sigma, x_2^\sigma, \ldots, x_n^\sigma)M_i | i = 1, 2, \ldots, t\}$ e scriviamo $X \to X^\sigma M_i$.

Teorema 16.2. $\{X \to X^\sigma M_i u I_n | i = 1, 2, \ldots, t, u \in GF(q)^*\}$ é un insieme parziale stretto e produce una fibrazione parziale F di ordine q^n e di grado $t(q-1)+2$.

Si noti che se $V = \{(x, y) | x, y \in W\}$ spazio vettoriale di dimensione n su $GF(q)\}$, allora l'insieme $\{x = 0,\ y = 0,\ y = x^\sigma M_i u\ I_n\}$ é una fibrazione parziale.

Definizione 16.3. *Sia R una rete di ordine q^r e grado $q+1$ tale che per ogni punto P, le rette che contengono P sono coperte da un insieme di sottopiani affini di ordine $q+1$. In tal caso, diremo che R é una rete che é ricoperta da sottopiani.*

Non é difficile verificare che la rete $\{x = 0,\ y = 0,\ y = x^{\sigma} M_i u\ I_n\}$ é una rete ricoperta da sottopiani. Inoltre, usando le idee di Foulser [**37**] e Liebler [**111**], si ha:

Teorema 16.4. (Johnson [**82**]).

Una rete N di traslazione che é ricoperta da sottopiani é una rete di un regolo, cioé esiste uno spazio proiettivo $PG(2r-1, K)$ per $K \cong GF(q)$ contenente un regolo R che produce una rete isomorfa a N.

Usando la teoria delle geometrie semi-parziali, Frank De Clerck e Johnson hanno provato che il teorema citato sopra può essere dimostrato senza l'ipotesi che la rete sia di traslazione, é necessario peró assumere che il suo ordine sia finito.

Teorema 16.5. (De Clerck, Johnson [**26**]).

Una rete (finita) ricoperta da sottopiani é una rete di un regolo.

In termini di insiemi parziali stretti, si ha:

Teorema 16.6. Sia S un insieme parziale stretto di $P\Gamma L(n, q)$ di cardinalità t. Allora, esiste una rete di traslazione di ordine q^n e grado $t(q-1)+2$ tale che la fibrazione parziale ad essa associata é unione delle t reti dei regoli.

Si noti che le reti possono corrispondere a regoli in spazi proiettivi diversi. Tali reti R di traslazione hanno fibrazioni della forma $y = x^{\sigma} M_i u I_n$ per $u \in GF(q)$ e $M_i \in GL(n, q)$. Allora, é facile vedere che R ammette due gruppi di omologie di ordine $q-1$, $H_y : \langle (x, y) \to (x, yuI_n) | u \in GF(q)^* \rangle$ e $H_x : \langle (x, y) \to (xuI_n, y) | u \in GF(q)^* \rangle$. Questi gruppi hanno le stesse orbite sulla retta all'infinito.
Si scelga un punto P che non é su una retta della fibrazione parziale. Allora, $\langle P \langle H_x, H_y \rangle \rangle$ é un $K(\cong GF(q))$-sottopazio di dimensione 2.
Si ricordi, inoltre, che ciascuna delle t reti $R_i = \{y = x^{\sigma} M_i u I_n | u \in GF(q)^*\} \cup \{x = 0,\ y = 0\}$ é ricoperta da sottopiani. I sottospazi di $x = 0$ sono $\{X_i | i = 1, 2, \ldots, (q^n - 1)/(q-1)\}$ e i sottospazi di $y = 0$ sono $\{Y_i | i = 1, 2, \ldots, (q^n - 1)/(q-1)\}$. Allora, la rete R_k produce a una permutazione:

Per ogni X_i, esiste un spazio Y_j tale che $< X_i, Y_j >$ é un sottopiano nella rete R_k. Quindi, esiste una permutazione σ di $\{1, 2, \ldots, (q^n - 1)/(q - 1)\}$ tale che $\{< X_i, Y_{\sigma(i)} > | i = 1, 2, \ . \ . \ . \ , (q^n - 1)/(q - 1)\}$ é l'insieme di sottopiani di ordine q che copre R_k. Allora, per t reti, esiste un insieme $\{\sigma_i \mid i = 1, 2, \ldots, t\}$ di permutazioni che é parziale stretto. É anche possibile formare un quadrato parziale latino $[\sigma_i(j)]_{t\times(q^n-1)/(q-1)}$. Quindi, é possibile estendere quest'ultimo a un quadrato latino completo

$$\{\sigma_i | 1, 2, \ldots, (q^n - 1)/(q - 1)\}.$$

Per esempio per σ_{t+1}, si può costruire un insieme

$$\{< X_i, Y_{\sigma_{t+1}(i)} > | i = 1, 2, \ldots, (q^n - 1)/(q - 1)\}$$

di $(q^n - 1)/(q - 1)$ sottospazi.
Se questo insieme é un insieme di sottopiani nella rete, questa rete corrisponde a un regolo ed é possibile estendere l'insieme originale S in $P\Gamma L(n, q)$ ad un insieme S^+ di cardinalità $t + 1$ in $P\Gamma L(n, q)$ che é parziale stretto.

Teorema 16.7. (Johnson [**85**]).

Sia $S \leq P\Gamma L(2, q)$ un insieme parziale stretto con cardinalità t. Allora, é quasi possibile estendere la rete R_S. La rete R_S ha grado $t(q - 1) + 2$.
Esiste una rete R^*_S di grado $(t + 1)(q - 1) + 2$ che contiene $x = 0$, $y = 0$ come sottopiani . $R_S - \{x = 0, y = 0\}$ é contenuta in R^*_S.
R^*_S ammette due gruppi di Baer di ordine $q - 1$ che hanno le stesse orbite sulla retta all' infinito.
Se la rete R^*_S é derivabile, allora é possibile estendere S a un insieme parziale stretto S^+ in $P\Gamma L(2, q)$ con cardinalità $t + 1$ e S^+ produce una rete R_S+ di grado $(t + 1)(q - 1) + 2$ che contiene R_S.

Si noti che questa volta, non si fanno ipotesi su Fix(B) e coFix(B) quando si parla dei gruppi di Baer.

Esiste anche un teorema inverso:

Teorema 16.8. (Johnson [**85**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 che ammette due gruppi di Baer di ordine $q - 1$. Se siffatti gruppi di Baer hanno le stesse orbite sulla retta all' infinito, allora esiste un campo $K \cong GF(q)$ tale che π corrisponde a un insieme parziale stretto S in $P\Gamma L(2, q)$ di cardinalitá q. S può essere esattamente esteso quando π é derivabile.