CAPITOLO 15

Gruppi massimali di Baer

Diversi studi sono stati fatti sui gruppi di collineazioni di piani di traslazione.

Teorema 15.1. Hering-Ostrom (1972 [**41**], [**116**]).

Sia π un piano finito di traslazione del ordine p^r dove p é un primo e sia G un gruppo di collineazioni contenuto nel complemento lineare e generato da elazioni affini.

Allora, abbiamo le seguenti possibilitá:

(1) G é Abeliano elementare,

(2) $p = 2$ ed esiste un sottogruppo normale H di G tale che $|H|$ é dispari e $|G/H| = 2$,

(3) G é isomorfo a $SL(2, p^s)$ con $s|r$,

(4) $p = 2$ e G é isomorfo a $S_z(2^{2s+1})$,

(5) $p = 3$ e G é isomorfo a $SL(2, 5)$.

Foulser ha provato che molte di queste conclusioni si ottengono anche sotto le ipotesi che il gruppo sia generato da i p-gruppi di Baer. Anche per $p \neq 2, 3$, c'é una rete di grado $p^{r/2} + 1$ fissata dal gruppo che contiene tutti i sottopiani di Baer fissati dalle p-collineazioni di Baer.

Teorema 15.2. (Foulser [**38**] (l972).

Sia π un piano di traslazione di ordine p^r, r pari, e sia G un gruppo di collineazioni nel complemento di traslazione che é generato dalle p-collineazioni di Baer, $p \neq 2, 3$.

Allora,

(1) G puó essere uno dei gruppi descritti in Hering-Ostrom.

(2) Siano π_o, π_1 sottopiani di Baer tali che ogni punto di π_i é fissato da un p-gruppo di Baer G_i, per $i = 0, 1$. Allora π_o e π_1 sono nella stessa rete di grado $p^{r/2} + 1$.

Nei piani di semi-traslazione non esiste alcuna incompatibilità tra elazioni affini e p-gruppi di Baer. Comunque, in piani di traslazione del ordine dispari, Foulser ha provato:

Teorema 15.3. (Foulser [**38**]).

Gruppi di elazioni e p-gruppi di Baer non possono coesistere in piani di traslazione del ordine dispari.

Naturalmente, per $p = 2$ involuzioni di Baer ed elazioni possono coesistere.

Teorema 15.4. (Jha-Johnson [**51**], [**52**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine 2^{2r} che ammette elazioni affini e involuzioni di Baer.

Sia E un gruppo di elazioni e B un 2-gruppo di Baer.

(1) se $|B| \geq 2q^{1/2}$ allora $|E| \leq 2$,

(2) se E e B si normalizzano e se $|E| = q$ allora $|B| \leq 2$.

Un problema interessante é classificare i piani di traslazione finiti che ammettono almeno due grandi gruppi di collineazioni centrali o due grandi gruppi di Baer. Relativamente al secondo caso, si ha :

Teorema 15.5. (Jha-Johnson [**49**], [**50**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine p^r che ammette almeno due p-gruppi di Baer di ordine $\geq 2p^{r/2}$. Allora π é un piano di Hall o un piano di ordine 16.

Sia il gruppo generato da elazioni il gruppo $SL(2, p^s)$ o $S_z(2^{2a+1})$ dove p^s o $2^{2a+1} \geq 2p^{r/2}$. Per $SL(2, p^s)$ si ha che $s|r$, $s \geq r/2 + 1$ e il piano é Desarguesiano. Per $S_z(2^{2a+1})$ c'é un sottopiano di Lüneburg-Tits di ordine 2^{2s} e le altre condizioni implicano che il piano π sia un piano di Lüneburg-Tits.
Un gruppo di Baer in un piano di traslazione di ordine q^2 ha ordine divisibile per $q(q-1)$. Se consideriamo gruppi generati da due grandi p'-gruppi di Baer, l'ordine del gruppo é diviso da $q-1$. Una domanda naturale é quanto grande deve essere il gruppo per ottenere una classificazione?
Si noti che é facile costruire con la derivazione un piano di traslazione che ammette almeno un gruppo di ordine $q-1$.
Inolte, e un piano di traslazione di ordine p^r ammette un p'-gruppo di Baer B, allora esistono due sottopiani di Baer nella stessa rete di grado $p^{r/2}+1$ che sono fissati da B. Per uno di questi, ogni punto é fissato da B e si chiama sottopiano Fix(B) l'altro si chiama coFix(B). Quando il nucleo é isomorfo a $GF(q)$ e $|B| > 2$, c'é anche un gruppo B^* di Baer in BK^* dove K^* indica il gruppo di omologie di ordine $q-1$ con asse la retta all'infinito, in questo caso $|B^*| = |B|$ e Fix$(B^{*)}$ =coFix(B), Fix(B) =coFix(B^*).
La situazione descritta sopra non dá molte informazioni, quindi, consideremo il caso in cui esistono almeno due grande p'-gruppi di Baer B, B^* con $\{$ Fix(B), coFix$(B)\} \neq \{$Fix (B^*), coFix $(B^*)\}$.
Per capire cosa vuol dire "ordine grande", ricordiamo il metodo per la costruzione di piani dovuto a Hiramine, Matsumoto e Oyama, generalizzato da Johnson, e che si chiama "elevazione" o "lifting" (si veda [**80**]). Con questo metodo, un piano di traslazione π di ordine q^2 e nucleo $GF(q)$ produce a un piano di traslazione π^L di ordine q^4 e nucleo $GF(q^2)$. π^L ammette sempre un gruppo di elazioni E di ordine q^2 e gruppo di Baer B di ordine $q+1$ dove $[E, B] \neq 1$ (cioé E B non si centralizzano). Allora, ci sono molti gruppi di Baer ($2q^2$ di questi) di ordine $q+1$. Questi piani sono sempre presenti e quindi per avere una quasi-classificazione dei piani di traslazione π che ammettono due p'-gruppi di Baer B, dobbiamo considerare il caso in cui $|B| > o(\pi)^{1/2} + 1$.
Consideriamo i piani di traslazione di ordine q^2 che ammettono due gruppi di Baer (cioé B-gruppi) di ordine $q-1$ (si veda [**14**]). Data una quadrica iperbolica in $PG(3, q)$, un flock parziale F é un insieme di t, $1 \leq t \leq q+1$, coniche non-banali che hanno a due a due intersezione identica. Johnson ha dimostrato nel l988 ([**67**], [**83**]) che c'é una corrispondenza tra piani di traslazione di ordine q^2 con nucleo $GF(q)$ che ammettono un gruppo B di

Baer di ordine $q-1$ e i flocks parziali iperbolici con $t=q$ coniche non-banali. —'E interessante il caso in cui se il gruppo del flock parziale é un quoziente del gruppo del piano di traslazione. Affinché questo accada il gruppo completo del piano deve normalizzare il gruppo B di Baer. Allora, se questo non é il caso, ci sono almeno due gruppi di Baer. Quindi, per studiare i gruppi di un flock parziale, dobbiamo studiare i piani di traslazione di ordine q^2 e nucleo $GF(q)$ che ammettono almeno due gruppi di Baer di ordine $q-1$. Senza qualche ulteriore ipotesi, non ci sono molti strumenti per affrontare il problema nei piani di traslazione. In questo caso si suppone che tutti i gruppi di Baer B hanno i loro sottospazi Fix(B) e coFix(B) nella stessa rete di grado $q+1$.

Teorema 15.6. (Biliotti-Johnson [**14**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 che ammette almeno due gruppi di Baer di ordine $q-1$. Se i gruppi fissano puntualmente la retta all'infinito, allora si ha uno dei seguenti casi:

(1) π é un piano di Hall o ha ordine 9 ed é Desarguesiano.

(2) π può essere derivato da un piano su un semicorpo di ordine q^2 con una struttura di coordinate contenente un nucleo medio isomorfo a $GF(q)$.

In questo caso si dice che π é un piano generalizzato di Hall di tipo uno.

Il gruppo generato dai gruppi di Baer é il prodotto di un gruppo di Baer di ordine q con un gruppo di Baer di ordine $q-1$, inoltre per tutti i gruppi di Baer B_i, Fix$(B_i)=$ Fix(B_j) ma coFix$(B_i)\neq$coFix(B_j) per $i\neq j$, $i,j=1,2,\dots,q$.

(3) π può essere derivato da un piano su un semicorpo di ordine q^2 con una stuttura di coordinate contenente un nucleo destro isomorfo a $GF(q)$.

In tal caso si dice che π é un piano generalizzato di Hal di tipo due. In particolare, per i gruppi di Baer B_i, $i=1,2,\dots,q$, coFix$(B_i)=$ coFix(B_j) ma Fix$(B_i)\neq$Fix(B_j) per $i\neq,j$, $i,j=1,2,\dots,q$ e il gruppo generato ha la forma data in (2).

(4) Se il nucleo é isomorfo a $GF(q)$, $q\neq 9$, allora nei casi (2), (3), i piani sono piani di Hall.

Esistono molti esempi di piani generalizzati di Hall e probilmente una loro classificazione non é possibile. SE esistono due gruppi di Baer di ordine $q-1$ e i loro sottospazi associati sono nella stessa rete, é stato ottenuto un buon teorema a riguardo. Se, invece, i sottospazi non sono nella stessa rete, il problema é molto difficile. Per questa ragione ed per la connessione con flocks é stata fatta un'ipotesi sul nucleo.

Teorema 15.7. (Johnson [**67**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $GF(q)$ dotato di due gruppi di Baer B_1, B_2 di ordine $q-1$.. Allora π é uno spazio vettoriale e sia L un sottospazio di dimensione due, allora $B_1 L \cup \{\mathrm{Fix}(B_1), \mathrm{coFix}(B_1)\}$ é un regolo in $PG(3,q)$.

Con questo risultato, é possibile dimostrare:

Teorema 15.8. (Biliotti-Johnson [**14**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$. Se π ammette almeno due gruppi di Baer di ordine $q-1$ nel complemento di traslazione, allora abbiamo una delle seguenti possibilità:

(i) π é un piano di Hall,

(ii) π é il piano Desarguesiano di ordine 9,

(iii) π é il piano su un semicorpo di ordine 16 e nucleo GF(4),

(iv) π ha ordine 25 ed é il piano sul quasicorpo associativo irregolare di ordine 25 o il piano di Walker con orbite 10, 16 sulla retta all' infinito.

Usando questo teorema, é possibile avere qualche incompatibilità tra gruppi di Baer e gruppi di omologie.

Teorema 15.9. (Biliotti-Johnson [**14**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 nucleo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer B di ordine $q-1$ nel complemento di traslazione.

Se $q > 5$, allora:

(i) π é un piano di Hall,

(ii) ogni gruppo di omologie H deve fissare $\mathrm{Fix}(B)$

(iii) q é dispari, $|H| = 2$ e H deve fissare $\{\mathrm{Fix}(B), \mathrm{coFix}(B)\}$.

COROLLARIO 15.10. *Un piano di traslazione di ordine $q^2 > 25$ e nucleo $K \cong GF(q)$ non ammette un gruppo di Baer B di ordine $q-1$ e un gruppo di omologie di ordine $q-1$.*

COROLLARIO 15.11. *Sia S un flock parziale di una quadrica iperbolica in $PG(3,q)$ con q coniche per $q > 5$.*

Allora il gruppo completo di S é isomorfo a G/EH^* dove G é il gruppo completo del piano di traslazione associato, E é un gruppo di elazioni di ordine q e H^* é il gruppo di omologie di ordine $q-1$ con asse la retta all'infinito.

Finalmente, con il teorema dato sopra, é possibile costruire alcuni flocks F_i, $i = 1, 2$ parziali di una quadrica iperbolica in PG(3,5) con 5 coniche. Gli F_i sono massimali quando il piano di traslazione é derivabile usando la rete che contiene lo spazio fissato da un gruppo di Baer di ordine 4. Inoltre tali reti non sono derivabili.

Allora abbiamo i primi esempi di flocks parziali con questa proprietà.