CAPITOLO 13

Ovoidi e piani di traslazione

Ricordiamo che un ovoide in un $\Omega^+(2n,q)$-spazio é un insieme di $q^{2n-1}+1$ punti (sottospazi di dimensione uno) della quadrica iperbolica Q tale che non esistono due punti incidenti una retta di Q.
Un ovoide in un $\Omega(2n-1,q)$-spazio é un insieme che diventa un ovoide quando si considera lo spazio $\Omega(2n-1,q)$ come un sottospazio di un $\Omega^+(2n,q)$-spazio.
Sia $n=4$ e O un ovoide di q^3+1 punti in un $\Omega^+(8,q)$-spazio o un $\Omega(7,q)$-spazio. Se Q é la quadrica associata e P é un punto di $Q-O$, sia $P^\perp$ lo spazio polare di P. Allora, $P^\perp/P$ é un $\Omega^+(,6,q)$ o $\Omega(5,q)$-spazio rispettivamente.

Proposizione 13.1. *$\{z+ < P >: z \in P^\perp \cap O\}$ é un ovoide di q^2+1 punti in $P^\perp/P$.*

Nel Capitolo 2, si é parlato della quadrica di Klein e dei piani di traslazione che possono essere associati ad ovoidi nei $\Omega^+(6,q)$-spazi. Allora, dagli ovoidi in $\Omega^+(8,q)$ o $\Omega(7,q)$-spazi, possiamo costruire piani di traslazione di ordine q^2 con nucleo contenente $K \cong GF(q)$. Verrá usata la notazione della Capitolo 2 per la quadrica di Klein e per le fibrazioni che possono essere ottenute da ovoidi nei $\Omega^+(6,q)$-spazi.

Nel 1982 Kantor [**105**] ha studiato piani di traslazione che possono essere ottenuti da ovoidi noti. Successivamente, Conway, Kleidman, e Wilson hanno trovato alcune nuove classi di ovoidi, si veda anche Charnes [**24**] e Capitolo 9). Recentemente, Johnson ha studiato i piani di Kantor ottenuti da ovoidi unitari, e da ovoidi di Ree-Tits.

Nel caso di un ovoide unitario, Kantor ha dimostrato il seguente:

Teorema 13.2. (Kantor [**105**], Capitolo 4).

Sia $V = \{m = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & a & \beta^* \\ b & \gamma^* & \alpha^* \end{bmatrix} | \alpha, \beta, \gamma \in \ L \cong GF(q^2);\ a, b, c \ \in \ K \cong GF(q)$
$, K \subset L$ con $a + T(\alpha) = 0\}$ tale che $T(\alpha) = \alpha + \alpha^q$ e $\delta^* = \delta^q$ per $\delta \in \ L$.

Definito $Q_8 : V \to K$ come $Q_8(m) = \alpha^2 + \alpha\ \alpha^* + \alpha^{*2} + T(\beta\ \gamma) + bc$.

(1) V é un $\Omega^+(8, q)$-spazio se e solo se $q \equiv 2\ mod\ 3$.

(2) Se $q \equiv 0\ mod\ 3$, allora Rad $V = \langle I \rangle$ (le K-matrici scalari).

(3) Sia $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e sia G il gruppo $GU(3, q)$ delle matrici non-singolari A su L tali che $J^{-1}A\ J = (A^*)^t$ dove se $A = [a_{ij}]$ allora $A^* = [a_{ij}^q]$ e $(A^*)^t$ significa la matrice trasposta di A^*. Allora, G agisce su V definito in (1) via coniugio, inducendovi $PGU(3, q)$.

Inoltre, G fissa Q_8.

(4) $\Omega = \{\langle Z \rangle \mid O \neq Z \ \in \ V,\ Z^2 = O\}$ é un ovoide se $q \equiv 2\ mod\ 3$ e proietta un ovoide di $V/\langle I \rangle$ se $q \equiv 0 \mod 3$.

Sia Y un punto singolare rispetto a Q_8 che non é in Ω e si consideri $Y^\perp/Y$.
Se $q \equiv 2\ mod\ 3$, allora $Y^\perp/Y$ é un $\Omega^+(6, q)$-spazio.
Se $q \equiv 0\ mod\ 3$, allora $(Y^\perp/\langle I \rangle)/(\langle Y \rangle/\langle I \rangle)$ é un $\Omega(5, q)$-spazio.

Alcuni dei piani di traslazione che sono associati a $Y^\perp/Y$ sono noti. Si possono scegliere come rappresentanti delle G-orbite dei punti singolari. Kantor dimostra che ci sono due (una) orbite di punti singolari che non sono in Ω quando $q \equiv 2\ mod 3$ ($q \equiv 0 \mod 3$).

Se $q \equiv 2 \bmod 3$, i rappresentanti sono $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $Y' = Diag(w, 1, w^q)$ dove $w^3 = 1 \neq w$. Se $q \equiv 0 \mod 3$, allora Y é un rappresentante.

Teorema 13.3. (Kantor [**105**], Johnson [**74**] (3.2)).

(1) Se $q \equiv 2\ mod\ 3$ allora il piano di traslazione che é associato a Y é il piano di Walker se q é dispari, e quello di Betten se q é pari. (Questi piani

corrispondono ai flock conici di tipo I-1 definiti nel Capitolo 7).

(2) Se $q \equiv 0 \ mod \ 3$, allora il piano di traslazione associato a Y é un piano su un semicorpo di Knuth (questi piani corrispondono ai flock conici di tipo II-2 defnti nel Capitolo 7).

Il piano di traslazione di ordine q^2 che può essere ottenuto da Y' ammette un gruppo di ordine q^2-1 che fissa due componenti e agisce transitivamente sulle altre componenti.

Teorema 13.4. (Johnson [**74**](3.6)).

Una fibrazione per un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ associato a Y' é:

(1) se q é pari e $q \equiv 2 \ mod \ 3$: $x = O$, $y = x \begin{bmatrix} u & t \\ t^3+u^2t+t^2u & u^3+t^3 \end{bmatrix}$ con $u, t \in \ K$.

Il piano ammette il gruppo di collineazioni G di ordine q^2-1, dove:

$$G = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{u,t}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & t \\ 0 & 0 & t & u+t \end{bmatrix} | u, t \ \in \ K \cong GF(q),\ (u,t) \neq (0,0)\}, \text{e}$$

dove $\delta_{u,t} = \mathbf{det} \begin{bmatrix} u & t \\ t & u+t \end{bmatrix}$,

(2) se q é dispari e $q \equiv 2 \ mod \ 3$,

$x = 0$, $y = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{u,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & t \\ t\gamma^3 & u+t\gamma^2(-3/\gamma)^{1/2} \end{bmatrix}$ dove γ non é un quadrato in K, $u, t \ \in \ K$, e dove $\delta_{u,t} = \det \begin{bmatrix} u & t \\ t\gamma^3 & u+t\gamma^2(-3/\gamma)^{1/2} \end{bmatrix}$.

Il piano ammette il gruppo di collineazioni G di ordine q^2-1 dove

$$G=\{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\delta_{u,t}^{-1}&0&0\\0&0&u&t\\0&0&t\gamma^{3}&u+t\gamma^{2}(-3/\gamma)^{1/2}\end{bmatrix}|u,t\;\in\;K,\;(u,t)\neq(0,0)\}.$$

Cenni della dimostrazione:

(i) Possiamo scegliere $\{1,t\}$ come K-base per L tale che $t^2=t+1$, $t^3=1$, e $t^q=t+1$. Per Kantor [**105**], é possibile identificare $Y'^{\perp}/Y'$ con $K\oplus L\oplus L\oplus K$ con la quadrica Q^* tale che $Q^*(b,\beta,\gamma,c)=T(\beta\gamma)+bc$ per $b,c\;\in K$ e $\beta,\gamma\in\;L$. Inolte, l'ovoide di (13.2) (4) diventa:

$$\langle(0,0,0,1)\rangle\cup\{\langle(1,\sigma^{q+1}\sigma\; t,\sigma^{q},(\sigma^{q+1})^{2})\rangle|\sigma\;\in\;L\}(\text{ per }w=t).$$

Si rappresentia $0\oplus L\oplus 0\oplus 0$ con la base $\{1,t\}$ e $0\oplus 0\oplus L\oplus 0$ con la base $\{1,t+1\}$. Con questa rappresentazione, la quadrica ha la forma data in Capitolo 2 per la quadrica di Klein e l'ovoide diventa: $\langle 0,0,0,0,0,1\rangle\cup\{\langle 1,((\sigma_1+\sigma_2)\sigma_1+\sigma_2^2)\sigma_2,((\sigma_1+\sigma_2)\sigma_1+\sigma_2^2)(\alpha_1+\sigma_2),\sigma_1,\sigma_2,\delta)\rangle|\sigma_i\in\;K,\;i=1,2$ per un opportuno elemento $\delta\}$. Si applica la corrispondenza $(1,a,b,c,d,\delta)\rightarrow y=x\begin{bmatrix}-c&d\\a&b\end{bmatrix}$ (si veda Capitolo 2), ottenendo la fibrazione

$$x=0,y=x\begin{bmatrix}\sigma_1&\sigma_2\\\sigma_2\sigma_1^2+\sigma_1\sigma_2^2+\sigma_2^3&\sigma_1^3+\sigma_2^3\end{bmatrix}.$$

Per Kantor [**105**](Capitolo 4 e (4.8)), anche per $q\equiv 0$ mod 3, c'é un punto $N=diag(\lambda,0,\lambda^q)$, con $\lambda\;\in\;L^*$ e $T(\lambda)=0$, tale che $N^{\perp}/\langle I\rangle$ é un $\Omega^+(6,q)$ spazio.

Teorema 13.5. (Johnson [**74**] (3.13)).

Una fibrazione per un piano di ordine 3^{2r} ottenuto dal punto N é:

$$x=0,\qquad y=x\begin{bmatrix}u&t\\t\gamma(u^2-t^2\gamma)&u(u^2-t^2\gamma)\end{bmatrix}$$

dove γ non é un quadrato e con $u,t\;\in\;K\cong GF(3^r)$

Questo piano ammette il gruppo G di ordine $3^{2r}-1$:

$$G=\{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&(u^2-t^2\gamma)^{-1}&0&0\\0&0&u&t\\0&0&t\gamma&u\end{bmatrix}\;|\;u,t\;\in\;K,\;(u,t)\neq(0,0)\}.$$

Inoltre, Kantor considera i piani che possono essere ottenuti da ovoidi di Ree-Tits. Per esempio c'é un piano di traslazione di tipo elazione (1).