CAPITOLO 8

Derivazione

Il metodo di derivazione nasce intorno al l960 ad opera di T.G. Ostrom ([**118**],[**119**]): Un piano affino π di ordine n^2 contenente un insieme di $n^2(n+1)$ sottopiani di Baer contenuti in una rete R di grado $n+1$ é usato per constuire un'altro piano affine π^* le cui rette sono le rette che non sono in R e i sottopiani di Baer di R.
Un piano affine π risulta essere derivabile quando è possibile scegliere coordinate con le seguenti proprietá: Sia $Q = (Q, +, \cdot)$ un insieme di coordinate per π tale che:

(i) l'insieme dei punti é $\{(x, y)|x, y \in Q\}$; le reti sono gli insiemi di equazioni $y = x \cdot m + b$, $x = c$ con $m, b, c \in Q$,

(ii) esiste un sottocampo $K = (K, +, \cdot)$ tale che Q è uno spazio vettoriale su K rispetto al prodotto vettoriale: $v \cdot \alpha$ con $v \in Q$ e $\alpha \in K$.

Per esempio, questa è la situazione nel piano di Desargues di ordine n^2 dove Q è un campo isomorfo a $GF(n^2)$. A.A. Albert ha dimostrato che il piano derivato del piano di Desargues è il piano di Hall (si veda [**116**]). In questo caso, con il campo $Q \cong GF(n^2)$, il piano diventa uno spazio vettoriale di dimensione 4 su $K \cong GF(n)$. Nello spazio proiettivo corrispondente $PG(3, n)$, la rete R che contiene i sottopiani di Baer diventa un regolo. Sempre usando le coordinate, é stato dimostrato che il piano di Hughes è derivabile, il piano da esso costruito si chiama il piano di Ostrom-Rosati ([**116**],[**131**]). Questo piano é molto importante perche é il primo esempio di piano finito con una sola (P, L)-transitività dove P è incidente con L.
I piani derivati possono essere infiniti e molti autori hanno studiato quando è possible che un piano derivabile abbia un'insieme di coordinate Q che è uno spazio vettoriale di dimensione due su un sottocorpo K. Lunardon [**113**] e Grundhöfer [**36**] hanno dimostrato questo per piani finiti e per piani derivabili di traslazione. Krüger [**109**] ha dimostrato lo stesso per piani sui gruppi cartisiani. In queste situazioni, i sottopiani di Baer sono sempre Desarguesiani. Non è difficile vedere che il metodo di derivazione può essere considerato sol con una rete senza avere un piano che la contiene. Allora

diventano interessanti le seguenti questioni:

(1) I piani di Baer nelle reti derivabili sono sempre piani di Desargues?

(2) Ogni rete derivabile corrisponde ad un regolo in un qualche spazio proiettivo?

(3) Si può estendere ogni rete derivabile ad un piano affino?

(4) É possibile scegliere coordinate Q per una rete derivabile in modo tale che Q è uno spazio vettoriale destro di dimensione 2 su un sottocorpo?

(5) É possible comprendere il metodo di derivazione in un qualche modo geometrico?

Per piani derivabili finiti, Prohaska [**128**] ha risposto affermativamente alla questione (1). Anche, per piani finiti di traslazione, Foulser [**37**] ha dimostrato che (1),(2),(3) e (4) sono vere. In [**25**], Cofman ha provato che la (1) é vera per piani affini derivabili, estendendo quindi il risultato di Prohaska. Ma i metodi della Cofman sono differenti da quelli di Prohaska. Ad ogni piano derivabile, in Cofman, corrisponde uno spazio affine in cui ogni sottopiano di Baer diventa un piano in tale spazio affine. Cioè, ogni sottopiano di Baer nella rete derivabile è Desarguesiano. Recentemente, é stato provato che é possibile usare la costruzione di Cofman per ottenere una descrizione completa della struttura delle reti derivabili.

In risposta alla questione (5) data sopra, si ha:

Teorema 8.1. (Johnson [**68**]).

(1) Sia $R = (P, L, C, B, I)$ una rete derivabile. Allora, esiste un corpo K e uno spazio proiettivo di dimensione tre $\Sigma \cong PG(3, K)$ tale che i punti P di R sono le rette di Σ oblique ad una fissata retta N, le rette L di R sono i punti di $\Sigma - N$, le classi di parallelismo C di R sono i piani di R che contengono N e i sottopiani B di R sono i piani di Σ che non contengono N.

(2) Viceversa, se $\Sigma_1 \cong PG(3, L)$ è uno spazio proiettivo di dimensione tre su un corpo L ed N_1 é una qualunque retta fissata. Definiamo punti P_1, rette L_1, classi di parallelismo C_1, sottopiani B_1 in accordo con la

corrispondenza data sopra dove l'incidenza I_1 è l'incidenza in Σ_1, allora $R = (P_1, L_1, C_1, B_1, I_1)$ è una rete derivabile.

Quindi, le reti derivabili e gli spazi proiettivi di dimensione tre sono equivalenti.

Per la questione (2) data sopra sui regoli e reti derivabili, è possibile usare (8.1) per determinare il gruppo completo di collineazioni di una rete derivabile.

Teorema 8.2. (Johnson [**69**]).

Sia R una rete derivabile e $\Sigma \cong PG(3, K)$ lo spazio proiettivo corrispondente. Sia F_R il gruppo completo delle collineazioni di R . Quindi, F_R è isomorfo al gruppo $P\Gamma L(4, K)_N$ dove N è una rete di Σ.

Si usa il gruppo completo delle collineazioni per trovare un opportuno gruppo di traslazione della rete R per dare una caratterizzazione delle reti derivabli. In particolare si ha:

Teorema 8.3. (Johnson [**69**]).

(1) Ogni rete finita derivabile corrisponde ad un regolo in un qualunque spazio proiettivo di dimensione tre.

(2) Ogni rete finita derivabile può essere estesa ad un piano affine.

Con la struttura di spazio proiettivo, si puó considerare la questione di una connesione geometica con derivazione.

Teorema 8.4. (Johnson [**64**]).

Sia R una rete derivabile e Σ_R lo spazio proiettivo corrispondente alla retta N. Sia σ una correlazione di Σ_R che fissa N. Allora, lo spazio proiettivo $\Sigma_R\sigma$ con la retta N corrisponde alla rete derivata R^* di R. La derivazione è una polarità.

In fine, è possible usare questa struttura per dimostrare il seguente teorema:

Teorema 8.5. (Johnson [**75**]).

Sia R una rete derivabile. Allora esiste un insieme di coordinate Q che è uno spazio vettoriale destro su un corpo K in cui la rete R ha equazioni $x = c$, $y = x \cdot \alpha + b$ per ogni $a, b \in Q$ e $\alpha \in K$; viceversa una rete che ha un insieme di coordinate con le proprietá date é derivabile.