CAPITOLO 4

Flock parziali iperbolici

Abbiamo visto nel Capitolo 2 che esiste una corrispondenza tra flock iperbolici e fibrazioni iperboliche. In corrispondenza sono anche i flock parziali iperbolici in $PG(3,q)$ con $t = q$ coniche e i piani di translazione di ordine q^2 con nucleo $GF(q)$ che ammettono un gruppo di Baer di ordine $q-1$ (Si veda Capitolo 3).
In [**136**], Thas ha costruito una classe di flock iperbolici congetturando l'unicitá di tale classe. I piani che corrispondono a tali flock sono piani sui quasicorpi associativi.
Recentemente Bader [**3**], Johnson [**65**] ed altri (Baker e Ebert per 11^2 [**7**]), hanno trovato tre nuove classi degli esempi con piani su nearfields irregolari di ordine $11^2, 23^2$, e 59^2. Questi nuovi flock si chiamano flock iperbolici irregolari o flock di Bader, Baker-Ebert, Johnson (BBEJ).
La classificazione dei flock iperbolici puó ritenersi completa con i lavori di Bader e Lunardon [**5**], Bonisoli [**19**], Kallaher [**40**], [**100**] ,[**101**] e Thas [**133**]–[**138**].

Definizione 4.1. *Un piano di traslazione si chiama un piano di Bol se ci sono due componenti L, M tali che per ogni componente N, esiste un'involuzione centrale σ di asse N tale che $\sigma(L) = M$.*

Per esempio, i piani su nearfields danno esempi di piani di Bol.

R.P. Burn [**22**] ha trovato un esempio di piano di Bol infinito che non è un piano su un nearcorpo. É di Burn la congettura secondo cui tutti i piani finiti di Bol siano piani sui nearfields.

Hanson e Kallaher [**40**] hanno provato la congettura di Burn per piani di ordine $\neq 3^4$ e 3^6.

Teorema 4.2. (Kallaher [**101**], Hanson e Kallaher [**40**]).

Sia π un piano finito di Bol di ordine n. Se $n \neq 3^4 e\ 3^6$ allora π è un piano su un nearcorpo.

In [**134**], Thas ha completato la classificazione di flock iperbolici in $PG(3, q)$ per $q \equiv 1 \bmod 4$ senza usare la corrispondenza tra flock e piani di traslazione. Giá nel l975 Thas [**135**] aveva provato che per q pari esiste solo un flock iperbolico lineare (tutti i piani che contenono le coniche hanno una retta in comune).

Per (2.3), i piani di traslazione devono avere un gruppo di omologie di ordine $q-1$ le cui orbite danno regoli. Thas ha provato che per $q \equiv 1 \bmod 4$ questi piani sono sempre piani su nearfields (effettivamente Thas ha lavorato solo con i flock iperbolici).

Per qualunque q, Thas ha dimostrato quanto segue:

Teorema 4.3. (Thas [**134**]).

Sia F un flock iperbolico in $PG(3, q)$ e sia C una conica di F. Allora, esiste una involuzione σ di $PGL(4, q)$ che fissa F e fissa ogni punto di C.

Se prendiamo il piano π_C in $PG(3, q)$ che contiene C e usiamo la corrispondenza di Klein, π_C dá luogo al regolo opposto al regolo R_C nella fibrazione iperbolica corrispondente. Anche, i punti di C e i sottopiani di Baer in R_C si corrispondono. Traducendo ció in termini di piani di traslazione: σ é una omologia. Il piano polare di π_C contiene due punti che σ deve scambiare. Questi due punti diventano componenti del piano di traslazione Σ corrispondente. Allora, σ diventa una omologia che scambia due componente L e M di Σ
Anche, l'asse di σ deve essere contenuto in R_C. Allora, con il gruppo di omologie di ordine $q-1$ e con le involuzioni ottenute dal flock, Σ diventa un piano di Bol [**5**].
Applicando i risultati di Kallaher per ordini diversi da 3^4 e 3^6, i piani di traslazione che corrispondono ai flock iperbolici sono piani sui quasicorpi associativi.

Teorema 4.4. (Thas [**136**] per q pari , Thas [**134**] e Bader, Lunardon [**5**] per q dispari.

Sia F un flock iperbolico in $PG(3, q)$. Allora, il piano di traslazione corrispondente è

(i) un piano Desarguesiano se q pari,

(ii) un piano di Desarguesiano, o un piano su un quasicorpo associativo regolare, o un piano di ordine $11^2, 23^2$ o 59^2 sui quasicorpi associativi irregolari per q dispari.

Abbiamo visto che un flock parziale iperbolico privo di una conica corrisponde a un piano di traslazione di ordine q^2 che ammette un gruppo B di Baer di ordine $q-1$. Anche, un flock parziale può essere esteso ad un flock iperbolico quando la rete di grado $q+1$ che contene Fix$B$ corrisponde ad un regolo in $PG(3, K)$ (dove $K \cong GF(q)$ è il nucleo del piano). Ci sono esattamente due esempi che non possono essere estesi. Questi due esempi possono essere costruiti usando un metodo chiamato elevazione.

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo contenente $K \cong GF(q)$. Sia $GF(q^2) = GF(q)[t]$ tale che $t^2 = t\omega + \rho$ con $\omega, \rho \in K$. Possiamo rappresentare la fibrazione in π come:

$$x = O \qquad y = x \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ g(\alpha, \beta) - \omega h(\alpha, \beta) & h(\alpha, \beta) \end{bmatrix}$$

dove x, y sono 2-vettori su $GF(q)$, $\alpha, \beta \in K$ e $g, h : K \times\ K \to K$.

Si definisca $f : GF(q^2) \to GF(q^2)$ nel seguente modo $f(\alpha + \beta t) = g(a, \beta) - h(\alpha, \beta)t$.

Teorema 4.5. (Hiramine, Matsumoto, Oyama [**46**], Johnson [**80**]

Usando la notazione prima introdotta, esiste un piano di traslazione π^E di ordine q^4 con nucleo contenente $GF(q^2)$, detto piano elevato da π, con la seguente fibrazione:

$$x = O, \qquad y = x \begin{bmatrix} u & v \\ f(v) & u^q \end{bmatrix}$$

dove x, y sono 2-vettori su $GF(q^2)$, $u, v \in GF(q^2)$.

Teorema 4.6. (Johnson e Pomareda [**94**], Johnson [**67**]).

(1) Ci sono esattamente due piani di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ che ammettono un gruppo B di Baer di ordine $q-1$ che possono

essere elevati da piani di traslazione Σ e in cui la rete di grado $q+1$ che contiene il sottopiano Fix$B$ non è un regolo.

Per $q = 4$ o 9 il piano corrispondente Σ è rispettivamente il piano di Desargues di ordine 4 o il piano su un quasicorpo associativo regolare.

(2) Per $q = 4$ o 9 ci sono due flock parziali iperbolici in $PG(3,q)$ con q coniche che non possono essere estesi a un flock iperbolico. Inoltre, esiste un gruppo di collineazioni di ordine q che opera regolarmente sulle q coniche.

É un problema interessante determinare tutti i flock parziali iperbolici privi di una conica e che ammettono un gruppo di collineazioni che opera regolarmente sulle coniche.
La classificazione dei flock iperbolici è utile anche per trovare piani sui quasicorpi associativi. Per esempio, in (2.3), abbiamo visto che il piano associato ad un flock iperbolico ammette un gruppo di omologie le cui orbite sulle componenti producono regoli. Allora sorge in modo naturale la seguente domanda: é possibile avere un gruppo di omologie diun piano di traslazione la cui fibrazione contiene regoli non fissati da tale gruppo?
A riguardo é stato ottenuto Recentemente il seguente risultato:

Teorema 4.7. (Johnson [**79**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 il cui nucleo contiene $K \cong GF(q)$. Se π ammette un gruppo di omologie H di ordine $q-1$ e la fibrazione di π contiene un regolo (in $PG(3,K)$) che contiene l'asse o il coasse di H. Allora π è uno dei seguenti piani:

(i) un piano Desarguesiano,

(ii) un piano di traslazione su un quasicorpo associativo regolare di ordine dispari,

(iii) un piano di traslazione su un quasicorpo associativo irregolare di ordine $11^2, 23^2$, o 59^2.

Inoltre, π è Desarguesiano se e solo se ammette un gruppo di omologie di ordine $q-1$ e la fibrazione ha un regolo che contiene l'asse e il coasse del gruppo ma non entrambi.