CAPITOLO 3

Gruppi di Baer e flock parziali

Sia S una fibrazione parziale nello spazio vettoriale V_4 di dimensione 4 sul campo $K \cong GF(q)$ che consiste di t regoli aventi in comune due componenti $L \equiv (x = O)$ e $M \equiv (y = O)$. Gevaert e Johnson [**32**] hanno provato che esiste un gruppo di omologie H con asse L e coasse M che fissa ogni regolo di S. Allora, per la (1) in (2.2), esiste un flock parziale iperbolico.
In questo Capitolo indicheremo con B un sottogruppo di $GL(4, q)$, $q = p^r$ che fissa ogni punto di un sottopiano di Baer. Sia $\mathrm{Fix}(B) = \pi_o$. Foulser in [**34**] determina il gruppo che fissa ogni punto di π_o.
Sia $V_4 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) : x_i, y_i \in K, i = 1, 2\}$. Rappresenteremo S in modo tale che le sue componenti siano $x = O$, $y = O$, $y = xA$ con $A \in \Lambda$ (insieme delle matrici due per due ad elementi in K).

Teorema 3.1. (Foulser [**38**], Johnson [**67**]).

Sia P una fibrazione parziale in V_4 con $q + 1$ componenti (sottospazi di dimensione due). Sia N_P la corrispondente rete.

(1) Sia B un sottogruppo di Baer di $\Gamma L(4, q)$ che fissa N_P. Se $|B| = q$ o $|B| = q - 1$ con $q - 1 > 2$, allora il sottopiano $\mathrm{Fix}B = \pi_o$ è un K-sottospazio di dimensione due, cio´ π_o è un piano di Desargues.

(2) Prendiamo una base $\{e_2, e_4\}$ per π_o il cui completamento $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è una base per V_4 e tale che $< e_1, e_2 >, < e_3, e_4 >$ e $< e_1 + e_3, e_2 + e_4 >$ siano componenti della fibrazione P.

Rispetto a tale base:

$V_4 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) : x_i, y_i \in K, i = 1, 2\}$, $\pi_o = \{(0, x_2, 0, y_2) : x_2, y_2 \in K\}$,

$(x = O) =< e_3, e_4 >, (y = O) =< e_1, e_2 >, (y = x) =< e_1 + e_3, e_2 + e_4 >$.

(3) Se $|B| = q$ allora $B = B_q$ può essere rappresentato nella seguente forma:

$$B_q = \{ \begin{bmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : u \in K\}.$$

Se $|B| = q - 1$, allora $B = B_{q-1}$ può essere rappresentato della seguente forma:

$$B_{q-1} = \{ \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : u \in K - \{0\}\}.$$

Teorema 3.2. (Johnson [**67**]).

Usiamo la stessa notazione di (3.1).

(1) Sia L un K-sottospazio di dimensione due disgiunto da $\mathrm{Fix}(B_q)$.

Allora, $\mathrm{Fix}(B_q) \cup LB_q$ è un regolo in $PG(3, q)$.

(2) Sia $\mathrm{co}(\mathrm{Fix}(B_{q-1})) = \{(x_1, 0, y_1, 0) : x_1, y_1 \in K\}$. Sia L un K-sottospazio di dimensione due disgiunto da $\{\mathrm{Fix}(B_{q-1})\mathrm{co}(\mathrm{Fix}(B_{q-1}))\}$.

Allora, $\{\mathrm{Fix}(B_{q-1})\mathrm{co}(\mathrm{Fix}(B_{q-1}))\} \cup LB_{q-1}$ è un regolo in $PG(3, q)$.

(3) Sia W un K-sottospazio di dimensione uno disgiunto da $\mathrm{Fix}(B_q)$. Allora, $< WB_q >$ è un K-sottospazo di dimensione due tale che $< WB_q > \cap \mathrm{Fix}(B_q)$ è un K-sottospazio di dimensione uno.

(4) Sia S un K-sottospazio di dimensione uno disgiunto da

$$\{\mathbf{Fix}(B_{q-1})\mathbf{co}(\mathbf{Fix}(B_{q-1}))\}.$$

Allora, $< SB_{q-1} >$ è un K-sottospazio di dimensione due tale che $< SB_{q-1} > \cap \mathrm{Fix}(B_{q-1)}$ e $< SB_{q-1} > \cap \mathrm{co}(\mathrm{Fix}(B_{q-1})$ sono K-sottospazi di dimensione uno.

Consideriamo ora una fibrazione parziale F contenente la fibrazione P (la notazione é quella di (3.1)) che ammetta il gruppo B_{q-1} o B_q. Per il teorema (3.2) ogni componente L che non è in P, produce un regolo. Allora, F é unione di P e di un insieme di regoli. Consideriamo le altre fibrazioni parziali

$$(F-P) \cup \mathbf{Fix}(B_q), (F-P) \cup \{\mathbf{Fix}(B_{q-1}), \mathbf{co}(\mathbf{Fix}(B_{q-1}))\}.$$

TEOREMA 3.3. (1) $(F-P) \cup \mathrm{Fix}(B_q)$ ammette il gruppo B_q come gruppo di elazioni tale che per ogni L in $F-P$, $LB_q \cup \mathrm{Fix}(B_q)$ è un regolo di $PG(3,q)$.

(2) $(F-P) \cup \{\mathrm{Fix}(B_{q-1})\mathrm{co}(\mathrm{Fix}(B_{q-1}))\}$ ammette il gruppo B_{q-1} come gruppo di omologie tale che per ogni L in $F-P$, $LB_{q-1} \cup \{\mathrm{Fix}(B_{q-1})\mathrm{co}(\mathrm{Fix}(B_{q-1}))\}$ é un regolo di $PG(3,q)$.

Dim:

Sia $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice del cambiamento di base.

Allora $\mathrm{Fix}B_q(\mathrm{Fix}B_{q-1}, \mathrm{co}(\mathrm{Fix}B_{q-1}))$ sará la componente $x = 0 (x = O, y = O)$ e

$$B_q = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : u \in K\} \text{ e } B_{q-1} = \{ \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : u \in K - \{0\}\}.$$

Nella fibrazione $(F-P) \cup \mathrm{Fix}(B_q)$, il gruppo $B_q \subset GL(4,q)$ fissa ogni retta del tipo $x = (c_1, c_2)$ con $c_1, c_2 \in K$. Allora, B_q diventa un gruppo di elazioni che agisce come in (3.3)(1). Analogamente, B_{q-1} diventa un gruppo di omologie che agisce come in (3.3)(2).

COROLLARIO 3.4. *(1) Una fibrazione parziale del grado $(q+1)+qt$ in V_4 sul campo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer in $\Gamma L(4,q)$ di ordine q corrisponde ad un flock parziale conico in $PG(3,q)$ con t coniche.*

(2) Un flock parziale conico in $PG(3,q)$ con t coniche, $t \neq q$, produce una fibrazione parziale F di grado $qt+1$ che ammette un gruppo B_q di omologie. La fibrazione $\{F - Fix(B_q)\}$ può essere estesa ad una fibrazione di grado $(q+1)+qt$ che ammette B_q come gruppo di Baer.

(3) Una fibrazione parziale del grado $(q+1)+(q-1)t$ in V_4 sul campo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer in $\Gamma L(4,q)$ di ordine $q-1$ corrisponde ad un flock iperbolico con t coniche.

(4) Un flock iperbolico con $t \neq q+1$ coniche dá luogo a una fibrazione parziale F del grado $(q-1)t+2$ che ammette un gruppo B_{q-1} di omologie.

La fibrazione $F - \{Fix(B_{q-1}), co(Fix(B_{q-1}))\}$ può essere estesa ad una fibrazione di grado $q+1+(q-1)t$ che ammette B_{q-1} come gruppo di Baer.

Nota: se $t < q-1$, ci sono numerosi esempi di fibrazioni parziali che possono essere costruite come in (3.4)(2) e (4).
Per ogni flock parziale conico con $t = q-1$ coniche esiste un piano di traslazione che ammette un gruppo di Baer di ordine q. Per ogni flock parziale iperbolico con $t = q$ coniche esiste un piano di traslazione che ammette un gruppo di Baer di ordine $q-1$.

COROLLARIO 3.5. *Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer B come gruppo di collineazioni.*

(1) Se $|B| = q$, allora a π corrisponde un flock parziale conico privo di una conica. Questo flock può essere esteso ad un flock conico se e solo se la rete di grado $q+1$ contenente il sottopiano $Fix(B)$ é una rete derivabile.

(2) Se $|B| = q-1$, a π corrisponde un flock parziale iperbolico privo di una conica. Questo flock può essere esteso ad un flock iperbolico se e solo se, la rete di grado $q+1$ contenente il sottopiano $Fix(B)$ é una rete corrispondente ad un regolo in $PG(3,K)$.

Nella Capitolo 4 ci occuperemo ancora di piani che ammettono gruppi di Baer (si veda anche [**60**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che ammette come gruppo di collineazioni un gruppo di Baer di ordine q ed un gruppo non-banale di elazioni aventi come asse una componente di π. Un piano di questo tipo é detto un piano di Baer-elazioni di tipo $(q,2)$. Per il corollario (3.5), ad esso corrisponde un flock parziale privo di una conica.
Per i flock conici si ha il seguente teorema:

Teorema 3.6. (Thas [**133**]).

Sia $F = \{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ un flock conico in $PG(3, q)$. Sia π_i il piano in $PG(3, q)$ contenente la conica C_i per $i = 1, 2, .., q$.

(1) Se q è pari e tutti i piani π_i hanno un punto in comune allora F è un flock lineare (i piani hanno una retta in comune).

(2) Se q è dispari e tutti i piani π_i hanno un punto interno al cono in comune allora F è un flock lineare.

(3) Se q dispari e tutti i piani π_i hanno un punto esterno al cono in comune, allora le coordinate possono essere scelte in modo tale che il cono C ha equazione $x_0x_1 = x_2^2$, e i piani π_i hanno equazione: $tx_0 - \gamma t^\sigma x_1 + x_3 = 0$ dove γ non è un quadrato, $t \in GF(q)$, e $\sigma \in AutGF(q)$. Inoltre, il punto comune è $(0, 0, 1, 0)$.

Se un piano di Baer-elazioni é derivabile, allora al piano derivato corrisponde il flock descritto in (3.6)(3).
Per esempio, la fibrazione per un piano di Baer-elazioni può essere rappresentata nella forma

$$x = O, y = x \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix}, y = x \begin{bmatrix} ba^{-1} & b^2a^{-1} + b + g(a^{-1}) \\ a^{-1} & ba^{-1} + 1 \end{bmatrix}$$

con $u, b, a \neq 0$ in $K \cong GF(q)$ e $m, g : K \to K$. Se il piano è derivabile, allora $m = 0$.

Se si cambia la base tramite la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, allora il piano derivato sará

$$x = O, y = x \begin{bmatrix} u - a & g(a^{-1}) \equiv f(a) \\ a & u \end{bmatrix}$$

con $a, u \in K$.

Usando (2.4), il cono contiene i piani π_s di equazioni: $sx_o + f(s)x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Quindi, l'intersezione dei π_s contiene il punto $(0, 0, 1, 1)$. Per (3.6), la fibrazione può essere rappresentata nella forma: $x = O$, $y = x \begin{bmatrix} u & \gamma s^\sigma \\ s & u \end{bmatrix}$ con $s, u \in K$, $\sigma \in AutK$. Quindi, il piano di traslazione deve essere un piano su un semicorpo.

Teorema 3.7. (Johnson [**62**]).

Sia q pari. Se un piano di traslazione π corrisponde ad un flock conico ed è un piano su un semicorpo, allora π é Desarguesiano.

Quindi, otteniamo:

Teorema 3.8. (Johnson [**61**]).

Un piano derivabile di Baer-elazioni di tipo $(q, 2)$ è il piano di Hall.

Nel Capitolo 6 ritorneremo su tali questioni.