

CAPITOLO 2

Fibrazioni parziali e flock parziali

In questa Capitolo daremo un metodo generale per costruire flock parziali di una quadrica a partire da fibrazioni parziali. Questo metodo é dovuto a Thas-Walker (si veda [133]).

DEFINIZIONE 2.1. (I) *Un flock parziale (iperbolico) P_H^t di una quadrica iperbolica di $PG(3, q)$ è un insieme di t coniche disgiunte di H , con $1 \leq t \leq q + 1$. Per $t = q + 1$ parleremo di flock iperbolico.*

(II) *Un flock parziale (ellittico) P_E^t di una quadrica ellittica di $PG(3, q)$ è un insieme di t coniche disgiunte di E , con $1 \leq t \leq q - 1$. Per $t = q - 1$ parleremo di flock ellittico.*

(III) *Un flock parziale (conico) P_C^t di un cono quadratico di $PG(3, q)$ è un insieme di t coniche disgiunte di H , con $1 \leq t \leq q$. Per $t = q$ parleremo di flock conico.*

Ricordiamo ora alcune proprietà notevoli della quadrica di Klein che useremo in seguito:

PROPOSIZIONE 2.2. *Indichiamo con V_4 e V_6 due spazi vettoriali, rispettivamente di dimensione 4 e 6, sul campo di Galois $K \cong GF(q)$. Consideriamo la quadrica di Klein $Q_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4$ di V_6*

(i) *Esiste una corrispondenza biunivoca tra i sottospazi di dimensione due di V_4 e i punti (sottospazi di dimensione uno) di Q_6 tale che a due sottospazi disgiunti di dimensione due corrispondano due punti di V_6 non perpendicolari.*

(ii) *Sia $V_4 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) | x_i, y_i \in K, i = 1, 2\}$. Poniamo $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ e $O = (0, 0)$ e denotiamo con $x = O$ il sottospazio $\{(0, 0, y_1, y_2) | y_i \in$*

$K\}$, e con $y = xM$ il sottospazio $\{(x_1, x_2, ((x_1, x_2)M)|x_i \in K, i = 1, 2\}$, dove M è una matrice quadrata ad elementi in K .

Se $M = \begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix}$ allora $y = xM$ è un sottospazio di dimensione due di V_4 corrispondente al punto $\langle (1, a, b, c, d, \delta) \rangle$ di V_6 con $\delta = ad - bc \neq 0$.

(iii) Un piano di traslazione π di ordine q^2 il cui nucleo contiene $K \cong GF(q)$ si può ottenere dallo spazio V_4 considerando $q^2 + 1$ suoi sottospazi disgiunti di dimensione due. Se prendiamo $x = O$ e $y = O$ come due di questi sottospazi, allora gli altri saranno del tipo $y = xM$. Se $y = xM$ e $y = xN$ sono due sottospazi, la matrice $M - N$ è non-singolare oppure zero.

Allora, una fibrazione, o equivalentemente un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo isomorfo a $GF(q^2)$ oppure a $GF(q)$, corrisponde a un insieme P di $q^2 + 1$ punti in V_6 tali che punti distinti non sono perpendicolari. L'insieme P è detto ovoide.

(iv) Un regolo R di V_4 è l'insieme dei $q+1$ sottospazi disgiunti di dimensione 2 di V_4 tali che se un sottospazio di dimensione 2 interseca tre elementi distinti di R allora interseca ogni elemento di R . Un tale sottospazio è detto trasversale di R . Chiaramente i trasversali ricoprono R . L'insieme dei trasversali di R formano un regolo R^* detto regolo opposto di R . Le trasversali di R^* sono le rette di R .

Un regolo R di V_4 corrisponde all'insieme dei punti isotropici di un piano π_R non-isotropico di V_6 (cioè una conica di π_R). Il regolo opposto R^* corrisponde all'insieme dei punti isotropici del piano polare π_R^* di π_R .

Sia P^t un flock parziale iperbolico, ellittico o conico di $PG(3, q)$. Sia Σ^t l'insieme dei piani contenenti le t coniche di P^t . Immergiamo lo spazio proiettivo di dimensione 3 nello spazio proiettivo di dimensione 5 in modo tale che la quadrica sia contenuta nella quadrica di Klein.

Sia $(\Sigma^t)^*$ l'insieme dei piani polari dei piani di Σ^t rispetto alla quadrica di Klein. Due coniche di $(\Sigma^t)^*$ hanno in comune rispettivamente 2, 1 oppure 0 punti a secondo che P^t sia iperbolico, ellittico o conico. Pertanto in V_6 , ci sono $(q-1)t+2$, $(q+1)t$, oppure $(qt+1)$ punti che non sono perpendicolari. Applicando la corrispondenza di Klein si ha una fibrazione parziale che si chiama rispettivamente iperbolica, ellittica o conica. Esiste una corrispondenza tra flocks e fibrazioni che ammettono opportuni gruppi di collineazioni:

TEOREMA 2.3. (Gevaert, Johnson [33], Johnson [65], [67]).

Sia S una fibrazione parziale in V_4 .

(1) Se S ammette un gruppo H di omologie di asse L e coasse M avente ordine $q - 1$ ed esiste un sottospazio N di S tale che $H N \cup \{L, M\}$ è un regolo, allora la costruzione inversa di Thas-Walker genera un flock parziale iperbolico.

(2) Supponiamo che S ammette un gruppo lineare di ordine $q^2 - 1$ tale che le sue orbite unione il vettore nullo siano $GF(q)$ -sottospazi. Se almeno un'orbita W non è una componente ed interseca non banalmente una componente, allora W è contenuta nell'unione delle componenti di S e definisce una rete $N(W)$. La costruzione inversa di Thas-Walker genera un flock parziale ellittico attraverso la derivazione multipla delle reti $N(W)$.

(3) Se S ammette un gruppo di elazioni E di asse L avente ordine q ed esiste un sottospazio M di S tale che $E M \cup \{L\}$ è un regolo, allora la costruzione inversa di Thas-Walker dá un flock parziale conico.

Dimostrazione: Le proposizioni (1) e (3) sono trattate in [33], [65] e [67]. Diamo un cenno della dimostrazione della proposizione (2). I punti di S sono ripartiti in orbite che formano una fibrazione di $PG(3, q)$ che deve essere Desarguesiana per l'azione del gruppo. Pertanto il gruppo è ciclico. Ogni orbita W che interseca una componente di S non banalmente deve essere contenuta nell'unione delle componenti. Inoltre, poiché le orbite sono $GF(q)$ -sottospazi e W è un'orbita per un gruppo di collineazioni di S , allora esiste un insieme $N(W)$ di $q + 1$ componenti che intersecano W non banalmente. Questo forza W ad essere un sottopiano di Baer di $N(W)$. Poiché G è un gruppo di collineazioni di S , allora $N(W)$ è ricoperto da orbite che danno sottopiani di Baer, tale che $N(W)$ definisce una rete derivabile che è chiaramente una rete regolare. Si noti che tali reti regolari sono disgiunte. La costruzione inversa di Thas-Walker deriva l'insieme di queste reti regolari in S . Poiché la fibrazione parziale S^* costruita consiste ora di un insieme di componenti che sono invarianti per G , allora S^* è una fibrazione parziale di una fibrazione Desarguesiana e l'insieme delle t reti regolari in S produce un flock di t coniche su una quadrica ellittica.

Nota: sia S una fibrazione parziale in V_4 sul campo $K \cong GF(q)$, $q = p^r$, p primo. S è equivalente a una rete di traslazione. Quando parleremo di gruppi di collineazioni di una fibrazione parziale, faremo operare il gruppo sulla rete di traslazione corrispondente.

Un gruppo centrale di collineazioni della fibrazione parziale è un gruppo lineare in $GL(2r, p)$ che fissa ogni punto di un componente e ogni retta di un qualche punto all'infinito.

Un gruppo che opera su una rete fissando ogni punto di una componente non è necessariamente un gruppo centrale.

Notiamo che ogni conica di un flock parziale iperbolico o ellittico corrisponde al regolo opposto del regolo dato in (1) e (3) di (2.3).

ESEMPIO 2.4. Consideriamo una fibrazione conica F con t reti derivabili corrispondenti a regoli. F può essere rappresentata nel seguente modo: $x =$

$O, y = x \begin{bmatrix} u + g(s) & f(s) \\ s & u \end{bmatrix}$ dove $u \in K \cong GF(q), s \in \lambda$ con $|\lambda| = t$ e $f, g : \lambda \rightarrow K$.

Il Regolo è l'insieme delle componenti per un fissato s .

Con argomentazioni analoghe a quelle usate da Gevaert e Johnson in [32] è possibile dimostrare che il flock parziale conico corrispondente è il seguente: I punti di $PG(3, q)$, rappresentati in coordinate omogenee, sono (x_0, x_1, x_2, x_3) , il cono ha equazione $x_0x_1 = x_2^2$, e i piani in $PG(3, q)$ che contengono le coniche sono del tipo $sx_0 - f(s)x_1 + g(s)x_2 + x_3$ con $s \in \lambda$.