Università degli Studi di Lecce
Dipartimento di Matematica
"Ennio De Giorgi"

Norman L. Johnson
Mathematics Department
University of Iowa
Iowa City, Iowa 52242
Email Address: *njohnson@math.uiowa.edu*

Piani di Traslazione e Loro Connessioni con Flock, Quadrangoli Generalizzati, e Reti

Quaderno 3/2005
Università di Lecce - Coordinamento SIBA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"ENNIO DE GIORGI"

Norman L. Johnson

MATHEMATICS DEPARTMENT
UNIVERSITY OF IOWA
IOWA CITY, IOWA 52242
Email Address: *njohnson@math.uiowa.edu*

Piani di Traslazione e Loro Connessioni con Flock, Quadrangoli Generalizzati, e Reti

Quaderno 3/2005: ISBN 88-8305-029-0

Università di Lecce - Coordinamento SIBA

QUADERNI DI MATEMATICA

Una pubblicazione a cura del

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"ENNIO DE GIORGI"
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE

I QUADERNI del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Lecce documentano gli aspetti di rilievo dell'attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

(1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
(2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
(3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all'approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

Quaderno 3/2005: ISBN 88-8305-029-0
Università di Lecce - Coordinamento SIBA

Piani di Traslazione e Loro Connessioni con Flock, Quadrangoli Generalizzati, e Reti

Norman L. Johnson

MATHEMATICS DEPARTMENT
UNIVERSITY OF IOWA
IOWA CITY, IOWA 52242

EMAIL ADDRESS: *njohnson@math.uiowa.edu*

Prefazione

Questi appunti raccolgono i temi da me sviluppati in varie conferenze tenute presso l'Università di Lecce negli anni l990, l992, 1994 e 1995. Su tali argomenti ho tenuto delle conferenze anche a Bari (1990, 1994), a Gaeta (1990), a Napoli (1990, 1992, 1994) ed a Potenza (1994).

Vorrei ringraziare il Prof. Barlotti, per aver avuto la possibilità di venire in Italia per lunghi periodi, e il Prof. Bischara, il Prof. Ceccherini, il Prof. Tallini in qualitá di componenti del Comitato Scientifico del Combinatorics 1990. Vorrei ringraziare la Prof. Luca Maria Abatangelo, la Prof. Bambina Larato e il Prof. Vito Abatangelo dell'Università di Bari. Ringrazio anche il Prof. Guglielmo Lunardon per avermi invitato presso l'Università di Napoli facendomi ottenere uno stipendio del C.N.R. tra maggio e giugno del 1994. Alcuni risultati trovati in collaborazione con il Prof. Lunardon verranno citati in queste note. Vorrei ringraziare il Prof. Gabor Korchmàros e il Prof. Arrigo Bonisoli. Sono particolarmente grato al Prof. Mauro Biliotti dell'Università di Lecce per aver organizzato molti dei mie viaggi in Italia. Con il Prof. Biliotti ho collaborato su molte tematiche riportate in queste note. Ringrazio il C.N.R. per i vari supporti finanzari che mi ha concesso. Per lo stesso motivo ringrazio anche l'Università di Iowa. Per ovvii motivi penso di dover dire grazie a tutti coloro che hanno ascoltato le mie conferenze e a tutti quelli che mi hanno aiutato con questa bella lingua. Ringrazio anche la Dr. Maria Rosaria Enea dell'Università della Basilicata per avere curato la stesura finale di queste note. Infine sono grato a mia moglie Bonnie Hemenover per la sua pazienza e per il suo aiuto senza il quale questi appunti non sarebbero mai stati scritti.

Chiedo scusa al lettore per le eventuali ripetizioni che troverà nei vari Capitoli di queste note, ripetizioni dovute, come ben si capisce, alla natura stesse delle note.

Norman L. Johnson

Iowa, 25 febbraio 2006

Indice

Prefazione v

Capitolo 1. Introduzione 1

Capitolo 2. Fibrazioni parziali e flock parziali 3

Capitolo 3. Gruppi di Baer e flock parziali 7

Capitolo 4. Flock parziali iperbolici 13

Capitolo 5. Flock parziali ellittici e piani di traslazione derivati da piani di Desarguesiani 17

Capitolo 6. Flock parziali di coni, quadrangoli generalizzati e piani di Baer-elazioni 21

Capitolo 7. Scheletri di flock parziali di coni 27

Capitolo 8. Derivazione 33

Capitolo 9. Derivazione dei piani duali di piani di traslazione 37

Capitolo 10. Reti di ordine q^2 e di grado $q+1$ che ammettono $PSL(4,q)_N$; una caratterizzazione delle reti derivabili 41

Capitolo 11. Piani proiettivi della classe II-1 di Lenz-Barlotti 47

Capitolo 12. Nidi di regoli 53

Capitolo 13. Ovoidi e piani di traslazione 59

Capitolo 14. j-piani e fibrazioni parziali che sono massimali in $PG(3,q)$ 65

Capitolo 15. Gruppi massimali di Baer 71

Capitolo 16. Insiemi parziali stretti in $P\Gamma L(n,q)$ 77

Capitolo 17. Piani di traslazione di ordine k che ammettono due gruppi di omologie di ordine $(k-1)/2$ 81

Capitolo 18.	Rigidità nei flock di un cono	85
Capitolo 19.	Reti e loro prodotti diretti	91
Capitolo 20.	Flock ovali e gruppi 2-transitivi	97
Capitolo 21.	Quasicorpi di Bol e flock iperbolici infiniti	103
Capitolo 22.	Quasifibrazione e flock parziali di un cono infinito	109
Capitolo 23.	Nidi misti	117
Capitolo 24.	Piani affini che sono ricoperti da sottopiani	123
Capitolo 25.	Flock parziali e loro estensioni	129
Bibliografia		133

CAPITOLO 1

Introduzione

In questo Quaderno, studieremo piani di traslazione e strutture geometriche ad essi connesse. Molti sono i risultati che legano i piani di traslazione di ordine q^2 con i flock delle forme quadratiche. Questi includono i flock delle forme iperboliche, ellittiche e dei coni quadratici di $PG(3, q)$. Vari risultati sono stati ottenuti anche per flock infiniti e flock ovali, cioè flock di un cono costruito a partire da un'ovale che non è necessariamente una conica. I piani di traslazione sono equivalenti a fibrazioni. I risultati sui flock possono essere estesi a risultati su flock parziali che sono a loro volta legati a risultati sulle fibrazioni parziali. Inoltre, ci sono alcuni quadrangoli generalizzati di tipo (q^2, q) che possono essere costruiti con i flock dei coni.

Nei Capitoli 2, 3, 4, 5, 6 e 7 parleremo di flock parziali di forme iperboliche, ellittiche e dei coni connettendoli alle fibrazioni parziali. Nei Capitoli 8, 9 e 10 studieremo reti derivabili e considereremo gruppi di collineazioni dei piani che possono essere costruiti con derivazione da duali di piani di traslazione. Nel Capitolo 11, considereremo i piani proiettivi della classificazione di Lenz-Barlotti di classe II-1, cioè i piani che hanno esattamente una (P, L)-transitività dove il punto P è incidente con la retta L. Questi piani possono essere costruiti usando la derivazione. Anche tra questi piani e i flock dei coni ci sono varie connessioni. Nel Capitolo 12, studieremo i nidi di regoli che sono le generalizzazioni delle catene di Bruen [**21**]. Diverse sono le connessioni tra nidi, fibrazioni e flock di coni. Nel Capitolo 13, verranno considerati alcuni dei metodi di Kantor [**105**] che permettono di costruire piani di traslazione di ordine q^2 da ovoidi in $PG(8, q)$. Alcuni tra questi piani danno fibrazioni parziali che sono massimali in $PG(3, q)$. Ad un gruppo di Baer di ordine $q-1$ di un piano di traslazione con fibrazione in $PG(3, q)$, rimane associato un flock parziale privo di una conica. Nel Capitolo 15, considereremo i gruppi massimali di Baer. Inoltre, agli insiemi in $PGL(2, q)$ che operano transitivamente possono corrispondere flock iperbolici. Nel Capitolo 16, studieremo gli insiemi parziali stretti in $P\Gamma L(n, q)$ dove ci sono alcune fibrazioni parziali che ammettono grandi gruppi di omologie. Nel Capitolo 17, considereremo piani di traslazione che ammettono due grandi gruppi di omologie. Nel Capitolo 18, discuteremo un tipo di gruppo di automorfismi di un flock conico detto gruppo rigido. Questi gruppi costituiscono un valido strumento per studiare i flock di un cono. Nel Capitolo 19, studieremo le reti e loro prodotti diretti, useremo questa teoria per costruire fibrazioni massimali. È possibile costruire i flock di un cono usando un'ovale invece di una conica. Tratteremo i flock ovali nel Capitolo 20. In particolare, daremo una classificazione dei flock ovali che ammettono un gruppo di automorfismi che opera 2-transitivamente. Nei Capitoli 21 e 22 tratteremo i flock iperbolici infiniti e di coni quadratici. Nel Capitolo 23 ci occuperemo di un tipo di nido di regoli formato da regoli normali e regoli di Andrè. Questo nido é detto nido misto. Piani affini che possono essere ricoperti da sottopiani in un modo particolare sono trattati nel Capitolo 24. Infine, nel Capitolo 25, considereremo i casi in cui un flock conico parziale contenente un grande sottoflock lineare può essere esteso ad un flock.

CAPITOLO 2

Fibrazioni parziali e flock parziali

In questa Capitolo daremo un metodo generale per costruire flock parziali di una quadrica a partire da fibrazioni parziali. Questo metodo é dovuto a Thas-Walker (si veda [**133**]).

DEFINIZIONE 2.1. (I) *Un flock parziale (iperbolico) P_H^t di una quadrica iperbolica di $PG(3,q)$ è un insieme di t coniche disgiunte di H, con $1 \leq t \leq q+1$. Per $t = q+1$ parleremo di flock iperbolico.*

(II) *Un flock parziale (ellittico) P_E^t di una quadrica ellittica di $PG(3,q)$ è un insieme di t coniche disgiunte di E, con $1 \leq t \leq q-1$. Per $t = q-1$ parleremo di flock ellittico.*

(III) *Un flock parziale (conico) P_C^t di un cono quadratico di $PG(3,q)$ è un insieme di t coniche disgiunte di H, con $1 \leq t \leq q$. Per $t = q$ parleremo di flock conico.*

Ricordiamo ora alcune proprietá notevoli della quadrica di Klein che useremo in seguito:

PROPOSIZIONE 2.2. *Indichiamo con V_4 e V_6 due spazi vettoriali, rispettivamente di dimensione 4 e 6, sul campo di Galois $K \cong GF(q)$. Consideriamo la quadrica di Klein $Q_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4$ di V_6*

(i) Esiste una corrispondenza biunivoca tra i sottospazi di dimensione due di V_4 e i punti (sottospazi di dimensione uno) di Q_6 tale che a due sottospazi disguinti di dimensione due corrispondano due punti di V_6 non perpendicolari.

(ii) Sia $V_4 = \{(x_1,x_2,y_1,y_2) | x_i, y_i \in K_i, i = 1,2\}$. Poniamo $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$ e $O = (0,0)$ e denotiamo con $x = O$ il sottospazio $\{(0,0,y_1,y_2) | y_i \in$

$K\}$, e con $y = xM$ il sottospazio $\{(x_1, x_2, ((x_1, x_2)M)|x_i \in K, i = 1, 2\}$, dove M é una matrice quadrata ad elementi in K.

Se $M = \begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix}$ allora $y = xM$ è un sottospazio di dimensione due di V_4 corrispondente al punto $< (1, a, b, c, d, \delta) >$ di V_6 con $\delta = ad - bc \neq 0$.

(iii) Un piano di traslazione π di ordine q^2 il cui nucleo contiene $K \cong GF(q)$ si puó ottenere dallo spazio V_4 considerando $q^2 + 1$ suoi sottospazi disguinti di dimensione due. Se prendiamo $x = O$ e $y = O$ come due di questi sottospazi, allora gli altri saranno del tipo $y = xM$. Se $y = xM$ e $y = xN$ sono due sottospazi, la matrice $M - N$ è non-singolare oppure zero.

Allora, una fibrazione, o equivalentemente un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo isomorfo a $GF(q^2)$ oppure a $GF(q)$, corrisponde a un insieme P di $q^2 + 1$ punti in V_6 tali che punti distinti non sono perpendicolari. L'insieme P é detto ovoide.

(iv) Un regolo R di V_4 è l'insieme dei $q+1$ sottospazi disgiunti di dimensione 2 di V_4 tali che se un sottospazio di dimensione 2 interseca tre elementi distinti di R allora interseca ogni elemento di R. Un tale sottospazio é detto trasversale di R. Chiaramente i trasversali ricoprono R. L'insieme dei trasversali di R formano un regolo R^* detto regolo opposto di R. Le trasversali di R^* sono le rette di R.

Un regolo R di V_4 corrisponde all'insieme dei punti isotropici di un piano π_R non-isotropico di V_6 (cioè una conica di π_R). Il regolo opposto R^* corrisponde all'insieme dei punti isotropici del piano polare π_R^* di π_R.

Sia P^t un flock parziale iperbolico, ellittico o conico di $PG(3, q)$. Sia Σ^t l'insieme dei piani contenenti le t coniche di P^t. Immergiamo lo spazio proiettivo di dimensione 3 nello spazio proiettivo di dimension 5 in modo tale che la quadrica sia contenuta nella quadrica di Klein.
Sia $(\Sigma^t)^*$ l'insieme dei piani polari dei piani di Σ^t rispetto alla quadrica di Klein. Due coniche di $(\Sigma^t)^*$ hanno in comune rispettivamente 2, 1 oppure 0 punti a secondo che P^t sia iperbolico, ellittico o conico. Pertanto in V_6, ci sono $(q - 1)t + 2$, $(q + 1)t$, oppure $(qt + 1)$ punti che non sono perpendicolari. Applicando la corrispondenza di Klein si ha una fibrazione parziale che si chiama rispettivamente iperbolica, ellittica o conica. Esiste una corrispondenza tra flocks e fibrazioni che ammettono opportuni gruppi di collineazioni:

Teorema 2.3. (Gevaert, Johnson [**33**], Johnson [**65**], [**67**]).

Sia S una fibrazione parziale in V_4.

(1) Se S ammette un gruppo H di omologie di asse L e coasse M avente ordine $q-1$ ed esiste un sottospazio N di S tale che $H\ N \cup \{L, M\}$ è un regolo, allora la costruzione inversa di Thas-Walker genera un flock parziale iperbolico.

(2) Supponiamo che S ammette un gruppo lineare di ordine q^2-1 tale che le sue orbite unione il vettore nullo siano $GF(q)$-sottospazi. Se almeno un'orbita W non é una componente ed interseca non banalmente una componente, allora W é contenuta nell'unione delle componenti di S e definisce una rete $N(W)$. La costruzione inversa di Thas-Walker genera un flock parziale ellittico attraverso la derivazione multipla delle reti $N(W)$.

(3) Se S ammette un gruppo di elazioni E di asse L avente ordine q ed esiste un sottospazio M di S tale che $E\ M \cup \{L\}$ é un regolo, allora la costruzione inversa di Thas-Walker dá un flock parziale conico.

Dimostrazione: Le proposizioni (1) e (3) sono trattate in [**33**], [**65**] e [**67**]. Diamo un cenno della dimostrazione della proposizione (2). I punti di S sono ripartiti in orbite che formano una fibrazione di $PG(3, q)$ che deve essere Desarguesiana per l'azione del gruppo. Pertanto il gruppo é ciclico. Ogni orbita W che interseca una componente di S non banalmente deve essere contenuta nell'unione delle componenti. Inoltre, poiché le orbite sono $GF(q)$-sottospazi e W é un'orbita per un gruppo di collinazioni di S, allora esiste un insieme $N(W)$ di $q+1$ componenti che intersecano W non banalmente. Questo forza W ad essere un sottopiano di Baer di $N(W)$. Poiché G é un gruppo di collineazioni di S, allora $N(W)$ é ricoperto da orbite che danno sottopiani di Baer, tale che $N(W)$ definisce una rete derivabile che é chiaramente una rete regolare. Si noti che tali reti regolari sono disgiunte. La costruzione inversa di Thas-Walker deriva l'insieme di queste reti regolari in S. Poiché la fibrazione parziale S^* costruita consiste ora di un insieme di componenti che sono invarianti per G, allora S^* é una fibrazione parziale di una fibrazione Desarguesiana e l'insieme delle t reti regolari in S produce un flock di t coniche su una quadrica ellittica.

Nota: sia S una fibrazione parziale in V_4 sul campo $K \cong GF(q)$, $q = p^r$, p primo. S è equivalente a una rete di traslazione. Quando parleremo di gruppi di collineazioni di una fibrazione parziale, faremo operare il gruppo sulla rete di traslazione corrispondente.

Un gruppo centrale di collineazioni della fibrazione parziale è un gruppo lineare in $GL(2r, p)$ che fissa ogni punto di un componente e ogni retta di un qualche punto all'infinito.
Un gruppo che opera su una rete fissando ogni punto di una componente non é necessariamente un gruppo centrale.
Notiamo che ogni conica di un flock parziale iperbolico o ellittico corrisponde al regolo opposto del regolo dato in (1) e (3) di (2.3).

Esempio 2.4. *Consideriamo una fibrazione conica F con t reti derivabili corrispondenti a regoli. F può essere rappresentata nel seguente modo:* $x = O$, $y = x\begin{bmatrix} u+g(s) & f(s) \\ s & u \end{bmatrix}$ *dove* $u \in K \cong GF(q), s \in \lambda$ *con* $|\lambda| = t$ *e* $f, g : \lambda \to K$.

Il Regolo é l'insieme delle componenti per un fissato s.

Con argomentazioni analoghe a quelle usate da Gevaert e Johnson in [**32**] *è possible dimostrare che il flock parziale conico corrispondente é il seguente: I punti di $PG(3, q)$, rappresentati in coordinate omogenee, sono (x_0, x_1, x_2, x_3), il cono ha equazione $x_0x_1 = x_2^2$, e i piani in $PG(3, q)$ che contengono le coniche sono del tipo $sx_o - f(s)x_1 + g(s)x_2 + x_3$ con $s \in \lambda$.*

CAPITOLO 3

Gruppi di Baer e flock parziali

Sia S una fibrazione parziale nello spazio vettoriale V_4 di dimensione 4 sul campo $K \cong GF(q)$ che consiste di t regoli aventi in comune due componenti $L \equiv (x = O)$ e $M \equiv (y = O)$. Gevaert e Johnson [**32**] hanno provato che esiste un gruppo di omologie H con asse L e coasse M che fissa ogni regolo di S. Allora, per la (1) in (2.2), esiste un flock parziale iperbolico.
In questo Capitolo indicheremo con B un sottogruppo di $GL(4,q)$, $q = p^r$ che fissa ogni punto di un sottopiano di Baer. Sia $\mathrm{Fix}(B) = \pi_o$. Foulser in [**34**] determina il gruppo che fissa ogni punto di π_o.
Sia $V_4 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) : x_i, y_i \in K, i = 1, 2\}$. Rappresenteremo S in modo tale che le sue componenti siano $x = O$, $y = O$, $y = xA$ con $A \in \Lambda$ (insieme delle matrici due per due ad elementi in K).

Teorema 3.1. (Foulser [**38**], Johnson [**67**]).

Sia P una fibrazione parziale in V_4 con $q + 1$ componenti (sottospazi di dimensione due). Sia N_P la corrispondente rete.

(1) Sia B un sottogruppo di Baer di $\Gamma L(4,q)$ che fissa N_P. Se $|B| = q$ o $|B| = q-1$ con $q-1 > 2$, allora il sottopiano $\mathrm{Fix}B = \pi_o$ è un K-sottospazio di dimensione due, cio´ π_o è un piano di Desargues.

(2) Prendiamo una base $\{e_2, e_4\}$ per π_o il cui completamento $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è una base per V_4 e tale che $< e_1, e_2 >, < e_3, e_4 >$ e $< e_1 + e_3, e_2 + e_4 >$ siano componenti della fibrazione P.

Rispetto a tale base:

$V_4 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) : x_i, y_i \in \ K, i = 1, 2\}$, $\pi_o = \{(0, x_2, 0, y_2) : x_2, y_2 \in K\}$,

$(x = O) =< e_3, e_4 >, (y = O) =< e_1, e_2 >, (y = x) =< e_1 + e_3, e_2 + e_4 >$.

(3) Se $|B| = q$ allora $B = B_q$ può essere rappresentato nella seguente forma:

$$B_q = \{ \begin{bmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : u \in K\}.$$

Se $|B| = q-1$, allora $B = B_{q-1}$ può essere rappresentato della seguente forma:

$$B_{q-1} = \{ \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : u \in K - \{0\}\}.$$

Teorema 3.2. (Johnson [**67**]).

Usiamo la stessa notazione di (3.1).

(1) Sia L un K-sottospazio di dimensione due disgiunto da $\mathrm{Fix}(B_q)$.

Allora, $\mathrm{Fix}(B_q) \cup LB_q$ è un regolo in $PG(3,q)$.

(2) Sia $\mathrm{co}(\mathrm{Fix}(B_{q-1})) = \{(x_1, 0, y_1, 0) : x_1, y_1 \in K\}$. Sia L un K-sottospazio di dimensione due disgiunto da $\{\mathrm{Fix}(B_{q-1})\mathrm{co}(\mathrm{Fix}(B_{q-1}))\}$.

Allora, $\{\mathrm{Fix}(B_{q-1})\mathrm{co}(\mathrm{Fix}(B_{q-1}))\} \cup LB_{q-1}$ è un regolo in $PG(3,q)$.

(3) Sia W un K-sottospazio di dimensione uno disgiunto da $\mathrm{Fix}(B_q)$. Allora, $< WB_q >$ è un K-sottospazo di dimensione due tale che $< WB_q > \cap \mathrm{Fix}(B_q)$ è un K-sottospazio di dimensione uno.

(4) Sia S un K-sottospazio di dimensione uno disgiunto da

$$\{\mathbf{Fix}(B_{q-1})\mathbf{co}(\mathbf{Fix}(B_{q-1}))\}.$$

Allora, $< SB_{q-1} >$ è un K-sottospazio di dimensione due tale che $< SB_{q-1} > \cap \mathrm{Fix}(B_{q-1)}$ e $< SB_{q-1} > \cap \mathrm{co}(\mathrm{Fix}(B_{q-1})$ sono K-sottospazi di dimensione uno.

Consideriamo ora una fibrazione parziale F contenente la fibrazione P (la notazione é quella di (3.1)) che ammetta il gruppo B_{q-1} o B_q. Per il teorema (3.2) ogni componente L che non è in P, produce un regolo. Allora, F é unione di P e di un insieme di regoli. Consideriamo le altre fibrazioni parziali

$$(F-P)\cup\mathbf{Fix}(B_q),(F-P)\cup\{\mathbf{Fix}(B_{q-1}),\mathbf{co}(\mathbf{Fix}(B_{q-1}))\}.$$

TEOREMA 3.3. (1) $(F-P)\cup\mathrm{Fix}(B_q)$ ammette il gruppo B_q come gruppo di elazioni tale che per ogni L in $F-P$, $LB_q\cup\mathrm{Fix}(B_q)$ è un regolo di $PG(3,q)$.

(2) $(F-P)\cup\{\mathrm{Fix}(B_{q-1})\mathrm{co}(\mathrm{Fix}(B_{q-1}))\}$ ammette il gruppo B_{q-1} come gruppo di omologie tale che per ogni L in $F-P$, $LB_{q-1}\cup\{\mathrm{Fix}(B_{q-1})\mathrm{co}(\mathrm{Fix}(B_{q-1}))\}$ é un regolo di $PG(3,q)$.

Dim:

Sia $T=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ la matrice del cambiamento di base.

Allora $\mathrm{Fix}B_q(\mathrm{Fix}B_{q-1},\mathrm{co}(\mathrm{Fix}B_{q-1}))$ sará la componente $x=0(x=O,y=O)$ e

$$B_q=\{\begin{bmatrix}1&0&u&0\\0&1&0&u\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}:u\in K\}\text{ e }B_{q-1}=\{\begin{bmatrix}u&0&0&0\\0&u&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}:u\in K-\{0\}\}.$$

Nella fibrazione $(F-P)\cup\mathrm{Fix}(B_q)$, il gruppo $B_q\subset GL(4,q)$ fissa ogni retta del tipo $x=(c_1,c_2)$ con $c_1,c_2\in K$. Allora, B_q diventa un gruppo di elazioni che agisce come in (3.3)(1). Analogamente, B_{q-1} diventa un gruppo di omologie che agisce come in (3.3)(2).

COROLLARIO 3.4. *(1) Una fibrazione parziale del grado $(q+1)+qt$ in V_4 sul campo $K\cong GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer in $\Gamma L(4,q)$ di ordine q corrisponde ad un flock parziale conico in $PG(3,q)$ con t coniche.*

(2) Un flock parziale conico in $PG(3,q)$ con t coniche, $t\neq q$, produce una fibrazione parziale F di grado $qt+1$ che ammette un gruppo B_q di omologie. La fibrazione $\{F-Fix(B_q)\}$ può essere estesa ad una fibrazione di grado $(q+1)+qt$ che ammette B_q come gruppo di Baer.

(3) Una fibrazione parziale del grado $(q+1)+(q-1)t$ in V_4 sul campo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer in $\Gamma L(4,q)$ di ordine $q-1$ corrisponde ad un flock iperbolico con t coniche.

(4) Un flock iperbolico con $t \neq q+1$ coniche dá luogo a una fibrazione parziale F del grado $(q-1)t+2$ che ammette un gruppo B_{q-1} di omologie.

La fibrazione $F - \{Fix(B_{q-1}), co(Fix(B_{q-1}))\}$ può essere estesa ad una fibrazione di grado $q+1+(q-1)t$ che ammette B_{q-1} come gruppo di Baer.

Nota: se $t < q-1$, ci sono numerosi esempi di fibrazioni parziali che possono essere costruite come in (3.4)(2) e (4).
Per ogni flock parziale conico con $t = q-1$ coniche esiste un piano di traslazione che ammette un gruppo di Baer di ordine q. Per ogni flock parziale iperbolico con $t = q$ coniche esiste un piano di traslazione che ammette un gruppo di Baer di ordine $q-1$.

Corollario 3.5. *Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer B come gruppo di collineazioni.*

(1) Se $|B| = q$, allora a π corrisponde un flock parziale conico privo di una conica. Questo flock può essere esteso ad un flock conico se e solo se la rete di grado $q+1$ contenente il sottopiano $Fix(B)$ é una rete derivabile.

(2) Se $|B| = q-1$, a π corrisponde un flock parziale iperbolico privo di una conica. Questo flock può essere esteso ad un flock iperbolico se e solo se, la rete di grado $q+1$ contenente il sottopiano $Fix(B)$ é una rete corrispondente ad un regolo in $PG(3,K)$.

Nella Capitolo 4 ci occuperemo ancora di piani che ammettono gruppi di Baer (si veda anche [**60**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che ammette come gruppo di collineazioni un gruppo di Baer di ordine q ed un gruppo non-banale di elazioni aventi come asse una componente di π. Un piano di questo tipo é detto un piano di Baer-elazioni di tipo $(q,2)$. Per il corollario (3.5), ad esso corrisponde un flock parziale privo di una conica.
Per i flock conici si ha il seguente teorema:

Teorema 3.6. (Thas [**133**]).

Sia $F = \{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ un flock conico in $PG(3,q)$. Sia π_i il piano in $PG(3,q)$ contenente la conica C_i per $i = 1, 2, .., q$.

(1) Se q è pari e tutti i piani π_i hanno un punto in comune allora F è un flock lineare (i piani hanno una retta in comune).

(2) Se q è dispari e tutti i piani π_i hanno un punto interno al cono in comune allora F è un flock lineare.

(3) Se q dispari e tutti i piani π_i hanno un punto esterno al cono in comune, allora le coordinate possono essere scelte in modo tale che il cono C ha equazione $x_0x_1 = x_2^2$, e i piani π_i hanno equazione: $tx_0 - \gamma t^\sigma x_1 + x_3 = 0$ dove γ non è un quadrato, $t \in GF(q)$, e $\sigma \in AutGF(q)$. Inoltre, il punto comune è $(0, 0, 1, 0)$.

Se un piano di Baer-elazioni é derivabile, allora al piano derivato corrisponde il flock descritto in (3.6)(3).
Per esempio, la fibrazione per un piano di Baer-elazioni può essere rappresentata nella forma

$$x = O, y = x \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix}, y = x \begin{bmatrix} ba^{-1} & b^2a^{-1} + b + g(a^{-1}) \\ a^{-1} & ba^{-1} + 1 \end{bmatrix}$$

con $u, b, a \neq 0$ in $K \cong GF(q)$ e $m, g : K \to K$. Se il piano è derivabile, allora $m = 0$.

Se si cambia la base tramite la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, allora il piano derivato sará

$$x = O, y = x \begin{bmatrix} u - a & g(a^{-1}) \equiv f(a) \\ a & u \end{bmatrix}$$

con $a, u \in K$.

Usando (2.4), il cono contiene i piani π_s di equazioni: $sx_o+f(s)x_1-x_2+x_3 = 0$. Quindi, l'intersezione dei π_s contiene il punto $(0,0,1,1)$. Per (3.6), la fibrazione può essere rappresentata nella forma: $x = O$, $y = x\begin{bmatrix} u & \gamma s^\sigma \\ s & u \end{bmatrix}$ con $s, u \in K$, $\sigma \in AutK$. Quindi, il piano di traslazione deve essere un piano su un semicorpo.

TEOREMA 3.7. (Johnson [**62**]).

Sia q pari. Se un piano di traslazione π corrisponde ad un flock conico ed è un piano su un semicorpo, allora π é Desarguesiano.

Quindi, otteniamo:

TEOREMA 3.8. (Johnson [**61**]).

Un piano derivabile di Baer-elazioni di tipo $(q, 2)$ è il piano di Hall.

Nel Capitolo 6 ritorneremo su tali questioni.

CAPITOLO 4

Flock parziali iperbolici

Abbiamo visto nel Capitolo 2 che esiste una corrispondenza tra flock iperbolici e fibrazioni iperboliche. In corrispondenza sono anche i flock parziali iperbolici in $PG(3, q)$ con $t = q$ coniche e i piani di translazione di ordine q^2 con nucleo $GF(q)$ che ammettono un gruppo di Baer di ordine $q - 1$ (Si veda Capitolo 3).
In [**136**], Thas ha costruito una classe di flock iperbolici congetturando l'unicitá di tale classe. I piani che corrispondono a tali flock sono piani sui quasicorpi associativi.
Recentemente Bader [**3**], Johnson [**65**] ed altri (Baker e Ebert per 11^2 [**7**]), hanno trovato tre nuove classi degli esempi con piani su nearfields irregolari di ordine $11^2, 23^2$, e 59^2. Questi nuovi flock si chiamano flock iperbolici irregolari o flock di Bader, Baker-Ebert, Johnson (BBEJ).
La classificazione dei flock iperbolici puó ritenersi completa con i lavori di Bader e Lunardon [**5**], Bonisoli [**19**], Kallaher [**40**], [**100**] ,[**101**] e Thas [**133**]–[**138**].

Definizione 4.1. *Un piano di traslazione si chiama un piano di Bol se ci sono due componenti L, M tali che per ogni componente N, esiste un'involuzione centrale σ di asse N tale che $\sigma(L) = M$.*

Per esempio, i piani su nearfields danno esempi di piani di Bol.

R.P. Burn [**22**] ha trovato un esempio di piano di Bol infinito che non è un piano su un nearcorpo. É di Burn la congettura secondo cui tutti i piani finiti di Bol siano piani sui nearfields.

Hanson e Kallaher [**40**] hanno provato la congettura di Burn per piani di ordine $\neq 3^4$ e 3^6.

Teorema 4.2. (Kallaher [**101**], Hanson e Kallaher [**40**]).

Sia π un piano finito di Bol di ordine n. Se $n \neq 3^4 e\ 3^6$ allora π è un piano su un nearcorpo.

In [**134**], Thas ha completato la classificazione di flock iperbolici in $PG(3, q)$ per $q \equiv 1 \bmod 4$ senza usare la corrispondenza tra flock e piani di traslazione. Giá nel l975 Thas [**135**] aveva provato che per q pari esiste solo un flock iperbolico lineare (tutti i piani che contenono le coniche hanno una retta in comune).

Per (2.3), i piani di traslazione devono avere un gruppo di omologie di ordine $q-1$ le cui orbite danno regoli. Thas ha provato che per $q \equiv 1 \bmod 4$ questi piani sono sempre piani su nearfields (effettivamente Thas ha lavorato solo con i flock iperbolici).

Per qualunque q, Thas ha dimostrato quanto segue:

Teorema 4.3. (Thas [**134**]).

Sia F un flock iperbolico in $PG(3, q)$ e sia C una conica di F. Allora, esiste una involuzione σ di $PGL(4, q)$ che fissa F e fissa ogni punto di C.

Se prendiamo il piano π_C in $PG(3, q)$ che contiene C e usiamo la corrispondenza di Klein, π_C dá luogo al regolo opposto al regolo R_C nella fibrazione iperbolica corrispondente. Anche, i punti di C e i sottopiani di Baer in R_C si corrispondono. Traducendo ció in termini di piani di traslazione: σ é una omologia. Il piano polare di π_C contiene due punti che σ deve scambiare. Questi due punti diventano componenti del piano di traslazione Σ corrispondente. Allora, σ diventa una omologia che scambia due componente L e M di Σ
Anche, l'asse di σ deve essere contenuto in R_C. Allora, con il gruppo di omologie di ordine $q-1$ e con le involuzioni ottenute dal flock, Σ diventa un piano di Bol [**5**].
Applicando i risultati di Kallaher per ordini diversi da 3^4 e 3^6, i piani di traslazione che corrispondono ai flock iperbolici sono piani sui quasicorpi associativi.

Teorema 4.4. (Thas [**136**] per q pari , Thas [**134**] e Bader, Lunardon [**5**] per q dispari.

Sia F un flock iperbolico in $PG(3,q)$. Allora, il piano di traslazione corrispondente è

(i) un piano Desarguesiano se q pari,

(ii) un piano di Desarguesiano, o un piano su un quasicorpo associativo regolare, o un piano di ordine $11^2, 23^2$ o 59^2 sui quasicorpi associativi irregolari per q dispari.

Abbiamo visto che un flock parziale iperbolico privo di una conica corrisponde a un piano di traslazione di ordine q^2 che ammette un gruppo B di Baer di ordine $q-1$. Anche, un flock parziale può essere esteso ad un flock iperbolico quando la rete di grado $q+1$ che contene Fix$B$ corrisponde ad un regolo in $PG(3,K)$ (dove $K \cong GF(q)$ è il nucleo del piano). Ci sono esattamente due esempi che non possono essere estesi. Questi due esempi possono essere costruiti usando un metodo chiamato elevazione.

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo contenente $K \cong GF(q)$. Sia $GF(q^2) = GF(q)[t]$ tale che $t^2 = t\omega + \rho$ con $\omega, \rho \in K$. Possiamo rappresentare la fibrazione in π come:

$$x = O \qquad y = x \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ g(\alpha,\beta) - \omega h(\alpha,\beta) & h(\alpha,\beta) \end{bmatrix}$$

dove x, y sono 2-vettori su $GF(q)$, $\alpha, \beta \in K$ e $g, h : K \times\ K \to K$.

Si definisca $f : GF(q^2) \to GF(q^2)$ nel seguente modo $f(\alpha + \beta t) = g(a,\beta) - h(\alpha,\beta)t$.

Teorema 4.5. (Hiramine, Matsumoto, Oyama [**46**], Johnson [**80**]

Usando la notazione prima introdotta, esiste un piano di traslazione π^E di ordine q^4 con nucleo contenente $GF(q^2)$, detto piano elevato da π, con la seguente fibrazione:

$$x = O, \qquad y = x \begin{bmatrix} u & v \\ f(v) & u^q \end{bmatrix}$$

dove x, y sono 2-vettori su $GF(q^2)$, $u, v \in GF(q^2)$.

Teorema 4.6. (Johnson e Pomareda [**94**], Johnson [**67**]).

(1) Ci sono esattamente due piani di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ che ammettono un gruppo B di Baer di ordine $q-1$ che possono

essere elevati da piani di traslazione Σ e in cui la rete di grado $q+1$ che contiene il sottopiano Fix$B$ non è un regolo.

Per $q = 4$ o 9 il piano corrispondente Σ è rispettivamente il piano di Desargues di ordine 4 o il piano su un quasicorpo associativo regolare.

(2) Per $q = 4$ o 9 ci sono due flock parziali iperbolici in $PG(3,q)$ con q coniche che non possono essere estesi a un flock iperbolico. Inoltre, esiste un gruppo di collineazioni di ordine q che opera regolarmente sulle q coniche.

É un problema interessante determinare tutti i flock parziali iperbolici privi di una conica e che ammettono un gruppo di collineazioni che opera regolarmente sulle coniche.
La classificazione dei flock iperbolici è utile anche per trovare piani sui quasicorpi associativi. Per esempio, in (2.3), abbiamo visto che il piano associato ad un flock iperbolico ammette un gruppo di omologie le cui orbite sulle componenti producono regoli. Allora sorge in modo naturale la seguente domanda: é possibile avere un gruppo di omologie diun piano di traslazione la cui fibrazione contiene regoli non fissati da tale gruppo?
A riguardo é stato ottenuto Recentemente il seguente risultato:

Teorema 4.7. (Johnson [**79**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 il cui nucleo contiene $K \cong GF(q)$. Se π ammette un gruppo di omologie H di ordine $q-1$ e la fibrazione di π contiene un regolo (in $PG(3,K)$) che contiene l'asse o il coasse di H. Allora π è uno dei seguenti piani:

(i) un piano Desarguesiano,

(ii) un piano di traslazione su un quasicorpo associativo regolare di ordine dispari,

(iii) un piano di traslazione su un quasicorpo associativo irregolare di ordine $11^2, 23^2$, o 59^2.

Inoltre, π è Desarguesiano se e solo se ammette un gruppo di omologie di ordine $q-1$ e la fibrazione ha un regolo che contiene l'asse e il coasse del gruppo ma non entrambi.

CAPITOLO 5

Flock parziali ellittici e piani di traslazione derivati da piani di Desarguesiani

Sia P_E un flock parziale ellittico in $PG(3,q)$ (E indica una quadrica ellittica. Usando la corrispondenza di Klein per E nella quadrica di Klein, si ottiene una fibrazione di un piano Desarguesiano Σ. Con la costruzione di Thas-Walker, una conica di P_E corrisponde ad un regolo opposto ad un regolo di Σ e siffatti regoli hanno a due a due intersezione vuota. Derivando quest'insieme di regoli si ottiene un piano di traslazione che corrisponde a P_E.

NOTA 5.1. *I flock parziale ellittici con t coniche sono equivalenti ai piani di traslazione che possono essere costruiti dalla derivazione di t regoli di un piano Desarguesiano.*
Anche una quadrica ellittica in $PG(3,q)$ può essere considerata come un piano inversivo di Miquel $M(q)$ dove le coniche sono i cerchi in $M(q)$.

Per i flock ellittici, abbiamo il teorema di Orr-Thas:

TEOREMA 5.2. (Orr [**114**] per q dispari, Thas [**136**] per q pari).

Ogni flock ellittico in $PG(3,q)$ è lineare e quindi il piano corrispondente è Desarguesiano.

Per i flock iperbolici e conici ci sono descrizioni che usano gli insiemi di regoli. Invece una fibrazione in $PG(3,q)$ che contiene $q-1$ regoli a due a due disgiunti non sempre produce a un flock ellittico. Per esempio:

TEOREMA 5.3. (Jha-Johnson [**47**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 il cui nucleo contiene $K \cong GF(q)$. Se π ammette un gruppo ciclico di omologie H di ordine $q+1$ e L è una componente di π che non è fissata da H allora LH è un regolo in $PG(3,K)$. Dunque, ci sono $q-1$ regoli nella fibrazione di π.

Un problema é trovare una condizione geometrica per stabilire quando un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ produce a un flock parziale ellittico.
Un flock parziale ellittico in $PG(3,q)$ con $q-2$ coniche non puó essere esteso a un flock se il piano corrispondente non è nè Desarguesiano nè di Hall. Orr [**114**] ha trovato un'esempio di un flock parziale ellittico in $PG(3,9)$ che non può essere esteso a un flock.
É piuttosto difficile ottenere esempi di tali flock parziali. Quindi un problema é trovare alcune condizioni di esistenza. Un altro problema legato a questo è quello di determinare i piani di traslazione che ammettono $q-1$ regoli a due a due disgiunti e che ammettono un gruppo G di collineazioni di ordine q^2-1 che fissa l'insieme dei regoli e le orbite non-banali dei punti che hanno lunghezza q^2-1.
Nel caso generale, per un gruppo lineare G di ordine q^2-1, sia K^* il gruppo delle omologie di ordine $q-1$ di determinato dal nucleo, se $G \cap K^* =< 1 >$ e G è abeliano, R. Figueroa ha determinato completamente le varie possibilitá [**94**]. Un risultato simile è il seguente:

Teorema 5.4. (si veda anche Ostrom (5.8)[**116**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo contenente $K \cong GF(q)$. Se G è un gruppo di collineazioni di ordine q^2-1 di π nel complemento lineare tale che ogni orbita unita lo zero forma un K-sottospazio, allora π è un piano che corrisponde ad un flock parziale ellittico.

Dimostrazione (Gli argomenti usati sono dovuti ad Ostrom):
Le orbite danno luogo ad una fibrazione π'; cioè, ad un piano di traslazione π' di ordine q^2 con nucleo contenente K. Il gruppo G di ordine q^2-1 opera sul piano π'. Sia W una componente di π. Se W non è una componente di π' allora W deve essere un sottopiano di Baer di π'. L'insieme delle componenti della rete di grado $q+1$ di π' che contiene W é un regolo in $PG(3,K)$ fissato da G. Poichè G è un gruppo di collineazioni di π, allora π deve corrispondere a un flock parziale ellittico.
In (5.4), se le orbite di G sono solo sottospazi invece di K-sottospazi, il risultato non è più vero. Infatti, sia $F \cong GF(h^{2m})$. Prediamo σ :

$x \rightarrow x^h$, e consideriamo la fibrazione di Andrè: $x = O$, $y = x^{\sigma^{(j \cdot m+1)}} s$ dove $s^{1+\sigma+\sigma^2+\ldots+\sigma^{2m-1}} = \alpha_j \in GF(h)$. Il gruppo $K^* =:< (x,y) \rightarrow (ax,\ a^\sigma y) | a \in GF(h^m) >$ opera sulla fibrazione fissandone ogni componente perchè $a^{\sigma^{(j \cdot m+1)}} = a^\sigma$ con $a \in GF(h^m)$. Si noti che K^* è il nucleo del piano se ci sono almeno due scelte differenti per j. Anche, il gruppo $G =:< (x,y) \rightarrow (\alpha x, \alpha y) | \alpha \in\ F >$ agisce sulla fibrazione perchè

$$y = x^{\sigma^{(j \cdot m+1)}} s \rightarrow y = x^{\sigma^{(j \cdot m+1)}} s\ \alpha^{1-\sigma^{(j \cdot m+1)}}$$

e $(\alpha^{(1-\sigma^{(j \cdot m+1)})(1+\sigma+\sigma^2+\ldots+\sigma^{2m-1})} = 1$.

G opera sul piano π con questa fibrazione ma le orbite sono: $x = O$, $y = x\ s$ con $s \in F$ e $y = x\ s$ con $s \neq 0$ non fissato da $\hat{K}$. Allora, abbiamo un piano con fibrazione in $PG(3,q)$, $q = h^m$, h prime. Tuttavia non è possibile usare le orbite di G per costruire un'altro piano che corrisponda ad un flock ellitico.

Nei Capitoli 12 e 14, ritorneremo sui gruppi di ordine $q^2 - 1$.

CAPITOLO 6

Flock parziali di coni, quadrangoli generalizzati e piani di Baer-elazioni

Di recente Thas [**133**] ha osservato che ad ogni flock conico in $PG(3,q)$ resta associato un quadrangolo generalizzato di tipo (q^2, q).

Teorema 6.1. Sia $\Sigma \cong PG(3,q)$ rappresentato con le coordinate omogenee (x_o, x_1, x_2, x_3). Ogni cono quadratico C può essere rappresentato con l'equazione $x_0x_1 = x_2^2$ dove $(0,0,0,1)$ è il vertice. C si puó costruire usando la conica $x_ox_1 = x_2^2$ nel piano $x_3 = 0$ e il punto $(0,0,0,1)$ in Σ.

Teorema 6.2. (Thas [**133**]).

Rappresentiamo il cono C come in (6.1). Sia $a_ix_0+b_ix_1+c_ix_2 = 0$, $a_i, b_i, c_i \in GF(q)$, l'equazione generale di un piano π_i non contenente $(0,0,0,1)$. Usiamo (a_i, b_i, c_i) per denotare π_i. La retta $\pi_i \cap \pi_j$, per $i \neq j$, soddisfa l'equazione $(a_i - a_j)x_0 + (b_i - b_j)x_1 + (c_i - c_j)x_2 = 0$.

Sia ρ_{ij} il piano rappresentato da questa equazione. Allora:

(1) Se q é dispari, ρ_{ij} non ha rette aventi un punto in comune con il cono se e solo se $(c_i - c_j)^2 - 4(a_i - a_j)(b_i - b_j)$ non è un quadrato per ogni $i \neq j$. Questa condizione implica che si puó costruire un flock conico.

(2) Se q é pari, ρ_{ij} non ha rette aventi un punto in comune con il cono se e solo se $((a_i + a_j)(b_i + b_j))(c_i + c_j)^{-2} = m_{ij}$, $x^2 + x + m_{ij}$ è irreducibile per ogni $i \neq j$. Questa condizione implica che si puó costruire un flock conico.

Useremo la notazione (a_i, b_i, c_i) per il flock. Se poniamo $t = a_i \in GF(q)$, allora per un flock conico useremo la notazione $(t, F(t), G(t))$, dove le funzioni F, $G : GF(q) \to GF(q)$ sono tale che $b_i = F(t)$ e $c_i = G(t)$.

Ricordiamo che:

Definizione 6.3. *Un quadrangolo generalizzato di tipo (s,t) è una struttura formata da punti e le rette tali che:*

(1) ogni punto è incidente con $t+1$ rette, $t \geq 1$; presi i punti P, Q, $P \neq Q$ esiste al piú una retta che li incide emtrambi.

(2) Ogni retta è incidente con $s+1$ punti, $s \geq 1$; due rette distinte L ed M si incidono in al piú un punto.

(3) Per ogni punto P e per ogni retta L, con P ed L non incidenti esiste un unico punto Q ed un'unica retta M tali che Q incide L, e P e Q incidono M.

Quindi ci sono $(st+1)(s+1)$ punti e $(st+1)(t+1)$ rette.

Sia $G = \{(\alpha, c, \beta) : \alpha, \beta \in GF(q) \times GF(q), c \in GF(q^2)\}$. Sia $u \cdot v$ il prodotto puntuale ordinario. Definiamo
$$(\alpha, c, \beta) \cdot (\alpha^*, c^*, \beta^*) = (\alpha + \alpha^*, c + c^* + \beta \cdot \alpha^*, \beta + \beta^*).$$

Allora, G è un gruppo di ordine q^5.

Consideriamo il sottogruppo $A(\infty) = \{(0, 0, \beta) : \beta \in GF(q) \times GF(q)\}$ di G di ordine q^2.

Sia $A_t = \begin{bmatrix} x_t & y_t \\ 0 & z_t \end{bmatrix}$ tale che $x_t, y_t, z_t \in GF(q)$ per ogni $t \in GF(q)$.

Prendiamo $A(t) = \{(\alpha, \alpha A_t \alpha^T, \alpha(A_t + A_t^T)) : \alpha \in GF(q) \times GF(q)\}$ dove M^T è la trasposta della matrice M. Anche $A(t)$ è un sottogruppo di G di ordine q^2.

Sia $C = \{(0, c, 0) : c \in GF(q)\}$ e sia $A^*(t) = A(t)C$ un sottogruppo di G di ordine q^3 con $t \in GF(q) \cup \{(\infty)\}$.

Sia $J^* = \{A^*(t) : t \in GF(q) \cup \{(\infty)\}\}$, $J = \{A(t) : t \in GF(q) \cup \{(\infty)\}$ e si consideri la seguente struttura:

Punti:

(i) gli elementi di G (q^5 elementi),

(ii) gli insiemi $A^*(t)g$, $g \in G$ e $A^*(t) \in J^*$ ($q^2(q+1)$ elementi),

(iii) il simbolo (∞).

Rette:

(i) gli insiemi $A(t)g$, $g \in G$ e $A(t) \in J$ ($q^3(q+1)$ elementi),

(ii) i simboli $[A(t)]$, $A(t) \in J$ ($q+1$ elementi).

Diremo che un punto h di tipo (i) è incidente con una retta $A(t)h$ con $t \in GF(q) \cup \{(\infty)\}$ ($q+1$ rette) e un punto $A^*(t)h$ di tipo (ii) è incidente con $A(t)g$ se e solo se $A(t)g \subset A^*(t)h$. Per esempio, $A(t)g \subset A^*(t)$ per ogni $g \in A^*(t)$. Anche, $A^*(t)h$ è incidente con $[A(t)]$ ($A^*(t)$ è incidente con $q+1$ rette) , e finalmente, il punto (∞) è incidente con ogni retta $[A(t)]$ con $t \in GF(q) \cup \{(\infty)\}$ ($q+1$ rette).

Quindi ci sono $q^5+q^3+q^2+1 = (q^2q+1)(q^2+1)$ punti, $q^4+q^3+q+1 = (q^2q+1)(q+1)$ rette e ogni punto è incidente con $q+1$ rette e ogni retta è incidente con q^2+1 punti.

Teorema 6.4. (Kantor [**102**], [**103**], Payne [**124**]).

Un quadrangolo generalizzato di tipo (q^2, q) può essere ottenuto dalle matrici

$A_t = \begin{bmatrix} x_t & y_t \\ 0 & z_t \end{bmatrix}$ con $t \in GF(q)$ se e solo se

(1) q è dispari e $(y_t - y_s)^2 - 4(x_t - x_s)(z_t - z_s)$ non è un quadrato per ogni t, s, $t \neq s$ in $GF(q)$,

(2) q é pari e per $m_{st} = ((x_t + x_s)(z_t + z_s))(y_t + y_s)^{-1}$, $x^2 + x + m_{ts}$ è irreducibile per ogni t, s, $t \neq s$ in $GF(q)$.

In questo caso, useremo la notazione t per x_t, $F(t)$ per z_t e $G(t)$ per y_t con $t \in GF(q)$, dove F e G sono funzioni su $GF(q)$.

Quindi per la (6.3), (6.4) e per i risultati della Capitolo 2, c'é una corrispondenza tra flock conici, quadrangoli generalizzati, e fibrazioni coniche.

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 il cui nucleo contiene $K \cong GF(q)$. Supponiamo che π ammetta un gruppo di elazioni di ordine q tale che un'orbita di componenti definisca una rete derivabile. Allora, una fibrazione di π può essere scelta della forma:

$$x = O, \qquad y = x \begin{bmatrix} u + g(t) & f(t) \\ t & u \end{bmatrix}$$

con $t, h \in GF(q)$, $\sigma \in \text{Aut } K$, e con f, g funzioni su K. Se $\sigma = 1$, otteniamo una fibrazione conica (Capitolo 2)
Questo piano esiste se

$$\left(\begin{bmatrix} u + g(t) & f(t) \\ t & u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w + g(s) & f(s) \\ s & w \end{bmatrix} \right)$$

é non-singolare oppure zero.
Equivalentemente, $x^2 + (g(t) - g(s))x - (t - s)(f(t) - f(s)) \neq 0$ per ogni t, s $t \neq s$ in K.
È facile vedere che questa condizione è equivalente a quella data nel (6.2) o (6.4). Quindi, con $g(t) = G(t)$ e $f(t) = -F(t)$, possiamo passare da una struttura all'altra.

Teorema 6.5. Le seguenti strutture geometriche sono equivalenti:

(1) flock conici: $x_o x_1 = x_2^2, (t, -f(t), g(t))$,

(2) quadrangoli generalizzati di tipo (q^2, q) costruiti con il metodo di Kantor $\begin{bmatrix} t & g(t) \\ 0 & -f(t) \end{bmatrix}$,

(3) fibrazioni coniche $x = O$, $y = x \begin{bmatrix} u + g(t) & f(t) \\ t & u \end{bmatrix}$, con $u, t \in K \cong GF(q)$, $f, g : K \to K$.

Dunque, abbiamo una corrispondenza algebrica tra flock conici, quadrangoli generalizzati, e fibrazioni coniche. Inoltre c'é la costruzine di Thas-Walker che usa la corrispondenza di Klein tra flock conici e fibrazione coniche. In (2.4), abbiamo visto che questi due costruzioni danno gli stessi risultati. Abbiamo visto che con un piano di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ e che ammette un gruppo di Baer di ordine q, c'è un flock parziale conico privo di una conica. Payne e Thas, usando argomentazioni geometriche, hanno provato:

TEOREMA 6.6. (Payne e Thas [**127**]).

Ogni flock parziale conico in $PG(3, q)$, con q pari, privo di una conica può essere esteso ad un flock conico.

Dalla (3.5) e dalla(3.8) si ha:

TEOREMA 6.7. (Johnson [**83**]).

Ogni piano di Baer-elazioni di tipo $(q, 2)$ è isomorfo al piano di Hall.

CAPITOLO 7

Scheletri di flock parziali di coni

In [**6**], Bader, Lunardon e Thas costruiscono da un flock conico in $PG(3, q)$, q dispari, altri q flock conici che si sono imparentati. Consideriamo questa costruzione per flock conici parziali.

Definizione 7.1. *Sia $\Sigma \cong PG(4, q)$, q dispari, e sia Q_4 una quadrica in Σ. Un insieme $\{p_o, p_1, ...p_k\}$, $q \geq k \geq 1$, di $k+1$ punti in Q_4 si chiama un BLT-insieme parziale di grado $k+1$ se e solo se per tre punti p_i, p_j, p_k, $i \neq j, i \neq k$, $j \neq k$, non esiste un punto $\alpha \in Q_4$ tale che α è perpendicolare a p_i, p_j, p_k o equivalentemente per $H_s = p_s^{\perp}$, $s = 1, 2, \ldots, k$, la retta $H_i \cap H_j \cap H_k$ è esterna a Q_4.*

Teorema 7.2. (Bader, Lunardon, Thas [**6**]; si veda Johnson [**76**] per BLT-insieme parziale).

(1) BLT-insiemi parziali di grado $k+1$ in $PG(4, q)$, q dispari, sono equivalenti a flock conici parziali con k coniche.

(2) Ogni flock conico con k coniche produce ad altri k flock conici con k coniche.

Dimostrazione: (1) $\to$ (2). Sia $S = \{p_o, p_1, \ldots, p_k\}$ un BLT-insieme parziale in $\Sigma \cong PG(4, q)$. Allora $p_i^{\perp}$ è isomorfo a $PG(3, q)$ e $p_i^{\perp} \cap Q_4$ è un cono quadratico con vertice p_i. Inoltre, $p_o^{\perp} \cap p_i^{\perp} = \pi_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$, é un piano in Σ tale che $\pi_i \cap p_j = p_o^{\perp} \cap p_i^{\perp} \cap p_j^{\perp}$, con $i \neq j$, è una retta esterna a $p_o^{\perp} \cap Q_4$; cioè, $\{p_o^{\perp} \cap p_i^{\perp} \cap Q_4 | i = 1, 2, \ldots, k\}$ è un flock conico parziale in $p_o^{\perp}$ con cono quadratico $p_o^{\perp} \cap Q_4$ di vertice p_o.
Analogamente, $\{p_z^{\perp} \cap p_i^{\perp} \cap Q_4 | i = 0, 1, 2, \ldots, k\ ,\ i \neq z\}$ è un flock conico parziale in $p_z^{\perp}$.

(1) $\leftarrow$ (2). Usiamo il risultato della Capitolo 2 che afferma che un flock parziale conico è equivalente a una fibrazione conica parziale che si puó

rappresentare come

$$x = 0, \qquad y = x \begin{bmatrix} u + g(t) & f(t) \\ t & u \end{bmatrix}$$

con $u \in K \cong GF(q)$, $t \in \lambda \subset K$, $|\lambda| = k$, e $g, f : \lambda \to K$ (si veda [**76**]).

Sia $M_t = \begin{bmatrix} g(t)/2 & f(t) \\ t & -g(t)/2 \end{bmatrix}$. Per ogni $s \in \lambda$, sia $(P^k)^{-s} = \{x = 0, y = x(M_t - M_s)^{-1} + uI_2 | t \in \lambda\}$ Allora, $(P^k)^{-s}$ è una fibrazione conica parziale di grado $1+gk$ se e solo se P^k è una fibrazione conica parziale (per esempio, si veda [**73**] (2.7), (2.8), (2.9)).

$(P^k)^{-s}$ **si chiama fibrazione parziale che è** s**-invertita da** P^k.
Non é difficile dimostrare questo risultato se si tiene conto del fatto che $(P^k)^{-s}$ è una fibrazione parziale se e solo se la differenza delle due matrici é non singolare o zero. Queste fibrazioni parziali corrispondono a quelle che possono essere costruite usando i BLT-insiemi parziali che corrispondono a P^k. Per applicare (7.2), bisogna ricordare che un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer di ordine q è equivalente a un flock conico parziale privo di una sola conica.

Corollario 7.3. *Per ogni piano di traslazone di ordine q^2 con nucleo $K \simeq GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer di ordine q, ci sono $q-1$ altri piani di traslazione di ordine q^2 che ammettono un gruppo di Baer di ordine q.*

Recentemente, Payne e Thas [**127**] hanno dimostrato il seguente teorema:

Teorema 7.4. (Payne e Thas [**127**]).

Un flock conico parziale F privo di una sola conica può essere esteso a un flock conico.

Un breve cenno della dimostrazione per q dispari:

Sia $S = \{p_o, p_1, \ldots, p_{q-1}\}$ il BLT-insieme parziale che corrisponde a F. Sia T_i l'insieme di tutti punti di Q_4 che non sono in $p_i^{\perp} \cap Q_4$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, q-1$.
Sia $V = \cup T_i$ e sia L una retta di Q_4 tale che $|L \cap V| = q$. Allora in [**127**], é

dimostrato che $V \cup \{L - V\}$ è un cono e $(V \cup \{L - V\} \cap p_o^{\perp} \cap Q_4$ è una conica in $p_o^{\perp}$; cioè esiste un flock conico in $p_o^{\perp}$ che estende F. Quindi, abbiamo il seguente corollario:

COROLLARIO 7.5. *Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer B di ordine q. Allora, la rete di grado $q+1$ che contiene $Fix(B)$ corrisponde ad un regolo in $PG(3, K)$. Il piano derivato corrisponde ad una fibrazione conica.*

DEFINIZIONE 7.6. *Sia P^k una fibrazione parziale conica. Lo scheletro di P^k é l'insieme $S(P^k) = \{(P^k)^{-s} | s \in \lambda\}$ con $\lambda \subset K \cong GF(q)$, $|\lambda| = k$ e dove $(P^k)^{-s}$ é s-invertita da P^k.*

Diremo che due fibrazioni parziali P_1, P_2 sono isomorfe quando esiste un elemento σ di $\Gamma L(4, q)$ tale che $P_1\sigma = P_2$. Parleremo di scheletro $S(\pi)$ di un piano di traslazione quando considereremo una fibrazione conica.

É importante sapere quando due piani dallo stesso scheletro $S(\pi)$ sono isomorfi. Le s-inversioni non aiutano a risolvere il suddetto problema. Allora dobbiamo trovare altri metodi per studiare gli scheletri.

Ci sono sette classi dei flock conici di ordine dispari:

Consideriamo un cono quadratico $x_o x_1 = x_2^2$ con flock $(t, -f(t), g(t))$ (si veda Gevaert, Johnson [**33**] pp. 312-313, table I).

Tipi di flock

I.1 $(t, t^3/3, -t^2)$, $q \equiv -1 \bmod 3$;

I.2 $(t, t^3/3 - ft^5 - k^{-1}t, -t^2)$, $q = 5^r$, k **non è un quadrato**;

II.1 $(t, tc, -tb)$, $x^2 + bx + c$ **è irriducibile su** $GF(q)$;

II.2 $(t, -mt^{\sigma}, 0)$, q **dispari,** m **non è un quadrato,** $\sigma \in AutGF(q)$;

II.3 $(t, -n_1 t^9 - n_1 n_2^2 t, -at^3)$, $q = 3^r$, $a^2 = n_1 n_2, n_1, n_2$ **non sono quadrati**;

III-1 $(t, \gamma t^5, -\beta t^3)$, $q = p^r$, r **dispari**, $p \equiv \pm 2 \bmod 5$, $\beta^2 = 5\gamma$;

III-2 $(-t,-\alpha t,0)$**,** $(-a_{2j},\alpha a_{2j},2b_{2j})$, $t^2-4/N(1+z)$ **è un quadrato in** $GF(q)$,$-\alpha$ **è un quadrato.**;

Sia $\langle z\rangle=(F(i))^*$, $i^2=-\alpha$**, e sia**

$$a_k=\frac{(z^{k+1}-z^{-(k+1)}-(z^k-z^{-k})}{(z-z^{-1})},$$

$$b_k=\frac{i(z^{k+1}+z^{-(k+1)}-(z^k+z^{-k}))}{(z-z^{-1})},$$

con a_k,b_k **in** F**,** $0\le k\le(q-1)/2$**, e dove** $N(1+z)$ **é la norma di** $1+z$.

Per le relazioni tra questi tipi di flock, i piani di traslazione e i quadrangoli generalizzati si veda [**33**] pp. 314-315.

Un flock di tipo I si chiama un **flock likeable** e un flock di tipo II si chiama un **flock di semicorpi** perche i piani di traslazione sono rispettivamente likeable o su semicorpi. Gli scheletri $S(\pi)$ dei corrispondenti piani sono detti rispettivamente **scheletri likeable** o **scheletri di semicorpi**.

Usando i BLT-insiemi, si può dimostrare che:

Nota 7.7. *Sia π un piano di traslazione di ordine q^2, q dispari, corrispondente ad una fibrazione conica e sia $S(\pi)$ lo scheletro di π.*

(1) Se $\rho\in S(\pi)$, allora $S(\rho)=S(\pi)$. Se $f\in\Gamma L(4,q)$ e α,β sono piani di $S(\pi)$ tale che $\alpha f=\beta$, allora f fissa $S(\pi)$.

(2) Se π ammette un gruppo di collineazioni che opera transitivemente sui regoli (che corrispondono alle coniche dei flock), allora tutti i piani di $S(\pi)-\{\pi\}$ sono isomorfi. Se tutti i piani negli scheletri di π sono isomorfi, esiste un gruppo che opera 2-transitivemente sugli scheletri di π.

Teorema 7.8. (per (i) si veda Gevaert, Johnson, Thas [**34**], per (ii) si veda Biliotti, Jha, Johnson, Menichetti [**12**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo contenente $K\cong GF(q)$ e corrispondente ad una fibrazione conica.

(i) Se π non è un piano Desarguesiano, allora il gruppo delle collineazioni di π permuta i regoli che corrispondono alle coniche del flock conico. Questi regoli sono detti regoli di base.

(ii) Per q dispari, se π ammette un gruppo di collineazione che opera transitivemente sui regoli di base, allora π è likeable piano su un semicorpo. oppure é piano su un semicorpo.

In (7.7)(2), è possibile usare la classificazione dei gruppi semplici per trovare le classi di piani di traslazione likeable o su semicorpi tali che piani aventi lo stesso scheletro sono isomorfi. Esprimeremo questo teorema usando i flock. Un flock conico che ammette un sottogruppo di $PGL(4, q)$ che opera transitivemente sulle coniche del flock è detto **flock conico transitivo.**

Teorema 7.9. (per (i) si veda Johnson [**76**], per (ii) si veda Johnson, Lunardon, Wilke [**91**]).

Sia F un flock conico transitivo in $PG(3, q)$, q dispari, allora

(i) F è un flock likeable di tipo (I-1)

(ii) F è un flock semicorpo di tipo (II-2).

Corollario 7.10. (Bader, Lunardon, Thas [**6**]; Payne, Thas [**127**]).

Ci sono flock conici che possono essere costruiti dai flock di tipi I-2 e II-3.

Teorema 7.11. (Johnson (6.4),(6.5),(6.6) [**76**]) .

Sia F un flock conico di tipo III-1 in $PGL(3, q)$ dove $(q + 1)/2 \neq m^s$, con m primo. Allora, ci sono flock conici nello scheletro di F.

In [**76**] (6.4), é dato un teorema piú generale.

CAPITOLO 8

Derivazione

Il metodo di derivazione nasce intorno al l960 ad opera di T.G. Ostrom ([**118**],[**119**]): Un piano affino π di ordine n^2 contenente un insieme di $n^2(n+1)$ sottopiani di Baer contenuti in una rete R di grado $n+1$ é usato per constuire un'altro piano affine π^* le cui rette sono le rette che non sono in R e i sottopiani di Baer di R.
Un piano affine π risulta essere derivabile quando è possibile scegliere coordinate con le seguenti proprietá: Sia $Q = (Q, +, \cdot)$ un insieme di coordinate per π tale che:

(i) l'insieme dei punti é $\{(x, y)|x, y \in Q\}$; le reti sono gli insiemi di equazioni $y = x \cdot m + b$, $x = c$ con $m, b, c \in Q$,

(ii) esiste un sottocampo $K = (K, +, \cdot)$ tale che Q è uno spazio vettoriale su K rispetto al prodotto vettoriale: $v \cdot \alpha$ con $v \in Q$ e $\alpha \in K$.

Per esempio, questa è la situazione nel piano di Desargues di ordine n^2 dove Q è un campo isomorfo a $GF(n^2)$. A.A. Albert ha dimostrato che il piano derivato del piano di Desargues è il piano di Hall (si veda [**116**]). In questo caso, con il campo $Q \cong GF(n^2)$, il piano diventa uno spazio vettoriale di dimensione 4 su $K \cong GF(n)$. Nello spazio proiettivo corrispondente $PG(3, n)$, la rete R che contiene i sottopiani di Baer diventa un regolo. Sempre usando le coordinate, é stato dimostrato che il piano di Hughes è derivabile, il piano da esso costruito si chiama il piano di Ostrom-Rosati ([**116**],[**131**]). Questo piano é molto importante perche é il primo esempio di piano finito con una sola (P, L)-transitività dove P è incidente con L.
I piani derivati possono essere infiniti e molti autori hanno studiato quando è possible che un piano derivabile abbia un'insieme di coordinate Q che è uno spazio vettoriale di dimensione due su un sottocorpo K. Lunardon [**113**] e Grundhöfer [**36**] hanno dimostrato questo per piani finiti e per piani derivabili di traslazione. Krüger [**109**] ha dimostrato lo stesso per piani sui gruppi cartisiani. In queste situazioni, i sottopiani di Baer sono sempre Desarguesiani. Non è difficile vedere che il metodo di derivazione può essere considerato sol con una rete senza avere un piano che la contiene. Allora

diventano interessanti le seguenti questioni:

(1) I piani di Baer nelle reti derivabili sono sempre piani di Desargues?

(2) Ogni rete derivabile corrisponde ad un regolo in un qualche spazio proiettivo?

(3) Si può estendere ogni rete derivabile ad un piano affino?

(4) É possibile scegliere coordinate Q per una rete derivabile in modo tale che Q è uno spazio vettoriale destro di dimensione 2 su un sottocorpo?

(5) É possible comprendere il metodo di derivazione in un qualche modo geometrico?

Per piani derivabili finiti, Prohaska [**128**] ha risposto affermativamente alla questione (1). Anche, per piani finiti di traslazione, Foulser [**37**] ha dimostrato che (1),(2),(3) e (4) sono vere. In [**25**], Cofman ha provato che la (1) é vera per piani affini derivabili, estendendo quindi il risultato di Prohaska. Ma i metodi della Cofman sono differenti da quelli di Prohaska. Ad ogni piano derivabile, in Cofman, corrisponde uno spazio affine in cui ogni sottopiano di Baer diventa un piano in tale spazio affine. Cioè, ogni sottopiano di Baer nella rete derivabile è Desarguesiano. Recentemente, é stato provato che é possibile usare la costruzione di Cofman per ottenere una descrizione completa della struttura delle reti derivabili.

In risposta alla questione (5) data sopra, si ha:

Teorema 8.1. (Johnson [**68**]).

(1) Sia $R = (P, L, C, B, I)$ una rete derivabile. Allora, esiste un corpo K e uno spazio proiettivo di dimensione tre $\Sigma \cong PG(3, K)$ tale che i punti P di R sono le rette di Σ oblique ad una fissata retta N, le rette L di R sono i punti di $\Sigma - N$, le classi di parallelismo C di R sono i piani di R che contengono N e i sottopiani B di R sono i piani di Σ che non contengono N.

(2) Viceversa, se $\Sigma_1 \cong PG(3, L)$ è uno spazio proiettivo di dimensione tre su un corpo L ed N_1 é una qualunque retta fissata. Definiamo punti P_1, rette L_1, classi di parallelismo C_1, sottopiani B_1 in accordo con la

corrispondenza data sopra dove l'incidenza I_1 è l'incidenza in Σ_1, allora $R = (P_1, L_1, C_1, B_1, I_1)$ è una rete derivabile.

Quindi, le reti derivabili e gli spazi proiettivi di dimensione tre sono equivalenti.

Per la questione (2) data sopra sui regoli e reti derivabili, è possibile usare (8.1) per determinare il gruppo completo di collineazioni di una rete derivabile.

Teorema 8.2. (Johnson [**69**]).

Sia R una rete derivabile e $\Sigma \cong PG(3, K)$ lo spazio proiettivo corrispondente. Sia F_R il gruppo completo delle collineazioni di R . Quindi, F_R è isomorfo al gruppo $P\Gamma L(4, K)_N$ dove N è una rete di Σ.

Si usa il gruppo completo delle collineazioni per trovare un opportuno gruppo di traslazione della rete R per dare una caratterizzazione delle reti derivabli. In particolare si ha:

Teorema 8.3. (Johnson [**69**]).

(1) Ogni rete finita derivabile corrisponde ad un regolo in un qualunque spazio proiettivo di dimensione tre.

(2) Ogni rete finita derivabile può essere estesa ad un piano affine.

Con la struttura di spazio proiettivo, si puó considerare la questione di una connesione geometica con derivazione.

Teorema 8.4. (Johnson [**64**]).

Sia R una rete derivabile e Σ_R lo spazio proiettivo corrispondente alla retta N. Sia σ una correlazione di Σ_R che fissa N. Allora, lo spazio proiettivo $\Sigma_R\sigma$ con la retta N corrisponde alla rete derivata R^* di R. La derivazione è una polarità.

In fine, è possible usare questa struttura per dimostrare il seguente teorema:

Teorema 8.5. (Johnson [**75**]).

Sia R una rete derivabile. Allora esiste un insieme di coordinate Q che è uno spazio vettoriale destro su un corpo K in cui la rete R ha equazioni $x = c$, $y = x \cdot \alpha + b$ per ogni $a, b \in Q$ e $\alpha \in K$; viceversa una rete che ha un insieme di coordinate con le proprietá date é derivabile.

CAPITOLO 9

Derivazione dei piani duali di piani di traslazione

Sia π^t un piano affine di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$. Le coordinate $Q = (Q, +, \cdot)$ possono essere scelte in modo tale che i punti siano le coppie (x, y) con $x, y \in Q$ e le rette abbiano equazioni $y = x \cdot m + b$, $x = c$ con $m, b, c \in Q$. Inoltre, $(Q, +, \cdot)$ ha le seguenti proprietà :

(i) $(Q, +)$ è un gruppo abeliano elementare,

(ii) Q è uno spazio vettoriale sinistro di dimensione due su K. Cioè:

$\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$, $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, $(\alpha\ \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot b)$, dove $\alpha, \beta \in K$, $a, b \in K$).

Si estenda π^t a un piano proiettivo π^{t+} e si formi il duale di π^{t+}, π^{d+}, si costruisca un piano affine π^d rimuovendo la retta per (∞) in π^{d+}.

In questo caso, a π^d può essere assegnato un'insieme delle coordinate $Q^d = (Q, +, *)$ tale che:

$a * b = b \cdot a$ dove le rette hanno equazioni $x = c$, $y = x * m + b$ con $c, m, b \in Q^d$.

Da (8.5), π^d è derivabile. Questo metodo produce a molti piani derivabili.

Definizione 9.1. *(i) Sia π^d un piano affine di traslazione duale di π^t. Sia R^d una rete derivabile in π^d. Diremo che π^d ha la proprietá del nucleo rispetto a R^d se e solo se esiste un sottogruppo non banale di omologie H_P in π^t che fissa un punto affine P di π^d e la rete R^d.*

(ii) Una rete derivabile R^d in π^d di ordine q^2 è una rete del nucleo se e solo se $|H_P| = q - 1$.

Teorema 9.2. Teorema (si veda Johnson [**71**](8.3)).

Esistono esattamente $(q^2+1)(q+1)$ reti derivabili, che sono reti del nucleo, ottenute da un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$.

Esistono molti piani di traslazione di ordine q^2 con nucleo arbitrario il cui duale é derivabile. Per esempio esistono piani su semicorpi che hanno questa proprietá (Biliotti e Menichetti [**16**], Vincenti [**140**] e Johnson-Rahilly [**98**]).

Definizione 9.3. *Nella rete derivabile R^d, ogni sottopiano di Baer diventa una retta nella rete derivata R^s e questo sottopiano è fissato da un gruppo di traslazioni di π^d di ordine q. Anche le orbite di T^d in π^d sono rette in R^d che diventano sottopiani di Baer nel piano derivato π^s.*

La questione più importante relativa alla derivazione é:
Se π^s è un piano di semi-traslazione che é derivato da un piano π^d duale di un piano di traslazione, allora il gruppo delle collineazione di π^s lascia fissa la rete derivata R^s in π^s? Questo gruppo si chiama gruppo ereditato.

Piú in generale, ci si può domandare (quando Σ è un piano affine che è derivabile) se il gruppo ereditato è l'intero gruppo di collineazioni del piano. Chiaramente ció non è sempre vero. Infatti, si consideri, per esempio, il caso in cui il piano derivato é un piano su un semicorpo.

Per i piani di traslazione che sono derivabili si ha:

Teorema 9.4. (Johnson, Ostrom [**93**]).

Sia π^t un piano finito di traslazione di ordine almeno 16. Sia R^t una rete derivabile e sia $K \cong GF(q)$, q potenz di un primo, il nucleo di π^t. Esistono esattamente $(q^2+1)(q+1)$ reti derivabili che sono reti del nucleo che possono essere ottenute da un piano di traslazione di ordine q^2. Se i sottopiani di R^t che sono incidenti con il vettore nullo non sono tutti K-spazi, allora l'intero gruppo di collineazioni del piano derivato da π^t è il gruppo ereditato.

Walker [**141**] ha studiato il caso in cui ci sono molte reti derivabli R_i, $i = 1, 2, \ldots, t$ che hanno a due a due intersezione identica nel piano Desarguesiano Σ di ordine q^2. Nello specifico Walker ha provato che se il piano Σ costruito dalla derivazione di $\{R_i | i = 1, 2, \ldots, t \leq q-1\}$ non è un piano di Andrè di tipo particolare, allora il gruppo di collineazioni di Σ é il gruppo ereditato; cioé, il gruppo permuta le reti derivate.

Nel Capitolo 12, parleremo di gruppi ereditati nei piani di semi-traslazione per particolari applicazioni.

Quando il piano π^d è un piano su un semicorpo, di ordine > 16, allora il gruppo di collineazioni del piano di semi-traslazione π^s è sempre il gruppo ereditato.

Recentemente, é stata studiata la seguente situazione:

Teorema 9.5. (Johnson [**71**], Theorem A).

Sia π^d un piano affine duale di un piano di traslazione di ordine $q^2 > 16$ che ammette una rete derivabile R^d contenente l'asse di una elazione. Sia π^s il piano di semi-traslazione ottenuto derivando R^d.

Allora, puó verificarsi una delle seguenti situazioni:

(1) Il gruppo di collineazioni di π^s è il gruppo ereditato.

(2)(a) L'ordine di π^s è pari e il sottogruppo di omologie del nucleo del piano di traslazione associato che fissa la rete R^d è banale.

(2)(b) Esiste un punto affine P tale che il gruppo delle collineazioni di π^s che fissa il punto P non fissa la rete derivata R^s; questo gruppo contiene un sottogruppo $G \cong SL(2, q)$ dove i 2-sottogruppi di Sylow fissano ogni punto dei sottopiani di Baer.

(2)(c) π^s è un piano di semi-traslazione ma non è un piano di traslazione.

Introduciamo alcuni risultati sui piani isomorfi:

Corollario 9.6. (Johnson [**71**], Corollary B).

Siano π_1^s *e* π_2^s *piani di semi-traslazione isomorfi e di ordine* $q^2 > 16$ *, rispettivamente derivati dai piani di traslazione duali* π_1^d*,* π_2^d *rispetto alle reti derivabili* R_i^d*,* $i = 1, 2$ *contenenti l'asse di una elazione. Se l'intero gruppo di collineazioni di* π_i^s *,* $i = 1, 2$*, é il gruppo ereditato, allora* π_1^d *è isomorfo a* π_2^d*.*

Quando il piano π^t di ordine q^2 ha nucleo $K \cong GF(q)$, abbiamo:

Corollario 9.7. (Johnson [**71**], Corollary C).

Sia π^t *un piano di traslazione di ordine* $q^2 > 16$ *e nucleo* $K \cong GF(q)$*. Sia* π^{d+} *il duale dell' estensione proiettiva* π^{t+} *di* π^t *e sia* (∞) *il punto di* π^{d+} *corrispondnete alla retta all'infinito di* π^t*. Allora*

(1) ci sono $q+1$ *reti derivate in ogni piano affine* $\pi^{d+} - M$ *di* π^{d+} *ottenuto rimuovendo una retta* M *incidente con il punto* (∞)*. Inoltre, queste reti contengono l'asse di una elazione e sono fissate da un gruppo di omologie del nucleo di ordine* $q - 1$*.*

(2) L'intero gruppo di collineazioni del piano di semi-traslazione π^s *ottenuto derivando una qualunque rete del nucleo di* $\pi^{d+} - M$ *è il gruppo ereditato.*

(3) Siano π_1^s *e* π_2^s *piani di semi-traslazione isomorfi e derivati dai piani* π_1^d*,* π_2^d*, rispettivamente, allora* π_1^s *e* π_2^s *sono duali di piani di traslazione di ordine* $q^2 > 16$*. Allora* π_2^d *è isomorfo a* π_1^d*.*

Corollario 9.8. *Sia* π^t *un piano di traslazione di ordine* $q^2 > 16$ *e nucleo* $K \cong GF(q)$ *tale che l'intero gruppo di collineazioni consista del gruppo di traslazioni e del gruppo di omologie del nucleo. Allora, il numero dei piani di semi-traslazione che non sono isomorfi ottenuti derivando una rete del nucleo di un piano duale di* π^t *é* $(q^2 + 1)(q + 1)$*.*

Esiste un piano di traslazione π^t di ordine 17^2 che ha origine dagli ovoidi di Conway, Kleidman e Wilson. In [**24**], Charnes prova che il gruppo delle collineazioni di π^t consiste del gruppo di omologie del nucleo di ordine $q-1$ e del gruppo di traslazioni.

Nota 9.9. *Il piano di Charnes di ordine* 17^2 *produce a* $(17^2 + 1)(17 + 1)$ *piani di traslazione che non sono isomorfi.*

CAPITOLO 10

Reti di ordine q^2 e di grado $q+1$ che ammettono $PSL(4,q)_N$; una caratterizzazione delle reti derivabili

Nel Capitolo 8 abbiamo studiato la corrispondenza tra reti derivabili e piani proiettivi di dimensione tre. Abbiamo visto inoltre che il gruppo delle collineazioni della rete è isomorfo a $PSL(4,q)_N$ dove N é una retta dello spazio proiettivo.
In questo Capitolo, studieremo se l'esistenza del gruppo isomorfo a $PSL(4,q)_N$ comporta l'esistenza di una struttura derivabile sulla rete.
R.H. Bruck considera il caso in cui la rete di ordine n e grado k può essere estesa ad un piano affine (si veda Ostrom [**117**]). Se $n > (((n+1)-k)-1)^2$, Bruck dimostra che esiste al piú un piano che estende la rete. Se $n = (((n+1)-k)-1)^2$, Ostrom dimostra che ci sono al piú due piani che estendono la rete [**117**].
Per studiare le reti finite si ricorre spesso alla costruzione di uno spazio vettoriale che contenga la rete. Senza tale spazio vettoriale sarebbe difficile studiare i gruppi di collineazioni che operano sulla rete. Per esempio, Ch. Hering [**41**] ha considerato gruppi di elazione di reti contenute in uno spazio vettoriale.

In questo Capitolo, assumeremo solo che la rete ammetta un gruppo di collineazioni ismorfo a $PSL(4,q)_N$.

Il prossimo risultato sará usato spesso in seguito:

Proposizione 10.1. *Sia R una rete di ordine q^s e di grado $q+1$, $q \geq 2$. Sia G un gruppo non-banale di collineazioni di R che fissa ogni punto della retta all'infinito.*

(1) Se G fissa almeno due punti affini P, Q, con $P \neq Q$, allora G fissa almeno q^2 punti.

(2) Se G fissa esattamente t punti su qualche retta, allora G fissa t punti su ogni retta che G-invariante e il numero totale di punti fissati è t^2. Inoltre, G fissa t rette in ogni classe di parallelismo. Cioé G fissa esattamente $t(q+1)$ rette che sono fissate.

(3) Se $|Fix(G)| = q^2$, allora $Fix(G)$ è uno sottopiano affine di ordine q.

(4) Se G fissa t punti su qualche retta, allora $q \leq t \leq q^{s-1}$.

(5) Se $s = 2$ e G fissa almeno due punti affini, allora G fissa ogni punto di uno sottopiano di Baer.

Cenni della dimostrazione:

Dimostriamo la (1): supponiamo che G fissi P, Q con $P \neq Q$. Si consideri $\alpha_o Q$ in modo tale che P non sia un punto di $\alpha_o Q$. Allora, per $\beta \neq \alpha_o$, βP e $\alpha_o Q$ hanno un punto in comune. Quindi, G fissa almeno q punti su una qualche retta. Analogamente ogni retta fissata contiene almeno q punti fissati.
La (2) può essere ottenuta calcolando il numero di bandiere.
In Dembowski [**24**] (p. 138 duale di 3(c)), vengono fornite delle condizioni che implicano che una struttura finita di punti e rette deve essere un piano proiettivo. Se $t = q$, si puo usare Dembowski per costruire un sottopiano di Baer ed ottenere la (3).
Dimostriamo la (4): ogni punto di una retta di $Fix(G)$ che non giace in $Fix(G)$ non puó giacere su alcuna altra retta di $Fix(G)$. Allora, ci sono $t(q+1)(q^s - t)$ punti che non sono in $Fix(G)$ ma che sono su rette di $Fix(G)$. Ogni punto, naturalmente, è su una retta fissata e quindi ci sono esattamente $t(q+1)(q^s - t) + t^2$ punti su rette di $Fis(G)$. Questo numero di punti deve essere minore o uguale a q^{2s} che é il numero totale dei punti. Quindi $t(q+1)(q^s - t) + t^2 \leq q^{2s}$. Cioé $t^2 - t(q^s + q^{s-1}) + q^{2s-1} \geq 0$ e quindi $(t - q^s)(t - q^{s-1}) \geq 0$. Chiaramente, $t - q^s < 0$ perché G è non-banale. Pertanto $t \leq q^{s-1}$. Questo dimostra la (4).
Da (4) segue quindi la (5). Infatti, se $s = 2$ allora $q \leq t \leq q^{2s-1}$ e quindi $t = q$.

Un risultato simile al (10.4) può essere ottenuto anche per reti arbitrarie di grado $q+1$ e ordine q^s che ammettono un opportuno gruppo di collineazioni, come ad esempio $SL(s, q)$. In questo caso per $s = 2$ é utile il seguente risultato:

TEOREMA 10.2. (Galois).

Sia $m \neq 1$ il grado della rapresentazione non-banale di $PSL(2,q)$ come gruppo transitivo di permutazioni. Allora, $m \geq q+1$ tranne nei seguenti casi:

(1) $q = 2$ e $m = 2$

(2) $q = 3$ e $m = 3$

(3) $q = 5$ e $m = 5$

(4) $q = 7$ e $m = 7$

(5) $q = 9$ e $m = 6$

(6) $q = 11$ e $m = 11$.

Usando (10.2), è facile provare:

Proposizione 10.3. *Sia R una rete di grado $q+1$ e ordine q^2 che ammette $G \cong SL(2,q)$ come un gruppo di collineazione. Allora si ha uno dei seguenti casi: G agisce transitivamente su R_∞ (i punti all'infinito), G fissa ogni punto di R_∞, oppure G induce su R_∞ un gruppo isomorfo a $PSL(2,q)$ e si verifica uno dei casi eccezionali (1)–(6).*

In $PSL(4,q)_N$, ci sono due gruppi G_1 e G_2 isomorfi a $SL(2,q)$ tali che G_1G_2 è un prodotto centrale dove $G_1 \cap G_2 = Z$ é il centro di G_1 e di G_2. Quindi, $|Z| = 1$ o 2 a seconda che q sia pari o dispari, rispettivamente.

Usando (10.1) e (10.3), possiamo provare:

Teorema 10.4. (Johnson [**78**]).

(1) Sia R una rete di grado $q+1$ e ordine q^2 che ammetta un gruppo di collineazioni H isomorfo a $SL(2,q)$ che fissa ogni punto di R_∞ e un punto affine. Allora, ci sono $q+1$ sottopiani di Baer contenenti P, che coprono le rette che sono incidenti con P e fissati dai p-sottogruppi di Sylow di H, dove $p^r = q$. Inoltre, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(2) R è derivabile.

(3) Per ogni punto Q di R, la rete R ammette un gruppo di collineazione isomorfo a $SL(2,q)$ che fissa ogni punto di R_∞ e Q.

(4) R ammette un gruppo di collineazione G che agisce transitivamente sui punti affini e il cui stabilizzatore G_T contiene un sottogruppo che è isomorfo a $SL(2,q)$ che fissa ogni punto di R_∞.

Cenni della dimostrazione:

Sia S un p-sottogruppo di Sylow. Poiché S fissa P, allora S permuta i q^4-1 punti rimanenti. Quindi, S deve fissare un'altro punto affine T. Per (10.1), S deve fissare ogni punto di un sottopiano di Baer. Se due sottopiani di Baer che corrispondono a due p- sottogruppi di Sylow hanno almeno due punti in comune, allora H fissa ogni punto di un sottopiano di Baer di un'altra applicazione di (10.1). Inoltre, H deve agire semi-regolarmente sui $q(q-1)$ punti di una retta che non sono in $Fix(H)$. Ma allora l'ordine di H è $q(q^2-1)$ e questo non è possible. Questo prova la (1).
Le affermazioni rimanenti possono essere provate usando le stesse tecniche.

Teorema 10.5. (Johnson [**78**]).

Sia R una rete di grado $q+1$ e ordine q^2 che ammette un prodotto centrale G_1G_2 come gruppo di collineazioni con G_1 e G_2 isomorfi a $SL(2,q)$. Allora:

(1) G_1G_2 fissa un punto affine P.

(2) G_1 opera transitivamente su R e G_2 fissa ogni punto di R, o viceversa.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(3) R è derivabile.

(4) R ammette almeno q^4 gruppi di collineazioni prodotti centrali di due copie di $SL(2,q)$.

(5) R ammette un gruppo di collineazioni che agisce transitivamente sui punti affini ed ammette un gruppo di collineazioni ognuno dei quali é prodotto centrale di due copie di $SL(2,q)$.

Per applicare (10.5), si deve provare che il gruppo $PSL(4,q)_N$ contiene un sottogruppo T di ordine q^4 che agisce transitivamente sui punti affini. Diamo un breve cenno di questa dimostrazione: usando (10.5), si ha che G_1 agisce transitivamente su R_∞. Il gruppo T è normale e ogni p-sottogruppo di G fissa qualche punto di R_∞. Allora T fissa ogni punto di R_∞. Assumiamo che T non agisca transitivamente sui punti affini. Allora esiste un elemento non-banale g in T che fissa un punto affine. Per questioni di ordine, g deve fissare un ulteriore punto affine. Quindi, per (10.1), g deve fissare ogni punto di un sottopiano di Baer. Poiché T è abeliano elementare, T deve fissare Fix(g). Allora Fix(g) contiene q^2 punti. Quindi esiste un sottogruppo T* di T di ordine almeno q^2 che fissa un punto di Fix(g). Poiché l'ordine di T^* é p^s, allora T^* fissa almeno due punti affini. Quindi T^* fissa ogni punto di un sottopiano di Baer. Pertanto $p^s > q^2$ deve dividere $q(q-1)$. Assurdo.

Allora, abbiamo:

Teorema 10.6. (Johnson [**78**]).

Sia R una rete di grado $q+1$ e ordine q^2. Allora, R è una rete derivabile se e solo se R ammette un gruppo di collineazioni che è isomorfo a $PSL(4,q)_N$.

CAPITOLO 11

Piani proiettivi della classe II-1 di Lenz-Barlotti

Un piano proiettivo di classe Lenz-Barlotti II-1 ammette esattamente una (P, L)-transitività con P incidente L. Il primo esempio in questa classe é stato ottenuto per derivazione dal piano di Hughes e si chiama il piano di Ostrom-Rosati ([**116**], [**131**]). Unáltro esempio é stato ottenuto da Ostrom derivando i duali dei piani di Lüneburg-Tits ([**115**]). La proprietà più importante dei piani di Lüneburg-Tits è che questi piani ammettono un gruppo di elazioni con asse affine che fissa una rete del nucleo nei duali dei piani. Cioè, per un piano di ordine q^2, c'è un gruppo centrale con centro (∞) di ordine q^3 nell'estenzione proiettiva di ordine q^3. Questo gruppo é un gruppo di traslazioni del duale del piano e inoltre esso é un gruppo di collineazioni del piano di semi-traslazione contenente una (P, L)-transitività con P incidente L. Anche, Kantor [**104**] ha considerato piani di questo tipo.

In questo Capitolo, studieremo piani di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ che ammettono un gruppo di elazioni di ordine q che fissa un sottospazio di dimensione due. Usando questo metodo, sono stati trovati molti piani di classe II-1 (si veda [**74**]).

Teorema 11.1. Sia π un piano di traslazione di ordine q e nucleo $K \cong GF(q)$. Sia E un gruppo di elazioni con asse affine L che fissa un K-sottospazio π_o di dimensione due non è uguale a L. Allora,

(i) π_o è un sottopiano di Baer di π.

(ii) Sia N il numero dei K-sottospazi di dimensione due che hanno in comune le classi di parallelismo con π_o e che sono fissati da E. Allora, $N = 1, 2$ o $q + 1$.

Questo teorema può essere dimostrato usando i risultati di Foulser [**37**] nella struttura delle reti di traslazione definite da un sottopiano di Baer e il risultato di Biliotti-Lunardon [**15**] sul numero dei sottopiani di Baer nelle reti che sono K-sottospazi.

Definizione 11.2. *Un piano di traslazione π di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ si chiama un piano di tipo elazione i, per $i = 1, 2, q+1$, se e solo se π ammette un gruppo di elazioni E con asse affine di ordine q e un sottospazio di dimensione due fissato da E tale che $N = 1, 2$, o $q + 1$, rispettivamente, come in (11.1).*

È possibile dimostrare che:

Teorema 11.3. Sia un piano di traslazione di tipo elazione i. Allora, E fissa esattamente $i \cdot q + 1$ K-sottospazi di dimensione due.

Quando si considerano piani di semi-traslazione ottenuti per derivazione da reti del nucleo, occorre considerare i duali dei sottopiani di Baer nel piano duale del piano di traslazione.

Teorema 11.4. (Johnson [**74**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$. Si fissi un punto all'infinito (∞), e si estenda π ad un piano proiettivo π^+. Ora, si consideri il duale π^d eliminando (∞). Sia D una rete del nucleo in π^d costruita a partire dal duale π_o^d del sottopiano di Baer π_o(scegliendo le coordinate per il piano π^d all'interno di π_o^d). Sia S_{π_o} l'insieme delle rette di π_o che incidono (∞) (retta all'infinito inclusa). Allora

(1) S_{π_o} è l'insieme dei punti all'infinito di D nel duale del piano di traslazione π^d.

(2) Sia $x = 0$ la componente di π che è incidente con (∞) nell'estenzione proiettiva. Sia Z un qualunque K-sottospazio di dimensione uno di $x = 0$.

Allora, ci sono esattamente q K-sottospazi di dimensione due che come sottopiani di Baer contengono Z e che hanno S_{π_o} come insieme di rette incidenti (∞).

(3) Sia T gruppo delle traslazione di π con centro (∞). Allora, ogni sottopiano di Baer che contiene (∞) è in una T-orbita di lungezza q.

(4) L'insieme di $q^2(q+1)$ sottopiani di Baer nella rete del nucleo D di π^d è la T-immagine dell'insieme di $q(q+1)$ sottopiani costruiti come in (2).

In generale, abbiamo:

PROPOSIZIONE 11.5. *Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di elazioni G con asse L. Si estenda π al piano proiettivo π^+. Sia $l_{(\infty)}$ la retta all'infinito e sia $L \cap l_{(\infty)} = (\infty)$. Si costruisca il duale di π^+ e si elimini (∞) per costruire il piano π^d duale del piano π. Allora, G é un gruppo di traslazioni di π^d. Inoltre, se T è il sottogruppo di traslazione di π con centro (∞), allora $\langle G, T\rangle$ é un gruppo di traslazioni di π^d di ordine $q^2|G|$.*

Con riferimento ai piani di classe II-1 di Lenz-Barlotti, si ha il seguente teorema:

TEOREMA 11.6. (Johnson [**74**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine $q^2 > 16$ e nucleo $K \cong GF(q)$. Sia D una rete derivabile che è una rete del nucleo nel duale di π ottenuto eliminando il punto (∞) nell' estenzione proiettiva di π. Sia π^s il piano di semi-traslazione che è ottenuto da π^d derivando in D. Allora,

(1) π^s contiene un gruppo di (P, L)-transitività con P incidente L se e solo se esiste un gruppo di elazioni E di π di ordine q e centro (∞) che fissa un qualsiasi K-sottospazio di dimensione due che definisce la rete del nucleo D.

(2) Esistono $1, 2$ o $q+1$ reti derivabili che sono reti del nucleo che contengono K-sottospazi fissati da E e ottenuti dal duale dell'estensione proiettiva di π eliminando il centro di E quando π è di tipo elazione $1, 2$ o $(q+1)$, rispettivamente.

(3) Se π^s é un piano di semi-traslazione ottenuto per derivazione da una delle reti del nucleo in (2), allora π^s ́dotato di un gruppo di traslazioni di ordine q^3 che contene una $(P, L)-$transitivitá con P incidente L.

(4) Se π non é un piano su un semicorpo, allora ogni piano di semi-traslazione che é ottenuto come in (2) é della classe II-1 di Lenz-Barlotti.

(5) Se π è un piano di tipo elazione i e non è un piano su un semi-corpo, allora ci sono esattamente i piani proiettivi della classe II-1 di Lenz-Barlotti che possono essere costruiti per derivazione delle reti del nucleo.

(6) Viceversa, sia π^s un piano proiettivo della classe II-1 di Lenz-Barlotti derivato dal duale di un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ per derivazione della rete del nucleo. Allora esiste un gruppo di elazioni di ordine q del corrispondente piano di traslazione il quale fissa un K-sottospazio di dimensione due.

DEFINIZIONE 11.7. *Un piano proiettivo finito si chiama di tipo i se e solo se il piano è ottenuto per derivazione della rete del nucleo del duale di un piano di traslazione di tipo elazione i.*

Un piano di tipo i è di classe II-1 se e solo se il piano di traslazione non è un piano su un semi-corpo.

Consideriamo il gruppo

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & u & g(u) \\ 0 & 1 & 0 & f(u) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : u \in K \cong GF(q), f, g \text{ sono funzioni} \right\}.$$

Useremo per questo gruppo la notazione $(g(u), f(u))$. Co tale notazione, descriveremo i piani di tipo 1 , 2 e $(q+1)$.

Descrizione dei piani di tipo 1

1. Lüneburg-Tits $(u^2 - u, u)$, **l'ordine** $\mathbf{2}^{2(2e-1)}$ **per** $\sigma = \mathbf{2}^e$, $u \in GF(2^{2e-1})$ **(Ostrom [115])**

2. Kantor $(u^2 - u, u)$, **l'ordine** $3^{2(2e-1)}$, $\sigma = 3^e$, $u \in GF(3^e)$.**(si veda Capitolo 13).**

3. Biliotti - Menichetti, $(u^4 + u^2, u)$, **l'ordine 64,** $u \in GF(8)$ **(si veda [17]).**

4. Jha-Johnson, $(u + u^2, u)$, **l'ordine 64,** $u \in GF(8)$. **(si veda [74]).**

Per descrivere i piani di tipo 2, useremo il metodo di elevazione visto nel Capitolo 4.

Teorema 11.8. Sia π un piano non-Desarguesiano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$. Allora, ci sono almeno due piani proiettivi delle classe II-1 di Lenz-Barlotti di tipo 2 che possono essere costruiti con il metodo dell' elevazione.

Cenni della dimostrazione: si scelga una fibrazione per π definita da:

$$x = O, y = x \begin{bmatrix} u & v \\ m(u,v) & h(u,v) \end{bmatrix}$$

$u, v \in K$, dove m, h sono funzioni non biadditive da $K \times K$ a K. Le funzioni m, h sono biadditive se e solo se π é un piano su un semicorpo con $x = O$ come asse di elazioni. Cambiando le coordinate in modo tale che $x = O$ non sia asse di elazioni, allora le funzioni corrispondenti m *e* h non sono entrambe biadditive. Con l'elevazione, si costruisca il piano π^L di ordine q^4 e nucleo $F \cong GF(q^2)$. Allora, π^L non è un piano su un semicorpo ed ammette un gruppo di elazione di ordine q^2 che produce un piano di tipo 2 di elazione di traslazione. Allora, π^L produce a almeno due piani proiettivi di tipo 2. Chiaramente, é possibile far variare tale metodo per costruire piani non-isomorfi a partire dallo stesso piano di traslazione.
Si ricordi che un flock conico produce un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo che contiene $K \cong GF(q)$ dotato di un gruppo di elazioni E di ordine q tale che ogni orbita di componenti unione l'asse di E é un regolo in $PG(4, K)$. È facile provare che questo piano é di tipo $q + 1$.

Teorema 11.9. (Johnson [**74**]).

(i) Un flock conico è equivalente ad un piano di tipo $q + 1$.

(ii) Un flock conico che non è un flock su un semicorpo è equivalente a un piano proiettivo della classe II-1 di Lenz-Barlotti di tipo $q + 1$.

Per descrivere i piani di tipo $q+1$, possiamo discrivere i piani corrispondenti di tipo $(q + 1)$ di traslazione.

Descrizione dei piani di tipo q+1

1. I piani likeable di Kantor di ordine 5^{2r}(tipo I.2 nel Capitolo 7, si veda anche Kantor [104]).

2. I piani di tipo $q+1$ di s-inversione dai piani likeable di Kantor (si veda il Capitolo 7(7.8)).

3. I piani di Walker-Betten. (si veda [33] per i piani di tipo $q+1$), (tipo I.1 in Capitolo 7).

4. I piani dal flock di Fisher. I piani di tipo $q+1$ sono nuovi (tipo III-2 nel Capitolo 7).

5. Piani derivati di Barriga-Cohen-Ganley (si veda Kantor [103] e Payne [122] per i quadrangoli generalizzati). I piani di tipo $q+1$ sono nuovi (tipo III-1 nel Capitolo 7).

6. I piani di s-inversione dai piani di Barriga-Cohen-Ganley sono nuovi (si veda (7.9)).

7. I piani di s-inversione dei piani di Ganley su un semicorpo . I piani di tipo $q+1$ sono nuovi (tipo II-3 in Capitolo 7-si veda (7.8)).

CAPITOLO 12

Nidi di regoli

Ricordiamo che **una catena di regoli** in $PG(3,q)$, q dispari, é un insieme C di regoli tali che due regoli distinti hanno due rette in comune e ogni retta contenuta nell'unione di questi regoli giace in esattamente due regoli (si veda Bruen [**21**]).

Sia $C = \{R_i | i = 1, 2, \ldots, t\}$ una catena con t regoli.
Allora, $|\sum R_i| = (q+1) + (q-3) + (q-5) + \cdots + 2 = (q+3)(q+1)/4$.
Quindi, ci sono $(q+3)/2$ regoli nella catena.

Definizione 12.1. *(Baker e Ebert* [**7**], [**8**]*).*

Un t-nido é un insieme di regoli in $PG(3,q)$ tale che ogni retta nell'unione dei regoli é esattamente in due regoli.
La rete corrispondente é di grado $t(q+1)/2$. Una catena é un $(q+3)/2$-nido.

Bruen ha trovato un insieme di regoli nella fibrazione di Desargues in $PG(3,q)$ (cioé, una fibrazione regolare) tale che la rete corrispondente può essere coperta da una rete le cui componenti consistono dei $(q+1)/2$ sottopiani di Baer di ogni rete ottenuta da un regolo nel nido. Allora, ci sono $((q+1)/2)\,t$ nuove componenti che ricoprono il t-nido per $t = (q+3)/2$. Bruen ha costruito un nuovo piano sostituendo una catena nella fibrazione di Desargues con una nuova rete (questo piano ha ordine 25–si veda [**21**]).
Con questo metodo sono stati costruiti molti piani, per esempio: ci sono piani di ordine 11^2 dovuti a Korchmáros e Pellegrino [**108**] e a Capursi [**23**]. Si veda anche Larato e Raguso [**110**], Raguso [**129**]. Sono stati costruiti piani di ordine 49 (Korchmàros [**107**]) e ordine 81 (Abatangelo e Larato [**1**]). Ogni piano di questo tipo ammette reti derivabili e quindi nuovi piani possono essere ottenuti tramite derivazione.

Definizione 12.2. *Sia N una rete corrispondente ad un t-nido. Assumiamo che per ogni regolo del nido ci siano $(q+1)/2$ sottopiani di Baer incidenti* *il vettore nullo tali che la rete corrispondente N^* si puó sostituire a N. In questo caso, si dice che N é un nido-sostituibile.*

Tramite una rete che é nido sostituibile in un piano di traslazione può essere costruito un nuovo piano di traslazione.
Baker e Ebert [**7**], [**8**], e Ebert [**31**] hanno trovato tre famiglie di piani di traslazione di ordine q^2, q dispari, con nucleo $K \cong GF(q)$ costruendo t-nidi che sono nidi-sostituibili per $t = q-1$, q e $q+1$. Il metodo di Baker e Ebert consiste nel trovare un gruppo G di ordine $t(q+1)$ nel piano Desarguesiano π ed un suo opportuno sottopiano di Baer π_o tale che la rete N delle rette di $\pi_o G$ incidenti con zero in π é un nido-sostituibile, usando la rete N^* le cui componenti sono un'orbita di G. Baker e Ebert costruiscono piani di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ trovando un q-nido tale che la rete corrispondente é un nido-sostituible. In questo caso per trovare un nido corrispondente usano un gruppo abeliano G di ordine $q(q+1)$. Originalmente la costruzione di Baker e Ebert era per piani di ordine p^2, p primo. Payne ha esteso questa costruzione trovando anche che tali piani corrispondono a flock conici.

Teorema 12.3. (Baker, Ebert [**7**] per $q = p$, Payne [**123**], [**124**] per $q = p^r$ e (2)).

(1) Esiste una famiglia di piani di traslazione di ordine q^2, $q = p^r$ con p primo, che può essere costruita da un nido-sostituibile di un q-nido nel piano di Desargues.

(2) I piani di (1) corrispondono ai flock conici di Fisher (tipo III-2 in Capitolo 7).

Recentemente, Jha e Johnson hanno studiato piani di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ che ammettono un gruppo lineare di ordine $q(q+1)$ sperando di provare che i piani e i flock conici si corrispondano.

Teorema 12.4. (Jha, Johnson [**53**], Ebert [**30**] per parte di (2)).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2, $q = p^r$ dispari, e nucleo $K \cong GF(q)$. Assumiamo che 4 non divida $q+1$.

(1) Se π ammette un gruppo lineare G nel complemento di traslazione di ordine $q(q+1)$ ed un p-sottogruppo di Sylow E di ordine q che fissa un

sottospazio W con $W \neq Fix(E)$, allora π ammette un gruppo Abeliano nel complemento di traslazione di ordine $q(q+1)$.

(2) Nel caso (1), esiste un piano di Desargues Σ di ordine q^2 tale che π può essere costruito da Σ:

(i) Utilizzando un nido-sostituibile di un q-nido in Σ,

(ii) π é il derivato da un piano costruito da un nido-sostituibile di un q-nido in Σ.

Recentemente, Payne e Thas [**127**] hanno provato

Teorema 12.5. (Payne e Thas [**127**]).

Sia un flock conico C di ordine q, $q > 3$ dispari. Se l'insieme dei piani in $PG(3,q)$ che contengono le coniche ammette un sottoinsieme di almeno $(q-1)/2$ piani che contengono una retta, allora C é lineare *o* il flock di Fisher.

Corollario 12.6. *Sia π un piano di traslazione di ordine q^2, q dispari, $q \equiv 1 mod 4$, e nucleo $K \cong GF(q)$. Se π ammette un gruppo lineare di ordine $q(q+1)$ nel complemento delle traslazioni, allora π é equivalente al flock conico di Fisher.*

Dimostrazione: Per (12.4), il piano π o corrisponde ad un flock conico o ammette un gruppo di Baer di ordine q tale che il piano derivato corrisponde ad un flock conico.

Nel piani Desarguesiani da cui il piano π é costruito usando un nido-sostituibile, ci sono q regoli che hanno un retta in comune. I regoli nel q-nido sono $(q+1)/2$. Allora, ci sono $q-(q+1)/2 = (q-1)/2$ regoli nel piano di traslazione π che corrispondono ai regoli nel piano Desarguesiano Σ. Traducendo in flock conici, questo significa che ci sono $(q-1)/2$ piani in $PG(3,q)$ che hanno una retta in comune. Allora, il piano di traslazione deve essere un piano di Fisher. Anche Ebert [**30**] ha dimostrato che c'é solo un piano di traslazione (di Fisher) che può essere costruito dal piano di Desargues con un nido-sostituibile di un q-nido che ammette un gruppo di Abeliano di ordine $q(q+1)$.

Sia Σ un piano di Desargues di ordine q^2 e sia N una rete derivabile in Σ. Allora, esiste un'involuzione σ che fissa ogni punto di un sottopiano di Baer in N. Poiché Σ ammette anche un gruppo di omologia di ordine $q^2 - 1$, c'é un gruppo diedrale D di ordine $2(q+1)$ nel piano derivato Σ di Hall e per q pari, le cui involuzioni diventano elazioni. Anche il gruppo di elazione E di ordine q in Σ che fissa N diventa un gruppo di Baer in Σ. Allora, i piani di Hall di ordine q^2 pari ammettono un gruppo di Baer di ordine q e almeno $q+1$ elazioni non-triviali. Recentemente, Johnson ha dimostrato che anche i piani derivati di Fisher di ordine q^2 con $q \equiv 3 \bmod 4$ ammettono gruppi di questo tipo.

Teorema 12.7. (Johnson [**66**] per (i), Johnson [**72**] per (ii)).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 tale che il complemento alle traslazioni ammette un sottogruppo di Baer di ordine q ed almeno $q+1$ elazioni non-triviali.

(i) Se q é pari, allora π é un piano di Hall.

(ii) Se q é dispari, $q > 29$, e il nucleo é isomorfo a $GF(q)$, allora π é un piano di Hall o un piano derivato di Fisher.

Sarebbe interessante provare (12.7)(ii) senza l'ipotesi che il nucleo sia isomorfo a $GF(q)$.

é stato evidenziato che i piani di traslazione corrispondenti ai flock iperbolici ammettono un gruppo di omologia di ordine $q-1$. I piani di traslazione di Baker e Ebert che sono costruiti da un $(q-1)$-nido in un piano Desarguesiano ammettono un gruppo di omologia di ordine $(q-1)/2$ per q dispari. Anche questo gruppo determina metá di un regolo. Quindi, questi piani sono legati ai flock iperbolici. Recentemente, Johnson studiato piani di traslazione che possono essere costruiti da piani Desarguesiani con un nido-sostituibile di un $(q-1)$-nido.

Teorema 12.8. (Johnson [**70**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo contenente $K \cong GF(q)$. Se π ammette un gruppo ciclico di ordine q^2-1 nel complemento lineare di traslazione e questo gruppo ha un'orbita di componenti di lunghezza $(q-1)$ allora π é uno dei seguenti piani:

(i) Desarguesiano,

(ii) piano di Hall (il piano derivato dal piano di Desargues),

(iii) piano di traslazione su un quasicorpo associativo regolare,

(iv) piano derivato dal piano su un quasicorpo associativo regolare,

(v) piano di traslazione che può essere costruito da un nido-sostituibile di un $(q-1)$-nido in un piano di Desargues,

(vi) piano derivato da un piano costruito nel caso (v).

Inoltre, se il piano ha ordine pari, il piano é Desarguesiano o un piano di Hall.

Nel caso (v), il piano ammette un gruppo di omologie di ordine $(q-1)/2$.

Nel caso (iv), il piano ammette un gruppo di Baer di ordine $(q-1)/2$.

I piani di André di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ ammettono gruppi ciclici di omologia G_i di ordine $q+i$, $i = 1, 2$ tale che l'asse di G_i é il co-asse di G_j per $i \neq j$.

Ebert ha costruito una famiglia di piani di traslazione usando un nido-sostituibile di un $(q+1)$-nido in un piano di Desargues. Questi piani di ordine q^2 ammettono gruppi di omologia del tipo citato sopra.
Inoltre, i piani sui nearfields irregolari di ordine 5^2 e 7^2 ed i piani di Rao-Rodabaugh-Wilke-Zemmer costruiti da questi piani ammettono gruppi di omologie di ordine 6 e 8 rispettivamente.

Consideriamo il seguente problema:

Determinare i piani di traslazione di ordine q^n e nucleo contenente $K \cong GF(q)$ che ammettono due gruppi ciclici di omologia di ordine $(q^n - 1)/(q - 1)$.

Nel caso per $n = 2$, abbiamo:

Teorema 12.9. (Johnson, Pomareda [**96**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo contenente $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo G nel complemento di traslazione tale che sia il prodotto diretto di due gruppi ciclici di omologia di ordine $q+1$ con assi affini. Allora, si ha una delle seguenti situazioni:

(1) π é un piano di André,

(2) q é dispari ed é costruito da un piano di Desargues Σ con un nido-sostituibile di un $(q+1)$-nido,

(3) q é dispari ed é costruito da un piano di Desargues Σ combinando un nido-sostituibile di un $(q+1)$-nido con la sostituzione delle reti di André in Σ.

Corollario 12.10. *I piani sui quasicorpi associativi irregolari di ordine* 5^2, 7^2 *possono essere costruiti con un nido-sostituibile di un 6-(8-)nido nel piano di Desargues di ordine* $5^2, 7^2$, *rispettivamente. Anche i piani di Rao-Rodabaugh-Wilke-Zemmer di ordine* 5^2 *e* 7^2 *sono derivati da piani su quasicorpi associativi irregolari.*

Pabst e Sherk [**121**] hanno costruito una famiglia di piani di traslazione di ordine q^2 le cui fibrazioni contengono un insieme di $(q-1)$ regoli. Con il risultato (12.10), non é difficile provare che questi piani e quelli di Ebert sono gli stessi. Nel caso di ordine q^n, $n > 2$, e nucleo contenente $K \cong GF(q)$ la situazione é piu regolare.

Teorema 12.11. (Johnson, Pomareda [**96**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^n e nucleo contenente $K \cong GF(q)$. Assumiamo che π ammetta un gruppo G nel complemento di traslazione che é il prodotto diretto di due gruppi ciclici di omologia di ordine $(q^n - 1)/(q-1)$. Se $n > 2$, allora π é un piano di André.

CAPITOLO 13

Ovoidi e piani di traslazione

Ricordiamo che un ovoide in un $\Omega^+(2n, q)$-spazio é un insieme di $q^{2n-1} + 1$ punti (sottospazi di dimensione uno) della quadrica iperbolica Q tale che non esistono due punti incidenti una retta di Q.
Un ovoide in un $\Omega(2n-1, q)$-spazio é un insieme che diventa un ovoide quando si considera lo spazio $\Omega(2n-1, q)$ come un sottospazio di un $\Omega^+(2n, q)$-spazio.
Sia $n = 4$ e O un ovoide di $q^3 + 1$ punti in un $\Omega^+(8, q)$-spazio o un $\Omega(7, q)$-spazio. Se Q é la quadrica associata e P é un punto di $Q-O$, sia $P^\perp$ lo spazio polare di P. Allora, $P^\perp/P$ é un $\Omega^+(, 6, q)$ o $\Omega(5, q)$-spazio rispettivamente.

Proposizione 13.1. *$\{z+ < P >: z \in P^\perp \cap O\}$ é un ovoide di q^2+1 punti in $P^\perp/P$.*

Nel Capitolo 2, si é parlato della quadrica di Klein e dei piani di traslazione che possono essere associati ad ovoidi nei $\Omega^+(6, q)$-spazi. Allora, dagli ovoidi in $\Omega^+(8, q)$ o $\Omega(7, q)$-spazi, possiamo costruire piani di traslazione di ordine q^2 con nucleo contenente $K \cong GF(q)$. Verrá usata la notazione della Capitolo 2 per la quadrica di Klein e per le fibrazioni che possono essere ottenute da ovoidi nei $\Omega^+(6, q)$-spazi.

Nel 1982 Kantor [**105**] ha studiato piani di traslazione che possono essere ottenuti da ovoidi noti. Successivamente, Conway, Kleidman, e Wilson hanno trovato alcune nuove classi di ovoidi, si veda anche Charnes [**24**] e Capitolo 9). Recentemente, Johnson ha studiato i piani di Kantor ottenuti da ovoidi unitari, e da ovoidi di Ree-Tits.

Nel caso di un ovoide unitario, Kantor ha dimostrato il seguente:

Teorema 13.2. (Kantor [**105**], Capitolo 4).

Sia $V = \{m = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & a & \beta^* \\ b & \gamma^* & \alpha^* \end{bmatrix} | \alpha, \beta, \gamma \in \ L \cong GF(q^2);\ a, b, c \ \in \ K \cong GF(q)$, $K \subset L$ con $a + T(\alpha) = 0\}$ tale che $T(\alpha) = \alpha + \alpha^q$ e $\delta^* = \delta^q$ per $\delta \in \ L$.

Definito $Q_8 : V \to K$ come $Q_8(m) = \alpha^2 + \alpha\ \alpha^* + \alpha^{*2} + T(\beta\ \gamma) + bc$.

(1) V é un $\Omega^+(8, q)$-spazio se e solo se $q \equiv 2\ mod\ 3$.

(2) Se $q \equiv 0\ mod\ 3$, allora Rad $V = \langle I \rangle$ (le K-matrici scalari).

(3) Sia $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e sia G il gruppo $GU(3, q)$ delle matrici non-singolari A su L tali che $J^{-1}A\ J = (A^*)^t$ dove se $A = [a_{ij}]$ allora $A^* = [a_{ij}^q]$ e $(A^*)^t$ significa la matrice trasposta di A^*. Allora, G agisce su V definito in (1) via coniugio, inducendovi $PGU(3, q)$.

Inoltre, G fissa Q_8.

(4) $\Omega = \{\langle Z \rangle \mid O \neq Z \ \in \ V,\ Z^2 = O\}$ é un ovoide se $q \equiv 2\ mod\ 3$ e proietta un ovoide di $V/\langle I \rangle$ se $q \equiv 0 \mod 3$.

Sia Y un punto singolare rispetto a Q_8 che non é in Ω e si consideri $Y^\perp/Y$.
Se $q \equiv 2\ mod\ 3$, allora $Y^\perp/Y$ é un $\Omega^+(6, q)$-spazio.
Se $q \equiv 0\ mod\ 3$, allora $(Y^\perp/\langle I \rangle)/(\langle Y \rangle/\langle I \rangle)$ é un $\Omega(5, q)$-spazio.

Alcuni dei piani di traslazione che sono associati a $Y^\perp/Y$ sono noti. Si possono scegliere come rappresentanti delle G-orbite dei punti singolari. Kantor dimostra che ci sono due (una) orbite di punti singolari che non sono in Ω quando $q \equiv 2\ mod 3$ ($q \equiv 0 \mod 3$).

Se $q \equiv 2 \bmod 3$, i rappresentanti sono $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $Y' = Diag(w, 1, w^q)$ dove $w^3 = 1 \neq w$. Se $q \equiv 0 \mod 3$, allora Y é un rappresentante.

Teorema 13.3. (Kantor [**105**], Johnson [**74**] (3.2)).

(1) Se $q \equiv 2\ mod\ 3$ allora il piano di traslazione che é associato a Y é il piano di Walker se q é dispari, e quello di Betten se q é pari. (Questi piani

corrispondono ai flock conici di tipo I-1 definiti nel Capitolo 7).

(2) Se $q \equiv 0 \ mod \ 3$, allora il piano di traslazione associato a Y é un piano su un semicorpo di Knuth (questi piani corrispondono ai flock conici di tipo II-2 defnti nel Capitolo 7).

Il piano di traslazione di ordine q^2 che può essere ottenuto da Y' ammette un gruppo di ordine q^2-1 che fissa due componenti e agisce transitivamente sulle altre componenti.

Teorema 13.4. (Johnson [**74**](3.6)).

Una fibrazione per un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ associato a Y' é:

(1) se q é pari e $q \equiv 2 \ mod \ 3$: $x = O$, $y = x \begin{bmatrix} u & t \\ t^3+u^2t+t^2u & u^3+t^3 \end{bmatrix}$ con $u, t \in \ K$.

Il piano ammette il gruppo di collineazioni G di ordine q^2-1, dove:

$$G = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{u,t}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & t \\ 0 & 0 & t & u+t \end{bmatrix} |u, t \ \in \ K \cong GF(q), \, (u,t) \neq (0,0)\}, \text{e}$$

dove $\delta_{u,t} = \mathbf{det} \begin{bmatrix} u & t \\ t & u+t \end{bmatrix}$,

(2) se q é dispari e $q \equiv 2 \ mod \ 3$,

$x = 0$, $y = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{u,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & t \\ t\gamma^3 & u+t\gamma^2(-3/\gamma)^{1/2} \end{bmatrix}$ dove γ non é un quadrato in K, $u, t \ \in \ K$, e dove $\delta_{u,t} = \det \begin{bmatrix} u & t \\ t\gamma^3 & u+t\gamma^2(-3/\gamma)^{1/2} \end{bmatrix}$.

Il piano ammette il gruppo di collineazioni G di ordine q^2-1 dove

$$G = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{u,t}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & t \\ 0 & 0 & t\gamma^3 & u + t\gamma^2(-3/\gamma)^{1/2} \end{bmatrix} |u, t \in K, (u, t) \neq (0, 0)\}.$$

Cenni della dimostrazione:

(i) Possiamo scegliere $\{1, t\}$ come K-base per L tale che $t^2 = t + 1$, $t^3 = 1$, e $t^q = t + 1$. Per Kantor [**105**], é possibile identificare $Y'^{\perp}/Y'$ con $K \oplus L \oplus L \oplus K$ con la quadrica Q^* tale che $Q^*(b, \beta, \gamma, c) = T(\beta\gamma) + bc$ per $b, c \in K$ e $\beta, \gamma \in L$. Inolte, l'ovoide di (13.2) (4) diventa:

$$\langle (0, 0, 0, 1) \rangle \cup \{ \langle (1, \sigma^{q+1}\sigma\ t, \sigma^q, (\sigma^{q+1})^2) \rangle | \sigma \in L \} (\text{ per } w = t).$$

Si rappresentia $0 \oplus L \oplus 0 \oplus 0$ con la base $\{1, t\}$ e $0 \oplus 0 \oplus L \oplus 0$ con la base $\{1, t+1\}$. Con questa rappresentazione, la quadrica ha la forma data in Capitolo 2 per la quadrica di Klein e l'ovoide diventa: $\langle 0, 0, 0, 0, 0, 1 \rangle \cup \{ \langle 1, ((\sigma_1 + \sigma_2)\sigma_1 + \sigma_2^2)\sigma_2, ((\sigma_1 + \sigma_2)\sigma_1 + \sigma_2^2)(\alpha_1 + \sigma_2), \sigma_1, \sigma_2, \delta) \rangle | \sigma_i \in K, i = 1, 2$ per un opportuno elemento $\delta\}$. Si applica la corrispondenza $(1, a, b, c, d, \delta) \to y = x \begin{bmatrix} -c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ (si veda Capitolo 2), ottenendo la fibrazione

$$x = 0, y = x \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_2\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_2^3 & \sigma_1^3 + \sigma_2^3 \end{bmatrix}.$$

Per Kantor [**105**](Capitolo 4 e (4.8)), anche per $q \equiv 0 \bmod 3$, c'é un punto $N = diag(\lambda, 0, \lambda^q)$, con $\lambda \in L^*$ e $T(\lambda) = 0$, tale che $N^{\perp}/\langle I \rangle$ é un $\Omega^+(6, q)$ spazio.

Teorema 13.5. (Johnson [**74**] (3.13)).

Una fibrazione per un piano di ordine 3^{2r} ottenuto dal punto N é:

$$x = 0, \qquad y = x \begin{bmatrix} u & t \\ t\gamma(u^2 - t^2\gamma) & u(u^2 - t^2\gamma) \end{bmatrix}$$

dove γ non é un quadrato e con $u, t \in K \cong GF(3^r)$

Questo piano ammette il gruppo G di ordine $3^{2r} - 1$:

$$G = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (u^2 - t^2\gamma)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & t \\ 0 & 0 & t\gamma & u \end{bmatrix} \mid u, t \in K, (u, t) \neq (0, 0)\}.$$

Inoltre, Kantor considera i piani che possono essere ottenuti da ovoidi di Ree-Tits. Per esempio c'é un piano di traslazione di tipo elazione (1).

CAPITOLO 14

j-piani e fibrazioni parziali che sono massimali in $PG(3,q)$

Nel Capitolo 13, abbiamo visto che esiste una classe di piani di traslazione di ordine q^2 che ammettono un gruppo di ordine q^2-1 avente un'orbita di componenti di lunghezza q^2-1. Questi piani ammettono anche un gruppo ciclico di omologie di ordine $q+1$. Per Jha-Johnson [**47**], ogni orbita di componenti di questo gruppo forma un regolo nello spazio proiettivo associato. C'é anche un gruppo di omologie di ordine $q-1$ che produce a reti derivabili che hanno due rette in comune. Comunque, questo gruppo non produce mai regoli nel modo descritto nel Capitolo 2.

Definizione 14.1. *Sia $K \cong GF(q)$ e sia x^2+xg-f un polinomio irriducibile su K per $g,f \in K$.*

Allora, $\left\{ \begin{bmatrix} u & t \\ tf & u+tg \end{bmatrix} | u,t \in K \right\}$ *é un campo di ordine q^2.*

Sia $\delta_{u,t} = \det \begin{bmatrix} u & t \\ tf & u+tg \end{bmatrix}$.

Sia $G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{u,t}^{j-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & t \\ 0 & 0 & tf & u+tg \end{bmatrix} | u,t \in K,\ (u,t) \neq (0,0 \right\rangle$ *dove j é un fissato numero intero. Allora, G é un gruppo ciclico di ordine q^2-1.*

Sia $V = \{(x_1,x_2,y_1,y_2)|x_i,y_i \in K,\ i=1,2\}$, $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $O=(0,0)$. Allora, le equazioni $x=0$, $y=0$, $(y=x)g$ con $g \in G$ definisce una fibrazione se e solo se $\delta_{u,t}^{j+1} - \delta_{u,t}^{j}(u+tg)+(i-u) \neq 0$ per ogni $u,t \in K$ con $(u,t) \neq (0,0)$.

Se una fibrazione é definita da f, g e j, il piano di traslazione corrispondente si chiama j-piano.

I piani di Kantor in Capitolo 13 sono j-piani per $j = 1$, i piani di Desargues sono j-piani per $j = 0$. Usando polinomi di permutazione, possiamo costruire alcuni esempi delle classi di j-piani che includono quelli di Kantor per $j = 1$.

Teorema 14.2. (Johnson, Pomareda, Wilke [**97**] (2.2), (2.3), (2.4)).

Sia π un j-piano di ordine q^2 e nucleo contenente $K \cong GF(q)$.

Allora si hanno i seguenti casi:

(i) π ammette un gruppo ciclico di omologie H_y di ordine $q+1$. Le orbite di componenti sotto H_y sono regoli nello spazio proiettivo associato $PG(3, K)$,

(ii) π ammette un gruppo ciclio di omologie H_x di ordine $q-1$. Ogni orbita di componenti puó essere rappresentata nella forma $\{y = x \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{2j+1} \end{bmatrix} \mid u \in K^*\}$.

(iii) Se $2j + 1|q$, allora la rete che é definita dal gruppo H_x in (ii) unione l'asse e il coasse di H_x é una rete derivabile. Inoltre, il piano di traslazione derivato ha ordine q^2 e il suo nucleo é il campo fissato dall' automorfismo $x \to x^{2j+1}$.

Ricordiamo che una fibrazione parziale F in $PG(3, q)$ é massimale se e solo se non c'é una fibrazione parziale F^* in $PG(3, q)$ contenente F, ed $F \neq F^*$.

Teorema 14.3. (Johnson [**73**]).

Ogni j-piano di ordine q^2 definisce una fibrazione parziale massimale in $PG(3, q)$ di grado $q^2 - q + 2$. Questa fibrazione parziale può essere estesa ad un piano affine se e solo se $2j + 1|q$.

Queste fibrazioni parziali consistono di due sottopiani della rete in (14.2)(ii) e delle componenti che non sono contenute in tale rete (si veda Jungnickel [**99**]). Per la costruzione di j-piani occorre il seguente:

Teorema 14.4. (Johnson, Pomareda, Wilke [**97**] (3.1)).

Sia $x^2 + xg - f$ un polinomio irriducible su $K \cong GF(q)$.

Sia $\delta_{u,t} = \det \begin{bmatrix} u & t \\ tf & u+tg \end{bmatrix}$.

Allora, esiste un piano associato che é un j-piano se e solo se $\phi_j(u,t) = \delta^j_{u,t}$ tf é un polinomio di permutazione su K per ogni $u \in K$.

Per costruire i piani di Kantor del Capitolo 13, occorrono alcuni risultati di Dickson [**29**].

Teorema 14.5. (Dickson [**29**] p. 63)

(i) Se $d|p^r - 1$ e $\nu \neq d^s$ in $GF(p^n)$, allora $\phi(\alpha) = \alpha(\alpha^d - \nu)^{(p^r-1)/d}$ é un polinomio di permutazione per ogni $r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

(ii) Un polinomio di permutazione di grado 3 può essere ridotto ad α^3, quando $p^n = 3^n$ o $3m + 2$, e ad $\alpha^3 = \beta\alpha$, β non quadrato, quando $p^n = 3^n$.

Non é difficile usare la (14.5) per dimostrare che i piani della Capitolo 13 sono 1-piani.

Per esempio, quando $q = 3^r$, possiamo prendere $g = 0$ ed ottenere il polinomio $(u^2 - t^2 f)tf$. Per la (14.5)(ii), se f non é un quadrato, abbiamo ottenuto un 1-piano per ogni elemento f.

Usando (14.5)(i), possiamo provare:

Teorema 14.6. (Johnson, Pomareda, Wilke [**97**] (3.5)).

Sia $q = p^n$, p dispari. Allora, esiste un $(p^t - 1)/2$ - piano di ordine q^2 per ogni numero intero $t = 0, 1, 2, \ldots, n$ ottenuto prendendo $(f, g) = (\rho^{2s+1}, 0)$ per ogni ρ in $GF(q)^*$.

Usando questa idea si possono ottenere altri esempi di j-piani. Per esempio ci sono 2-piani di ordine 5^{2n} con $(f, g) = (\rho^{2s+1}, 0)$ e 2-piani di ordine $p^n \equiv \pm 2 \mod 5$ con $(f, g) = (-1/5g^2, g)$.

Teorema 14.7. (Johnson, Pomareda, Wilke [**97**] (4.3)).

Sia π un j-piano di ordine q^2, q dispari e $j \neq 0$. Allora,

(i) ci sono $2^{(q-1)/2} - 1$ fibrazioni parziali massimali in $PG(3, q)$ di grado $q^2 - q + 1$. Una fibrazione parziale di questo tipo può essere estesa a un piano affine se e solo se $2j + 1|q$.

(ii) Se $2j + 1|q$ allora ci sono $2^{(q-1)/2} - 1$ piani di traslazione di ordine q^2 il cui nucleo é il campo fissato dall' automorfismo $x \to x^{2j+1}$ in K.

Sia Σ il piano di Desargues di ordine q^2, q dispari. Allora, un piano su un quasicorpo associativo regolare può essere costruito sostituendo $(q - 1)/2$ reti di André $N_\delta = \{y = xm|m^{q+1} = \delta : \delta$ non quadrato in $K\}$.

Definizione 14.8. *Sia π un j-piano. Esistono $q - 1$ regoli*

$$R_\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta^j_{u,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & s \\ sf & v + sg \end{bmatrix} |\delta_{v,s} = \delta_{u,t} = \beta \right\}.$$

Un piano di traslazione π si chiama un piano su un pseudo quasicorpo associativo se e solo se π può essere ottenuto da un j-piano di ordine dispari con la sostituzione delle $(q - 1)/2$ reti R_β, per ogni β non quadrato.

Teorema 14.9. (Johnson, Pomareda, Wilke [**97**] (4.2)).

Un piano π su un pseudo quasicorpo associativo di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ ammette gruppi ciclici di omologie di ordine $q-1$ e $q+1$ ed ammette un gruppo di collineazione di ordine $q^2 - 1$.

Se $(f, g) = (f, 0)$ allora, il gruppo é ciclico e il piano é un $((q-1)/2+j)$-piano.

Teorema 14.10. Abbiamo costruito:

(i) 1-piani di ordine 3^{2r} e di ordine p^{2r}, p dispari e $p^r \equiv 2 \bmod 3$,

(ii) 2-piani di ordine 5^{2r} e di ordine p^{2r}, p dispari e $p^r \equiv \pm 2 \bmod 5$,

(iii) $(p^t - 1)/2$- piani di ordine p^{2r}, p dispari, $t = 0, 1, 2, \ldots, r$.

Allora, con (14.9), abbiamo le seguenti classi addizionali:

(i)' $((q-1)/2+1)$ -piani di ordine 3^{2r}, e di ordine p^{2r}, p dispari e $p^r \equiv 2$ mod 3,

(ii)' $(q-1)/2+2)$-piani di ordine 5^{2r} e di ordine p^{2r}, p dispari e $p^r \equiv \pm 2$ mod 5,

(iii)' $((q-1)/2+(p^t-1)/2)$-piani di ordine p^{3r} , p dispari, $t = 0, 1, 2, \ldots, r$.

Molti j-piani sono stati trovati usando il computer (si veda [**97**], Capitolo 5).

CAPITOLO 15

Gruppi massimali di Baer

Diversi studi sono stati fatti sui gruppi di collineazioni di piani di traslazione.

Teorema 15.1. Hering-Ostrom (1972 [**41**], [**116**]).

Sia π un piano finito di traslazione del ordine p^r dove p é un primo e sia G un gruppo di collineazioni contenuto nel complemento lineare e generato da elazioni affini.

Allora, abbiamo le seguenti possibilitá:

(1) G é Abeliano elementare,

(2) $p = 2$ ed esiste un sottogruppo normale H di G tale che $|H|$ é dispari e $|G/H| = 2$,

(3) G é isomorfo a $SL(2, p^s)$ con $s|r$,

(4) $p = 2$ e G é isomorfo a $S_z(2^{2s+1})$,

(5) $p = 3$ e G é isomorfo a $SL(2, 5)$.

Foulser ha provato che molte di queste conclusioni si ottengono anche sotto le ipotesi che il gruppo sia generato da i p-gruppi di Baer. Anche per $p \neq 2, 3$, c'é una rete di grado $p^{r/2} + 1$ fissata dal gruppo che contiene tutti i sottopiani di Baer fissati dalle p-collineazioni di Baer.

Teorema 15.2. (Foulser [**38**] (l972).

Sia π un piano di traslazione di ordine p^r, r pari, e sia G un gruppo di collineazioni nel complemento di traslazione che é generato dalle p-collineazioni di Baer, $p \neq 2, 3$.

Allora,

(1) G puó essere uno dei gruppi descritti in Hering-Ostrom.

(2) Siano π_o, π_1 sottopiani di Baer tali che ogni punto di π_i é fissato da un p-gruppo di Baer G_i, per $i = 0, 1$. Allora π_o e π_1 sono nella stessa rete di grado $p^{r/2} + 1$.

Nei piani di semi-traslazione non esiste alcuna incompatibilità tra elazioni affini e p-gruppi di Baer. Comunque, in piani di traslazione del ordine dispari, Foulser ha provato:

Teorema 15.3. (Foulser [**38**]).

Gruppi di elazioni e p-gruppi di Baer non possono coesistere in piani di traslazione del ordine dispari.

Naturalmente, per $p = 2$ involuzioni di Baer ed elazioni possono coesistere.

Teorema 15.4. (Jha-Johnson [**51**], [**52**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine 2^{2r} che ammette elazioni affini e involuzioni di Baer.

Sia E un gruppo di elazioni e B un 2-gruppo di Baer.

(1) se $|B| \geq 2q^{1/2}$ allora $|E| \leq 2$,

(2) se E e B si normalizzano e se $|E| = q$ allora $|B| \leq 2$.

Un problema interessante é classificare i piani di traslazione finiti che ammettono almeno due grandi gruppi di collineazioni centrali o due grandi gruppi di Baer. Relativamente al secondo caso, si ha :

Teorema 15.5. (Jha-Johnson [**49**], [**50**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine p^r che ammette almeno due p-gruppi di Baer di ordine $\geq 2p^{r/2}$. Allora π é un piano di Hall o un piano di ordine 16.

Sia il gruppo generato da elazioni il gruppo $SL(2, p^s)$ o $S_z(2^{2a+1})$ dove p^s o $2^{2a+1} \geq 2p^{r/2}$. Per $SL(2, p^s)$ si ha che $s|r$, $s \geq r/2 + 1$ e il piano é Desarguesiano. Per $S_z(2^{2a+1})$ c'é un sottopiano di Lüneburg-Tits di ordine 2^{2s} e le altre condizioni implicano che il piano π sia un piano di Lüneburg-Tits.
Un gruppo di Baer in un piano di traslazione di ordine q^2 ha ordine divisibile per $q(q-1)$. Se consideriamo gruppi generati da due grandi p'-gruppi di Baer, l'ordine del gruppo é diviso da $q-1$. Una domanda naturale é quanto grande deve essere il gruppo per ottenere una classificazione?
Si noti che é facile costruire con la derivazione un piano di traslazione che ammette almeno un gruppo di ordine $q-1$.
Inolte, e un piano di traslazione di ordine p^r ammette un p'-gruppo di Baer B, allora esistono due sottopiani di Baer nella stessa rete di grado $p^{r/2}+1$ che sono fissati da B. Per uno di questi, ogni punto é fissato da B e si chiama sottopiano Fix(B) l'altro si chiama coFix(B). Quando il nucleo é isomorfo a $GF(q)$ e $|B| > 2$, c'é anche un gruppo B^* di Baer in BK^* dove K^* indica il gruppo di omologie di ordine $q-1$ con asse la retta all'infinito, in questo caso $|B^*| = |B|$ e Fix$(B^{*)}$ =coFix(B), Fix(B) =coFix(B^*).
La situazione descritta sopra non dá molte informazioni, quindi, consideremo il caso in cui esistono almeno due grande p'-gruppi di Baer B, B^* con $\{$ Fix(B), coFix$(B)\} \neq \{$Fix (B^*), coFix $(B^*)\}$.
Per capire cosa vuol dire "ordine grande", ricordiamo il metodo per la costruzione di piani dovuto a Hiramine, Matsumoto e Oyama, generalizzato da Johnson, e che si chiama "elevazione" o "lifting" (si veda [**80**]). Con questo metodo, un piano di traslazione π di ordine q^2 e nucleo $GF(q)$ produce a un piano di traslazione π^L di ordine q^4 e nucleo $GF(q^2)$. π^L ammette sempre un gruppo di elazioni E di ordine q^2 e gruppo di Baer B di ordine $q+1$ dove $[E, B] \neq 1$ (cioé E B non si centralizzano). Allora, ci sono molti gruppi di Baer ($2q^2$ di questi) di ordine $q+1$. Questi piani sono sempre presenti e quindi per avere una quasi-classificazione dei piani di traslazione π che ammettono due p'-gruppi di Baer B, dobbiamo considerare il caso in cui $|B| > o(\pi)^{1/2} + 1$.
Consideriamo i piani di traslazione di ordine q^2 che ammettono due gruppi di Baer (cioé B-gruppi) di ordine $q-1$ (si veda [**14**]). Data una quadrica iperbolica in $PG(3, q)$, un flock parziale F é un insieme di t, $1 \leq t \leq q+1$, coniche non-banali che hanno a due a due intersezione identica. Johnson ha dimostrato nel l988 ([**67**], [**83**]) che c'é una corrispondenza tra piani di traslazione di ordine q^2 con nucleo $GF(q)$ che ammettono un gruppo B di

Baer di ordine $q-1$ e i flocks parziali iperbolici con $t=q$ coniche non-banali. —'E interessante il caso in cui se il gruppo del flock parziale é un quoziente del gruppo del piano di traslazione. Affinché questo accada il gruppo completo del piano deve normalizzare il gruppo B di Baer. Allora, se questo non é il caso, ci sono almeno due gruppi di Baer. Quindi, per studiare i gruppi di un flock parziale, dobbiamo studiare i piani di traslazione di ordine q^2 e nucleo $GF(q)$ che ammettono almeno due gruppi di Baer di ordine $q-1$. Senza qualche ulteriore ipotesi, non ci sono molti strumenti per affrontare il problema nei piani di traslazione. In questo caso si suppone che tutti i gruppi di Baer B hanno i loro sottospazi Fix(B) e coFix(B) nella stessa rete di grado $q+1$.

Teorema 15.6. (Biliotti-Johnson [**14**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 che ammette almeno due gruppi di Baer di ordine $q-1$. Se i gruppi fissano puntualmente la retta all'infinito, allora si ha uno dei seguenti casi:

(1) π é un piano di Hall o ha ordine 9 ed é Desarguesiano.

(2) π può essere derivato da un piano su un semicorpo di ordine q^2 con una struttura di coordinate contenente un nucleo medio isomorfo a $GF(q)$.

In questo caso si dice che π é un piano generalizzato di Hall di tipo uno.

Il gruppo generato dai gruppi di Baer é il prodotto di un gruppo di Baer di ordine q con un gruppo di Baer di ordine $q-1$, inoltre per tutti i gruppi di Baer B_i, Fix$(B_i)=$ Fix(B_j) ma coFix$(B_i)\neq$coFix(B_j) per $i\neq j$, $i,j=1,2,\ldots,q$.

(3) π può essere derivato da un piano su un semicorpo di ordine q^2 con una stuttura di coordinate contenente un nucleo destro isomorfo a $GF(q)$.

In tal caso si dice che π é un piano generalizzato di Hal di tipo due. In particolare, per i gruppi di Baer B_i, $i=1,2,\ldots,q$, coFix$(B_i)=$ coFix(B_j) ma Fix$(B_i)\neq$Fix(B_j) per $i\neq,j$, $i,j=1,2,\ldots,q$ e il gruppo generato ha la forma data in (2).

(4) Se il nucleo é isomorfo a $GF(q)$, $q\neq 9$, allora nei casi (2), (3), i piani sono piani di Hall.

Esistono molti esempi di piani generalizzati di Hall e probilmente una loro classificazione non é possibile. SE esistono due gruppi di Baer di ordine $q-1$ e i loro sottospazi associati sono nella stessa rete, é stato ottenuto un buon teorema a riguardo. Se, invece, i sottospazi non sono nella stessa rete, il problema é molto difficile. Per questa ragione ed per la connessione con flocks é stata fatta un'ipotesi sul nucleo.

Teorema 15.7. (Johnson [**67**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $GF(q)$ dotato di due gruppi di Baer B_1, B_2 di ordine $q-1$.. Allora π é uno spazio vettoriale e sia L un sottospazio di dimensione due, allora $B_1 L \cup \{\mathrm{Fix}(B_1), \mathrm{coFix}(B_1)\}$ é un regolo in $PG(3,q)$.

Con questo risultato, é possibile dimostrare:

Teorema 15.8. (Biliotti-Johnson [**14**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$. Se π ammette almeno due gruppi di Baer di ordine $q-1$ nel complemento di traslazione, allora abbiamo una delle seguenti possibilità:

(i) π é un piano di Hall,

(ii) π é il piano Desarguesiano di ordine 9,

(iii) π é il piano su un semicorpo di ordine 16 e nucleo GF(4),

(iv) π ha ordine 25 ed é il piano sul quasicorpo associativo irregolare di ordine 25 o il piano di Walker con orbite 10, 16 sulla retta all' infinito.

Usando questo teorema, é possibile avere qualche incompatibilità tra gruppi di Baer e gruppi di omologie.

Teorema 15.9. (Biliotti-Johnson [**14**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 nucleo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer B di ordine $q-1$ nel complemento di traslazione.

Se $q > 5$, allora:

(i) π é un piano di Hall,

(ii) ogni gruppo di omologie H deve fissare Fix(B)

(iii) q é dispari, $|H| = 2$ e H deve fissare {Fix(B), coFix(B)}.

Corollario 15.10. *Un piano di traslazione di ordine $q^2 > 25$ e nucleo $K \cong GF(q)$ non ammette un gruppo di Baer B di ordine $q-1$ e un gruppo di omologie di ordine $q-1$.*

Corollario 15.11. *Sia S un flock parziale di una quadrica iperbolica in $PG(3,q)$ con q coniche per $q > 5$.*

Allora il gruppo completo di S é isomorfo a G/EH^* dove G é il gruppo completo del piano di traslazione associato, E é un gruppo di elazioni di ordine q e H^* é il gruppo di omologie di ordine $q-1$ con asse la retta all'infinito.

Finalmente, con il teorema dato sopra, é possibile costruire alcuni flocks F_i, $i = 1, 2$ parziali di una quadrica iperbolica in PG(3,5) con 5 coniche. Gli F_i sono massimali quando il piano di traslazione é derivabile usando la rete che contiene lo spazio fissato da un gruppo di Baer di ordine 4. Inoltre tali reti non sono derivabili.

Allora abbiamo i primi esempi di flocks parziali con questa proprietà.

CAPITOLO 16

Insiemi parziali stretti in $P\Gamma L(n,q)$

DEFINIZIONE 16.1. *Un insieme S di permutazioni di un insieme X é detto un insieme parziale stretto se per ogni x,y in X e per ogni g,h in S risulta $xg = xh$ se e soltanto se $g = h$, e $x\ g = y\ g$ se e soltanto se $x = y$. Quando $|S| = |X| < \infty$, si dice che S é strettamente transitivo.*

Si ricordi che un piano di traslazione di ordine q^n con nucleo $K \cong GF(q)$ é equivalente a un insieme in $GL(r,K)$ strettamente transitivo.
Anche una rete di traslazione R di ordine q^r e grado $d \geq 3$ é equivalente a un insieme S parziale stretto in $GL(r,K)$ con $|S| = d-2$.
Sia V uno spazio vettoriale di dimenzione 2r sopra K. Sia $\{L_1, L_2, \ldots, L_d\}$ una fibrazione parziale e si fissino due componenti L_1, L_2. Ricordiamo che questi L_i sono i sottospazi di dimensione r che hanno due a due intersezione identica. Allora, $V = L_1 + L_2$ e si scelga una base $B = \{B_1, B_2\}$ tale che B_i é una base per L_i, $i = 1,2$. Identificando L_1 e L_2 abbiamo $V = \{(x,y)|x,y \in W\}$ dove W é uno spazio vettoriale di dimensione r sopra K. Siano L_1 e L_2 le componenti $y = 0$ e $x = 0$ rispettivamente. Gli altri sottospazi L_i; $d \geq i \geq 2$ sono $y = xM_i$ dove $\{M_i \mid i = 2,3,4,\ldots,d\}$ é un insieme parziale stretto di $GL(r,q)$ su $W - \{0\}$. Viceversa, un insieme di questo tipo produce una fibrazione parziale.
Gli insiemi parziali stretti sono interessanti anche perché sono legati ai flocks di una quadrica iperbolica:
Sia M la geometria dei punti $(x,y) \in PG(1,q) \times PG(1,q)$ e dei cerchi $y = x\,\sigma$ tali che $\sigma \in PGL(2,q)$. Si dice che i punti (x,y) e (x,z) sono +(plus) paralleli e i punti (x,y) e (w,y) sono (minus) paralleli. Allora, questo é un piano di Minkowski che é Miqueliano ed é isomorfo alla struttura dei punti delle coniche non-banali e delle rette di una quadrica iperbolica in $PGL(3,q)$ (dove le rette sono gli insiemi $\{(c,y)|y \in PG(1,q)\}$ o $\{(x,c)|x \in PG(1,q)\}$ per ogni $c \in PG(1,q)$).
Si ricordi la costruzione di Thas-Walker: Sia M una quadrica iperbolica in $PG(3,q)$ con un flock F di coniche date da $\{C_1, C_2, \ldots, C_{q+1}\}$. Sia π_i il piano che contiene C_i e supponiamo che $PG(3,q)$ é contenuto in $PG(5,q)$ in modo tale che M sia contenuta nella quadrica Q di Klein. Sia $\pi_i^{\perp}$ lo spazio

perpendicolare a π_i. Allora, $\{\pi_i^{\perp} \cap Q | i = 1, 2, \ldots, q+1\}$ é un insieme di q^2+1 di punti che sono a due a due non perpendicolari. Quindi, usando la corrispondenza di Klein, abbiamo una fibrazione di q^2+1 rette in $PG(3, q)$. Se si pensa ad M come ad un sottoinsieme di $PGL(2, q)$, un flock é equivalente a un insieme $\{y = x\sigma_i | i = 1, 2, \ldots, q+1\}$ dove $\{\sigma_i | i = 1, 2, \ldots, q+1\}$ é un insieme che é strettamente transitivo e produce un piano di traslazione.
Si puó pensare a tutto ció anche senza la geometria di Klein:
sia $\{\sigma_i | i = 1, 2, \ldots, q+1\}$ un insieme in $PGL(2, q)$ che é strettamente transitivo. Sia σ_i, l'elemento $Z \to (Za+b)/(Zc+d)$; per esempio, consideriamo $(x, y) \to (x, y)M_i$ dove $(x/y) = Z$, $M_i = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con det $M_i \neq 0$. Allora, $\{M_i | i = 1, 2, \ldots, q+1\}$ é un insieme di $GL(2, q)$ che opera transitivamente sugli spazi di dimensione uno.
É anche facile verificare che $\{M_i u\ I_2 | i = 1, 2, \ldots, q+1,\ u \in GF(q)^*\}$ é un insieme in $GL(2, q)$ che é strettamente transitivo e quindi é equivalente a un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo che contiene $GF(q)$. Non é invece facile verificare che questo piano é isomorfo al piano che nasce dalla quadrica.
Thas ([**134**], [**136**]), Bader-Lunardon [**5**] hanno dimostrato che tutti i piani che possono essere costruiti da un flock di una quadrica iperbolica in $PG(3, q)$ sono piani su un quasicorpo associativo. Questo metodo per la costruzione di piani di traslazione dagli insiemi di questi tipo é estremamente generale. Infatti é possibile usare questo per costruire fibrazioni parziali. Per esempio, sia $S = \{\tau_i | i = 1, 2, \ldots, t\}$ un insieme parziale stretto in $P\Gamma L(n, q)$ che agisce sui punti di $PG(n-1, q)$.
Si scelga la rappresentazione $\{(x_{,1}, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1^{\sigma}, x_2^{\sigma}, \ldots, x_n^{\sigma})M_i | i = 1, 2, \ldots, t\}$ e scriviamo $X \to X^{\sigma} M_i$.

Teorema 16.2. $\{X \to X^{\sigma} M_i u I_n | i = 1, 2, \ldots, t, u \in GF(q)^*\}$ é un insieme parziale stretto e produce una fibrazione parziale F di ordine q^n e di grado $t(q-1)+2$.

Si noti che se $V = \{(x, y) | x, y \in W\}$ spazio vettoriale di dimensione n su $GF(q)\}$, allora l'insieme $\{x = 0,\ y = 0,\ y = x^{\sigma} M_i u\ I_n\}$ é una fibrazione parziale.

Definizione 16.3. *Sia R una rete di ordine q^r e grado $q+1$ tale che per ogni punto P, le rette che contengono P sono coperte da un insieme di sottopiani affini di ordine $q+1$. In tal caso, diremo che R é una rete che é ricoperta da sottopiani.*

Non é difficile verificare che la rete $\{x = 0,\ y = 0,\ y = x^{\sigma} M_i u\ I_n\}$ é una rete ricoperta da sottopiani. Inoltre, usando le idee di Foulser [**37**] e Liebler [**111**], si ha:

Teorema 16.4. (Johnson [**82**]).

Una rete N di traslazione che é ricoperta da sottopiani é una rete di un regolo, cioé esiste uno spazio proiettivo $PG(2r-1, K)$ per $K \cong GF(q)$ contenente un regolo R che produce una rete isomorfa a N.

Usando la teoria delle geometrie semi-parziali, Frank De Clerck e Johnson hanno provato che il teorema citato sopra può essere dimostrato senza l'ipotesi che la rete sia di traslazione, é necessario peró assumere che il suo ordine sia finito.

Teorema 16.5. (De Clerck, Johnson [**26**]).

Una rete (finita) ricoperta da sottopiani é una rete di un regolo.

In termini di insiemi parziali stretti, si ha:

Teorema 16.6. Sia S un insieme parziale stretto di $P\Gamma L(n, q)$ di cardinalità t. Allora, esiste una rete di traslazione di ordine q^n e grado $t(q-1)+2$ tale che la fibrazione parziale ad essa associata é unione delle t reti dei regoli.

Si noti che le reti possono corrispondere a regoli in spazi proiettivi diversi. Tali reti R di traslazione hanno fibrazioni della forma $y = x^{\sigma} M_i u I_n$ per $u \in GF(q)$ e $M_i \in GL(n, q)$. Allora, é facile vedere che R ammette due gruppi di omologie di ordine $q-1$, $H_y : \langle (x, y) \to (x, yuI_n) | u \in GF(q)^* \rangle$ e $H_x : \langle (x, y) \to (xuI_n, y) | u \in GF(q)^* \rangle$. Questi gruppi hanno le stesse orbite sulla retta all'infinito.
Si scelga un punto P che non é su una retta della fibrazione parziale. Allora, $\langle P\langle H_x, H_y \rangle \rangle$ é un $K(\cong GF(q))$-sottopazio di dimensione 2.
Si ricordi, inoltre, che ciascuna delle t reti $R_i = \{y = x^{\sigma} M_i u I_n | u \in GF(q)^*\} \cup \{x = 0,\ y = 0\}$ é ricoperta da sottopiani. I sottospazi di $x = 0$ sono $\{X_i | i = 1, 2, \ldots, (q^n - 1)/(q-1)\}$ e i sottospazi di $y = 0$ sono $\{Y_i | i = 1, 2, \ldots, (q^n - 1)/(q-1)\}$. Allora, la rete R_k produce a una permutazione:

Per ogni X_i, esiste un spazio Y_j tale che $< X_i, Y_j >$ é un sottopiano nella rete R_k. Quindi, esiste una permutazione σ di $\{1, 2, \ldots, (q^n - 1)/(q - 1)\}$ tale che $\{< X_i, Y_{\sigma(i)} > |i = 1, 2, \ . \ . \ . \ , (q^n - 1)/(q - 1)\}$ é l'insieme di sottopiani di ordine q che copre R_k. Allora, per t reti, esiste un insieme $\{\sigma_i \mid i = 1, 2, \ldots, t\}$ di permutazioni che é parziale stretto. É anche possibile formare un quadrato parziale latino $[\sigma_i(j)]_{t\times(q^n-1)/(q-1)}$. Quindi, é possibile estendere quest'ultimo a un quadrato latino completo

$$\{\sigma_i|1, 2, \ldots, (q^n - 1)/(q - 1)\}.$$

Per esempio per σ_{t+1}, si può costruire un insieme

$$\{< X_i, Y_{\sigma_{t+1}(i)} > |i = 1, 2, \ldots, (q^n - 1)/(q - 1)\}$$

di $(q^n - 1)/(q - 1)$ sottospazi.
Se questo insieme é un insieme di sottopiani nella rete, questa rete corrisponde a un regolo ed é possibile estendere l'insieme originale S in $P\Gamma L(n, q)$ ad un insieme S^+ di cardinalità $t + 1$ in $P\Gamma L(n, q)$ che é parziale stretto.

Teorema 16.7. (Johnson [**85**]).

Sia $S \leq P\Gamma L(2, q)$ un insieme parziale stretto con cardinalità t. Allora, é quasi possibile estendere la rete R_S. La rete R_S ha grado $t(q - 1) + 2$.
Esiste una rete R_S^* di grado $(t + 1)(q - 1) + 2$ che contiene $x = 0$, $y = 0$ come sottopiani . $R_S - \{x = 0, y = 0\}$ é contenuta in R_S^*.
R_S^* ammette due gruppi di Baer di ordine $q - 1$ che hanno le stesse orbite sulla retta all' infinito.
Se la rete R_S^* é derivabile, allora é possibile estendere S a un insieme parziale stretto S^+ in $P\Gamma L(2, q)$ con cardinalità $t + 1$ e S^+ produce una rete R_S+ di grado $(t + 1)(q - 1) + 2$ che contiene R_S.

Si noti che questa volta, non si fanno ipotesi su Fix(B) e coFix(B) quando si parla dei gruppi di Baer.

Esiste anche un teorema inverso:

Teorema 16.8. (Johnson [**85**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 che ammette due gruppi di Baer di ordine $q - 1$. Se siffatti gruppi di Baer hanno le stesse orbite sulla retta all' infinito, allora esiste un campo $K \cong GF(q)$ tale che π corrisponde a un insieme parziale stretto S in $P\Gamma L(2, q)$ di cardinalitá q. S può essere esattamente esteso quando π é derivabile.

CAPITOLO 17

Piani di traslazione di ordine k che ammettono due gruppi di omologie di ordine $(k-1)/2$

Nel paragrafo precedente ci siamo occupati del legame tra insiemi parziali stretti in $P\Gamma L(2,q)$ e reti di traslazione.
Recentemente, Bonisoli [**19**] ha trovato alcuni insiemi che sono strettamente transitivi in $P\Gamma L(2,q)$.
Si ricordio che un piano finito di Minkowski M può essere rappresentato da un insieme S di permutazioni di X che é strettamente 3-transitivo. I punti sono $X \times X$, i cerchi $y = x\sigma$, $\sigma \in S$ dove (x,y) é plus parallelo a (x,z) e (x,a) é minus parallelo a (w,z). In questo caso, un flock di M é un insieme di cerchi che ricoprono i punti di M e che a hanno due a due intersezione identica.
Sia $M(\sigma,q)$, per q dispari, un piano di Minkowski dove $S : \{Z \to (Z^\tau a + b)/(Z^\tau c + d)$: dove $\tau = \sigma \in$ Aut $GF(q)$ quando det$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ non é un quadrato e $\tau = 1$ quando det$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é un quadrato, con $a,b,c,d \in GF(q)^*\}$.
S é 3-transitivo.
Sia E un sottogruppo ciclico di $PSL(2,q)$ di ordine $(q+1)/2$. Sia $g \in P\Gamma L(2,q)$ tale che g normalizza E. Bonisoli ha dimostrato che ci sono valori di q ed elementi g tali che $E \cup E\ g$ é strettamente transitivo. Allora, $E \cup E\ g$ produce un piano di traslazione π_E di ordine q^2 che é unione delle $q+1$ reti derivabili (si veda anche [**84**]). Se E corrisponde all'insieme (gruppo) $H = \langle (x_1,x_2) \to (x_1,x_2)M_i | i = 1,2,\ldots,(q+1)/2\rangle$ e g corrisponde a $(x_1,x_2) \to (x_1^\sigma, x_2^\sigma)N_o$, allora $E \cup E\ g$ corrisponde al piano di traslazione con fibrazione $x = 0$, $y = 0$, $y = x^\sigma N_o M_i u\ I_2$, e $y = x\ M_j v\ I_2$ per $i,j = 1,2,\ldots,(q+1)/2$ e per $u,\ v \in GF(q)^*$.Allora, π ammette il gruppo di omologie $< (x,y) \to (x, xM_i) | i = 1,2,\ldots,(q+1)/2\rangle = H_y$ e, poiché g normalizza E, il gruppo di omologie $\langle (x,y) \to (xM_i, y)\rangle = H_x$ dove $|H_y| = |H_x| = (q+1)/2$. Inoltre π ammette i gruppi $\langle (x,y) \to (x, yuI_2) | u \in GF(q)^*\rangle = H_y^o$ e $\langle (x,y) \to (xv\ I_2, y) | v \in GF(q)^*\rangle = H_x^o$, e $|H_x^o| = |H_y^o| = (q-1)$, quindi $|H_x H_x^o| = |H_y H_y^o| = (q^2-1)/2$.
Allora, questi piani di traslazione che possono essere costruiti da insiemi di

Bonisoli hanno ordine k ed hanno almeno due gruppi di omologie di ordine $(k-1)/2$.
Recentemente, Hiramine ed Johnson hanno studiato piani di traslazione di ordine k che hanno almeno due gruppi di omologie di ordine $(k-1)/2$.
Siano H_1, H_2 due gruppi di questo tipo con assi L_1, L_2 e coassi M_1, M_2. Supponiamo che $\{L_1, M_1\} \cap \{L_2, M_2\}$ sia non banale ma gli insiemi non sono eguali. Allora, per un teorema di André [**2**], esiste un gruppo di elazioni di ordine $p^s \geq (k-1)/2$ dove $p^r = k$. In questo caso, $2p^s \geq k = p^r$ che implica, per p dispari , $p^s = p^r$. Allora, il piano é un piano su un semicorpo, e poiché H_1 corrisponde a un sottogruppo di un campo, é facile provare che il piano é Desarguesiano.
Supponiamo che $\{L_1, M_1\} = \{L_2, M_2\}$. Se non é vero per tutti i gruppi di questo tipo, ci sono tre possibilità: (siano le orbite non-banali sulla retta all'infinito L_∞ di $H_i = \Gamma_{1,i}$, $\Gamma_{2,i}$ per $i = 1, 2$ rispettivamente.)

(i) $L_1 \cap L_\infty \rightarrow \in \Gamma_{1,1}$ o $(\Gamma_{2,1})$, $M_1 \cap L_\infty \rightarrow \in \Gamma_{1,1}$ o $\Gamma_{2,1})$, rispettivamente. In questo caso, le lunghezze delle orbite sono: $(k+3)/2$, $(k-1)/2$.

(ii) $L_1 \cap L_\infty \rightarrow \in \Gamma_{2,1}(o\Gamma_{1,1})$, $M_1 \cap L_\infty \rightarrow \in \Gamma_{1,1}(o\ \Gamma_{2,1})$ rispettivamente. In questo caso, le lunghezze delle orbite sono: $(k+1)/2$, $(k+1)/2$.

(iii) $< H_1, H_2 >$ ha solo un'orbita di lunghezza $k+1$.

Nei casi (i) e (ii), esiste $\sigma \in\ H_2$ tale che $L_1 \rightarrow M_1$. Allora, $\{L_1, M_1\} = \{L_1\sigma, M_1\sigma\}$. Cioé, si può considerare $\{L_1, M_1\} = \{L_2, M_2\}$.
Allora, se $\{L_1, M_1\} \neq \{L_2, M_2\}$, abbiamo due orbite Γ_1 e Γ_2 di lunghezza $(k+1)/2$, $(k+1)/2 - si$ rispettivamente. Quindi, $\langle H_1, H_2\rangle$ é 2-transitivo su Γ_1 e Γ_2. In questo caso, é possible usare la classificazione dei gruppi semplici per eliminare questa possibilità. Quindi, possiamo considerare $\{L_1, M_1\} = \{L_2, M_2\}$ e usare il seguente risultato:

Teorema 17.1. (Lüneburg [**112**]).

Sia π un piano di traslazione che ammette un gruppo abeliano G che fissa due rette (cioé, due componenti) L, M. Per ogni componente $N \neq L$, M, se G_N é irriducibile su N, allora π é un piano di André generalizzato.

Si noti che $| < H_1, H_2 > | = (k-1)^2/4$. Sia $k = p^r$ e supponiamo che esista un divisore p-primitivo u di $p^r - 1$. Allora, un u-sottogruppo S_u^i di H_i é ciclico e il gruppo $S_u^1 \times S_u^2$ é abeliano. Inoltre, $|\langle H_1, H_2\rangle_N| = ((k-1)^2/4)\ /\ d$ con $d = (k-1)$ o $(k-1)/2$. Allora, é possibile usare il sottogruppo $S_u^1 \times\ S_u^2$

per dimostrare che $(S_u^1 \times\ S_u^2)_N$ opera irriducibile su N e che π é un piano di André generalizzato.

Tuttavia esistono sono alcuni esempi eccezionali. Il piano sul quasicorpo associativo irregolare di ordine 7^2 o 23^2. Esiste anche un piano eccezionale di Lüneburg di ordine 7^2 che ammette due gruppi di omologie che sono isomorfi a SL(2,3) (si ricordi $|SL(2,3)| = 24 = (7^2-1)/2$).

Teorema 17.2. (Hiramine, Johnson [**45**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine k che ammette almeno due gruppi di omologie di ordine $(k-1)/2$. Allora, abbiamo una delle seguenti possibilità:

(1) π é un piano di André generalizzato,

(2) l'ordine di π é 7^2 e π é il piano sul quasicorpo associativo irregolare di ordine 7^2,

(3) l'ordine di π é 7^2 e π é il piano eccezionale di Lüneburg,

(4) l'ordine di π é 23^2 e π é il piano sul quasicorpo associativo irregolare di ordine 23^2.

Il fatto che, nel caso (1), π sia un piano di André generalizzato non é molto esplicativo. Allora, sono stati studiati i piani di André generalizzati di ordine k che hanno almeno un gruppo di omologia di ordine $(k-1)/2$. In questo caso, esiste una coppia di Dickson $\{q, n\}$ (per $n \neq 4$, tutti i divisori primi di n sono anche divisori di $(q-1)$) tale che $k = q^n$. Esiste anche un piano di Dickson π_D (cioé un piano di traslazione su un quasicorpo associativo di Dickson) che é associato a π tale che $\pi \cap \pi_D$ é una rete di grado $(k-1)/2+2$ e $\pi - \pi_D$ é una rete che può essere costruita dalla rete di sostituzione $\pi_D - \pi$. Tuttavia ci sono diverse possibilità per le sostituzioni. Per esempio, per ogni sottocampo $GF(p^s)$ di $GF(q)$, é possibile costruire un piano di ordine $q^n = k$ che ammette un gruppo di omologie di ordine $(q^n-1)/2$ con nucleo $GF(p^s)$. Tra questi piani é possibile trovare quelli che hanno due gruppi di omologie di ordine $(q^n-1)/2$. Allora, in Hiramine-Johnson [**44**], hanno ottenuto una classificazione di tutti i piani di André generalizzati di ordine k che ammettono un gruppo di omologie di ordine $(k-1)/2$.
Un problema aperto é sapere se ci sono piani di traslazione di questo tipo che non sono piani di André generalizzati.

CAPITOLO 18

Rigidità nei flock di un cono

DEFINIZIONE 18.1. *Un flock di un cono quadratico C in $PG(3,q)$ di vertice v_o é un insieme F di coniche $\{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ dove $C - \{v_o\} = \cup C_i$.*

I flock sono stati molto studiati perché ai flock di un cono quadratico sono legati piani di traslazione con un fibrazione in $PG(3,q)$ che ammettono un gruppo di elazioni E tale che ogni sua orbita di componenti unita con l'asse forma un regolo. Esistono, inoltre, legami con i quadrangoli generalizzati e con i piani proiettivi delle classe II-1 della classificazione di Lenz-Barlotti.

Sia F un flock $\{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ e sia π_i il piano che contiene C_i per $i = 1, 2, \ldots, q$. Recentamente, Thas [**133**] ha determinato i flock F di un cono quadratico in $PG(3,q)$ in cui tutti i piani π_i in $PG(3,q)$ hanno un punto P in comune. Infatti:

TEOREMA 18.2. (Thas [**133**]).

Sia $F = \{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ un flock di un cono quadratico e π_i il piano che contiene C_i per $i = 1, 2, \ldots, q$ dove $\cap\pi_i$ contiene un punto $\{P\}$.

(1) Se q é pari, allora F é lineare (allora $\cap\pi_i$ é una retta).

(2) (a) Se q é dispari e P é un punto interno, allora F é lineare.

(b) Se P é un punto esterno allora é possibile scegliere le coordinate in modo tale che i punti di $PG(3,q)$ hanno la forma (x_0, x_1, x_2, x_3) con le coordinate omogenee per $x_i \in GF(q)$, $i = 0, 1, 2, 3$, e il cono può essere rappresentato dall'equazione $x_o x_1 = x_2^2$ e i piani π_i possono essere rappresentati con le equazioni $a_i x_o - m a_i^\sigma x_1 + x_3 = 0$ dove $\{a_i | i = 1, 2, \ldots, q\} = GF(q)$, $\sigma \in Aut(GF(q))$, ed m é non quadrato fissato. In questo caso $\cap\pi_i$ contiene il punto $(0, 0, 1, 0)$ e il flock é lineare quando $\sigma = 1$.

Teorema 18.3. (Johnson [**77**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 in $PG(3,q)$ corrispondente ad un flock $F = \{C_i | i = 1, 2, \ldots, q\}$ di un cono quadratico. Se π é derivabile– cioé contiene una rete derivabile R, dove R non corrisponde a una conica C_i per $i = 1, 2, \ldots, q$ ma R contiene l'asse di un gruppo di elazioni E di π, allora i piani π_i ($C_i \subset \pi_i$) hanno un punto in comune.

Allora, in questo caso, diremo che π é Desarguesiano *o* un piano di Knuth su un semicorpo (corrisponde a un flock lineare o a un flock di Kantor).

Teorema 18.4. (Johnson e Lunardon [**90**]).

Sia F un flock di un cono quadratico in $PG(3,q)$. Sia π_F il piano di traslazione che corrisponde a F e sia O_F l'ovoide in $PG(5,q)$ nella quadrica di Klein Q_5. Se esistono due punti singolari $T \neq S \in Q_5 - O_F$ tali che $T^\perp \cap O_F = S^\perp \cap O_F$ e $T^\perp \cap O_F$ non é una conica allora F é un flock di Kantor.

Questo risultato ha alcune applicazioni e produce a molte fibrazioni parziali che sono massimali. Recentemente, Jha e Johnson hanno studiato la seguente situazione: Sia π un piano di Knuth o equivalentemente F_π il flock di Kantor con piani: $tx_o - mt^\sigma x_1 + x_3 = 0$ dove m non é un quadrato in $GF(q)$. Allora, é facile vedere che $(x_o, x_1, x_2, x_3) \to (x_0, x_1, -x_2, x_3)$ é un automorfismo che fissa ogni piano del flock.
Nel caso più generale, ci si é chiesti sotto quali condizioni esiste un automorfismo σ tale che σ fissa ogni piano di un sotto flock. Infatti, é possibile studiare i flock parziali con questa proprietà.

Definizione 18.5. *Sia $P = \{C_1, C_2, \ldots, C_s\}$ un flock parziale di un cono quadratico in $PG(3,q)$. Sia G un gruppo di collineazioni di $PG(3,q)$ che fissa il cono (e il suo vertice). Siano, inoltre, π_i i piani che contengono C_i, $i = 1, 2, \ldots, s$. Diremo che G ha rigidità locale su P o G é localmente rigido se e soltanto se G fissa ogni piano π_i, $i = 1, 2, .., s$.*
Se é possibile estendere G a un flock F che contiene P, useremo l'espressione G ha s-rigidità.
Quando $s = q$, diremo G ha rigidità o G é rigido.

A volte, é conveniente usare quanto segue:

Se P é un flock parziale con s coniche allora esiste una fibrazione parziale e una rete corrispondente π_P con $\pi_P = \cup R_i$, dove R_i é una rete di un regolo contenente una retta L, per $i = 1, 2, .., s$. Anche C_i in P corresponde a R_i^*, il regolo opposto di R_i (i punti di C_i correspondono ai sottopiani di Baer della fibrazione parziale di R_i).

Esempio 18.6. *(1) Il flock lineare L corrisponde a un piano di traslazione π_F che é Desarguesiano. π_F ammette un gruppo di ordine $q^2 - 1$ che fissa ogni punto all'infinito. Allora, F ammette un gruppo G di ordine $q + 1$ che é rigido.*

(2) Esiste essenzialmente solo uno flock nonlineare che ha almeno $(q-1)/2$ piani che hanno una retta in comune (si veda Payne e Thas [**127**] *). Questo flock é detto flock di Fisher. Il flock di Fisher può essere costruito dal flock lineare ed esiste un sottogruppo G del gruppo di collineazioni dato in (1) e tale che G ha $(q-1)/2$-rigidità e ordine $(q + 1)/2$.*

(3) Abbiamo visto che il flock di Kantor ammette un gruppo che é rigido di ordine 2.

Allora, la domanda che ci si pone é:

Qual'é il legame tra flock parziali in cui i piani hanno un punto in comune e gruppi di collineazioni che hanno rigidità locali?

Teorema 18.7. **Teorema fondamentale di rigidità (Jha e Johnson [54]).**

Sia P un flock parziale di s coniche in $PG(3, q)$. Sia G un gruppo che ha s-rigidità locale. Se G ha un sottogruppo non-banale lineare (cioé in $PGL(4, q)$) allora, i piani del flock parziale hanno un punto in comune.

Viceversa, se l'intersezione dei piani del flock parziale contiene un punto allora esiste un gruppo lineare non-banale che ha s-rigidità locale.

Diamo una breve dimostrazione di una parte del teorema:
sia G un gruppo che ha s-rigidità locale. Siano i piani $\{\pi_i | i = 1, 2, \ldots, s\}$. Supponiamo che $\pi_1, \ldots, \pi_t$ abbiano una retta L_1 in comune e $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_t\}$ é massimale con questa proprietà. Se c'é un altro piano π_{t+1}, sia $L_{t+1} = \pi_{t+1} \cap \pi_1$ e sia $\cap_1^{t+1} \pi_i = \{P_1\}$. Se c'é un'altro piano π_{t+2} che non contiene P_1, sia $P_2 = L_1 \cap (L_{t+2} = \pi_1 \cap \pi_{t+2})$ e $P_3 = (L_{t+1} = (\pi_1 \cap \pi_{t+1})) \cap L_{t+2}$.

Sia v il vertice del cono e consideriamo vP_1 , vP_2. Queste rette sono fissate da G. Allora anche $vP_1 \cap \pi_{t+2} = P_1^*$ e $vP_2 \cap \pi_{t+1} = P_2^*$ sono fissati da G. Se $G \cap (PGL(4, q)) \neq \langle 1 \rangle$, allora esiste un elemento lineare e non banale g che fissa ogni punto del piano $\pi_o = \langle P_1, P_2, P_1^*, P_2^* \rangle$ ma G fissa anche il punto P_3 che non é in π_o. Allora $g = 1$. Assurdo. Allora $\cap_1^s \pi_i$ contiene un punto.

Con riferimento al teorema, per esempio, se $s > 2(q)^{1/2} + 1$, é possibile provare che i piani π_i hanno un punto in comune.

Si ha che:

Teorema 18.8. (Jha-Johnson [**54**]). Se un flock F ammette un gruppo rigido non-banale allora F é lineare o é un flock di Kantor (un flock su un semicorpo di Knuth).

Adesso considereremo gruppi s-rigidi. Si ricordi che un gruppo s-rigido é un gruppo di collineazioni del flock $F = \{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ che fissa s piani dei π_i che contengono C_i per $i = 1, 2, \ldots, q$. Forse, é possibile usare i gruppi s-rigidi per capire quanti piani π_i sono necessari (cioé quanto grande é s) per una classificazione dei flock. Infatti:

Teorema 18.9. (Jha-Johnson [**54**]). Sia F un flock in $PG(3, q)$ che ammette un gruppo s-rigido tale che il gruppo é lineare.

(1) Se q é pari, allora gli s piani che sono fissati da G hanno una retta in comune.

(2) Se q é dispari e gli s piani non hanno una retta in comune, allora i piani hanno solo un punto P in comune.

Se il punto P é esterno al cono allora tutti i piani del flock hanno un punto in comune. Allora F é un flock di Kantor.

Quando l'ordine é grande possiamo avere una classificazione dei flock lineari e dei flock di Fisher.

Teorema 18.10. (Jha-Johnson [**54**]). Se esiste un gruppo lineare G s-rigido dove $s \geq 2$ e $|G| = (q+1)/2$ allora F é lineare o il flock di Fisher.

Teorema 18.11. Sia F un flock di un cono quadratico in $PG(3,q)$ e G un gruppo s-rigido dove $s \geq (q-1)/2$ e $q \geq 5$.

(1) Se q é pari, allora F é lineare.

(2) Se q é dispari e $|G| > 2$, allora F é lineare.

Quando $s > (q-1)/2$ é possibile avere un legame tra gruppi rigidi locali e gruppi rigidi:

Teorema 18.12. (Jha-Johnson [**54**]). Sia F un flock di un cono in $PG(3,q)$ con $s > (q-1)/2$ piani che hanno un punto in comune (allora esiste un gruppo s-rigido locale). Allora esiste un gruppo s-rigido di collineazioni di F.

Nel caso q pari, il seguente risultato migliora quello di Thas.

Teorema 18.13. (Jha-Johnson [**54**]). Sia F un flock di un cono quadratico in $PG(3,q)$ dove q é pari. Se esiste un sottoflock di almeno $q/2$ piani che hanno un punto in comune allora F é lineare.

CAPITOLO 19

Reti e loro prodotti diretti

Definizione 19.1. *Siano N_1, N_2 reti finite di ordine n e grado $k+1$. Consideriamo il prodotto diretto $N_1 \times N_2 = \{(P_1, P_2) \mid P_i \in\ N_i,\ i = 1, 2\}$ i cui elementi chiameremo " punti".*
Sia σ una corrispondenza dalla classe di parallismo di N_1 alla classe di parallismo di N_2. Se L é una retta di N_1 e M é una retta di N_2 tale che $L\sigma$ é parallela a M allora si considera $L \times M$. Si noti che assumiamo che se $L \neq L^*$ sono parallele allora anche $L\sigma \neq L^*\sigma$ sono parallele; $L \times_\sigma M$ si chiamerá "retta".

Useremo in generale la notazione $N_1 \times_\sigma N_2$, mentre useremol anotazione $N_1 \times N_1$, solo quando $N_1 = N_2$ e $\sigma = 1$). Chiameremo, quindi $N_1 \times_\sigma N_2$ un prodotto di reti.

Proposizione 19.2. *$N_1 \times_\sigma N_2$ é una rete di ordine n^2 e grado $k+1$.*

Per esempio, $L \times_\sigma M$ é parallela a $L^* \times_\sigma M^*$ se e soltanto se L é parallela a L^* e M^* é parallela a $L^*\sigma$. Allora, per ogni classe di parallismo α di N_1, $\{L \times_\sigma M \mid L\ \in\ \alpha,\ M\ \in\ \alpha\sigma\}$ é una classe di parallismo di $N_1 \times_\sigma N_2$. Anche per ogni classe di parallismo α di $N_1 \times_\sigma N_2$ e per ogni punto (P_1, P_2) esiste un'unica retta $L \times_\sigma M$ della classe α tale che $(P_1, P_2) \in\ L$ perché P_1 é in un'unica retta L di α e P_2 é in un'unica retta M di $\alpha\sigma$. Cioé, possiamo usare la stessa notazione α per la classe di parallelismo di $N_1 \times_\sigma N_2$ e la classe di N_1. Questa costruzione era nota solo per reti finite. É possibile trovarla nel libro di Beth, Jungnickel e Lenz [**10**]. Questa costruzione é stata inoltre usata da D. Drake per dare un esempio di rete che non ha una trasversale.
Considereremo il caso in cui N_1 e N_2 sono piani affini di ordine n. Allora, il grado é sempre $n+1$. In questa situazione, $N_1 \times_\sigma N_2$ é una rete di ordine n^2 e grado $n+1$. Inoltre, considereremo $N_1 = \pi_1$, $N_2 = \pi_2$, dove π_1, π_2 sono piani di traslazione di ordine $n = p^r$, p primo.

Osserviamo subito che:

Teorema 19.3. (Johnson-Ostrom [**92**]).

$\pi_1 \times_\sigma \pi_2$ é una rete di traslazione. Cioé, esiste un gruppo di traslazione che é abeliano elementare.

Dim: Sia T_i il gruppo di traslazione di π_i, per $i = 1, 2$. Si consideri $(P_1, P_2) \to (P_1\tau_1, P_2\tau_2)$, dove $\tau_i \in T_i$, $i = 1, 2$ e

$$(L_1 \times_\sigma L_2) \to (L_1\tau_1 \times_\sigma L_2\tau_2)$$

con $L_2||L_1\sigma$. Allora, $P_i\tau_i \in L_i$, $L_1\tau_1||L_1$, e $L_2\tau_2||L_2$, affinche

$$L_2\tau_2||L_2||L_1\sigma||L_1\tau_1\sigma$$

perché $L_1\tau_1||L_1$. Quindi, $L_2\tau_2||L_1\tau_1\sigma$. Allora, $T_1 \times T_2$ é un gruppo di traslazioni di $\pi_1 \times_\sigma \pi_2$ di ordine n^4. Ció implica che $\pi_1 \times_\sigma \pi_2$ é una rete di traslazione.

Infatti abbiamo:

Teorema 19.4. (Johnson-Ostrom [**92**]).

Siano G_1 e G_2 gruppi di collineazioni di π_1 e π_2, rispettivamente tali che G_i fissa ogni punto della retta all'infinito di π_i, per $i = 1, 2$. Allora $(P_1, P_2) \to (P_1g_1, P_2g_2)$, $L_1 \times_\sigma L_2 \to L_1g_1 \times_\sigma L_2g_2$ dá un gruppo di collineazioni di $\pi_1 \times_\sigma \pi_2$ tale che $G_1 \times G_2$ fissa ogni punto all'infinito di $\pi_1 \times_\sigma \pi_2$.

Osservazione 1. (Johnson-Ostrom [92]).

$\pi_1 \times_\sigma \pi_2$ **ha sottopiani di Baer isomorfi a** π_i, $i = 1, 2$.

Dim: $\{(P, Q)|P$ punto di $\pi_1\}$, per un fissato punto Q di π_2, é isomorfo a π_1. Si noti che non é necessaria l'ipotesi che π_1, π_2 siano piani di traslazione in (19.4). Infatti, per ogni punto (P, Q) ci sono almeno due sottopiani di Baer che contengono (P, Q). Quando $\pi_1 = \pi_2$ e $\sigma = 1$, i punti della forma (P, P) sono contenuti in almeno tre sottopiani di Baer.

La domanda più importante é:

Quando un prodotto diretto di reti é una rete di ordine n^2 e grado $n+1$?

Per reti di traslazione, é stato dimostrato che

Teorema 19.5. (Johnson-Ostrom [**92**]).

Se N é una rete di traslazione con un gruppo abeliano elementare di traslazione che ha almeno due piani affini di Baer π_1, π_2 su un punto, allora i piani sono piani di traslazione e N é isomorfa a $\pi_1 \times_\sigma \pi_2$ per qualche corrispondenza σ tra le classi di parallellismo di π_1 e π_2.

Per reti derivabili é possibile dimostrare il seguente teorema:

Teorema 19.6. (Johnson-Ostrom [**92**]).

$\pi_1 \times_\sigma \pi_2$ é derivabile se e soltanto se $\pi_1 \cong \pi_2$ é Desarguesiano e σ é una collineazione di π_1.

Osservazione 2. (Johnson-Ostrom [92]).

Se G é un gruppo di collineazioni di π tale che $[G, \sigma] = 1$ (cioé se G e σ commutano) allora G é un gruppo di collineazioni di $\pi \times_\sigma \pi$.

Per esempio quando $\sigma = 1$, si ha il gruppo G.

Se π é un piano di traslazione di ordine q^2 che ammette $GL(2, q)$ come un gruppo di collineazioni, allora $\pi \times \pi$ é una rete di traslazione di ordine q^4 e grado $q^2 + 1$ che ammette $GL(2, q)$ come un gruppo di collineazioni.

Teorema 19.7. (Johnson-Ostrom [**92**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^n con nucleo $GF(q)$. Consideriamo $\pi \times \pi$ (cioé $\sigma = 1$). Allora $\pi \times \pi$ ammette un gruppo Γ di collineazioni tale che

(1) $\Gamma \cong GL(2, q)$,

(2) Γ fissa ogni punto della retta all'infinito,

(3) esiste un sottogruppo di ordine $q(q-1)$ che fissa ogni punto di un sottopiano di Baer isomorfo a π,

(4) ci sono $q+1$ sottopiani di Baer in $\pi \times \pi$ e tutti sono isomorfi a π.

Dim: Per esempio, per (1), si noti che π é uno spazio vettoriale su un campo $K \cong GF(q)$. Si considerino $(P,Q) \to (P,Q) \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} = (P\alpha + Q\delta, P\beta + Q\gamma)$ tale che $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in K$ e $\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$, e $L \times M \to (L\alpha + M\delta, L\beta + M\gamma)$. Si ha che $(L\alpha + M\delta)||L||(L\beta + M\gamma)||M$. Allora, esiste un gruppo in $\pi \times \pi$ che é isomorfo a $GL(2,q)$ e che fissa ogni punto sulla retta all'infinito.

Anche, $H \left\langle \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} | \gamma \neq 0, \ \delta, \gamma \in K \right\rangle$ é un sottogruppo di Baer che fissa ogni punto di $\{(P,0) | P \in \pi\} \cong \pi$.

Alcuni di questi risultati sono stati dimostrati da Foulser [**2**] ma i metodi di Ostrom-Johnson sono diversi e piú forti. Per esempio, non é necessario avere ordine finito.
É possibile classificare le reti N di ordine q^r e grado $q+1$ che ammettono un gruppo di collineazioni che é isomorfo a $GL(2,q^r)$?

Recentemente, Hiramine e Johnson hanno provato quanto segue:

Osservazione 3. (Hiramine [42], Hiramine e Johnson [43]).

Sia N una rete di ordine q^2 e grado $q+1$. Se N ammette un gruppo di collineazioni G dotato di un sottogruppo normale H che agisce regolarmente sopra i punti e tale che $G/H \cong GL(2,q)$, allora si ha uno dei seguenti casi:

(1) N é una rete di un regolo

(2) N é una rete che può essere ottenuta da una cubica sghemba in $PG(3,q)$. Cioé, le tangenti di una cubica sghemba formano una rete che é isomorfa a N.

Se π é un piano di traslazione di ordine q^n con nucleo $K \cong GF(q)$, abbiamo:

Teorema 19.8. Se π é un piano di traslazione di ordine q^n con nucleo $K \cong GF(q)$, ci sono esattamente $q+1$ sottopiani di Baer in $\pi \times \pi$ che hanno un punto in comune.

Dim: Sia $\{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ l'insieme di tutti i sottopiani di Baer in $\pi \times \pi$ che hanno il punto (O, O) in comune. Sia $\pi_1 = \{(P, O)|P \in \pi\}$. Se $k > q+1$, sia π_{q+2} un sottopiano di Baer che contiene (O, O). Si possono prendere due qualsiasi sottopiani per ricostruire la rete. Allora, ogni nuovo sottopiano $\Sigma(\pi_{q+2})$ é isomorfo a π_1. Esiste un gruppo isomorfo a $GL(2, q)$ che é generato dai gruppi di Baer che fissano π_1 o Σ. Anche questi due gruppi sono isomorfi a $GL(2, q)$ e hanno un sottogruppo di ordine $q(q-1)$ in comune (il sottogruppo che fissa ogni punto di π_1). Allora, esistono almeno q nuovi sottopiani per ogni sottopiano Σ. Quindi ogni nuovo sottopiano $\Sigma(\pi_{q+2})$ é isomorfo a π_1. In tal modo si ottiene una contraddizione.

Esiste un piano di traslazione π di ordine n^2 che ha un sottopiano di Baer π_o non Desarguesiano?

Il motivo di questa domanda é che Pentilla ha trovato con il computer un insieme di piani di traslazione di ordine 81 che contengono il piano di Hall come un sottopiano di Baer di ordine 9. Inoltre, Jha nota che é facile usare piani di traslazione sui semicorpi per avere sottopiani di Baer che sono piani sui semicorpi ma che non sono Desarguesiani. Anche, Foulser e Walker [**39**] hanno trovato piani di traslazione con sottopiani di Hall che sono sottopiani di Baer. Infine, Ostrom ed Johnson hanno trovato diverse classi infinite di piani di traslazione di ordine n^2 che hanno un sottopiano di Baer che non é Desarguesiano. In particolare, Ostrom ed Johnson hanno trovato una catena di piani di Baer $\pi_1 \subset \pi_2 \subset \pi_3 \subset \ldots \subset \pi_k$ tali che π_i é un sottopiano di Baer di π_{i+1} non Desarguesiano, dove l'ordine π_j é $n^{2^{j-1}}$.

Questo risultato puó essere usato per costruire fibrazioni massimali.

Teorema 19.9. (Johnson-Ostrom [**92**]).

Se $\pi \times \pi$ può essere esteso a un piano di traslazione Σ allora possiamo fare la seguente costruzione:

Sia M la fibrazione parziale in $PG(2n-1, q)$ dove l'ordine π é q^n, $n \neq 1$, che consiste delle componenti in $\Sigma - \pi \times \pi$ e dei sottopiani di Baer di $\pi \times \pi$. Allora M é una fibrazione parziale massimale o esiste una fibrazione parziale massimale M^+, che non é una fibrazione, tale che $M \subset M^+$.

Dim: Tutte le componenti esterne a M devono essere contenute nella rete $\pi \times \pi$. Se M^+ é una fibrazione allora $\pi \times \pi$ é ricoperta. Allora esistono due piani di traslazione Σ, Σ^* che contengono $\Sigma - \pi \times \pi$. allora il risultato di Ostrom [**117**] può essere usato per provare che $\pi \times \pi$ é derivabile. Ma, in questo caso, π deve essere derivabile. Assurdo.

Per esempio, é possibile dimostrare che quando l'ordine π é q^2 con nucleo $GF(q)$, e $\pi \times \pi$ può essere esteso a un piano di traslazione Σ di ordine q^4 allora M ha $q^4 - q^2 + q - 1$ componenti ed é massimale.

Esistono molti esempi di piani di traslazione con questa proprietà.

Teorema 19.10. (Johnson-Ostrom [**92**]).

Esiste un piano di traslazione di André Σ di ordine q^{2nt}, $(n,t) = 1$, t dispari, $t > 1$, tale che esiste un sottopiano Σ_o di Baer di André di ordine q^{nt} con nucleo $GF(q^n)$.

Anche nella rete N che contiene Σ_o di grado q^{nt+1}, ci sono esattamente $q^n + 1$ sottopiani di Baer che hanno un punto in comune.

Ci sono moltissimi esempi. Per l'ordine q^{30z}, é possible avere reti di grado $q^{15z} + 1$ con $1 + q^{3z}$ sottopiani di Baer con nucleo $GF(q^{3z})$, reti di grado $q^{15z} + 1$ con $1 + q^{5z}$ sottopiani di Baer con nucleo $GF(q^{5z})$, e reti di grado $q^{15z} + 1$ con $1 + q^z$ sottopiani di Baer con nucleo $GF(q^z)$.

CAPITOLO 20

Flock ovali e gruppi 2-transitivi

In questo capitolo consideriamo i flock di un cono che possono essere costruiti a partire da un'ovale in $PG(3, q)$.

DEFINIZIONE 20.1. *(1) Sia O un'ovale in PG(2,K),Kcampo, e sia P un punto che non é in O. Si consideri il cono C avente per generatrici le rette PQ, dove Q é un punto di O. Chiameremo il punto P il vertice di C. Un'ovale di traslazione é un'ovale O per cui esiste un gruppo di traslazioni T del piano che contiene Oche fissa il punto (∞) $= C \cap$(l'asse di traslazione) e agisce transitivamente su $C - (\infty)$.*

(2) Un flock ovale é un insieme di piani $\{\pi_\alpha \mid \alpha \in \lambda\}$ dove $\cup\pi_\alpha = C-\ P$ e i $\pi_\alpha \cap C$ hanno due a due intersezione identica.

Naturalmente, per $K = GF(q)$ e q dispari, un'ovale in un piano Desarguesiano é una conica (il risultato é di Segre).
Per q pari tutte gli ovali di traslazione in un piano Desarguesiano possono essere rappresentate nella forma $\{(1, t, t^\sigma),\ (0, 0, 1) \mid t \in GF(q = 2^r)\}$ dove per $\sigma = 2^s$ allora $(s, r) = 1$ (il risultato é di Payne).
Jha e Johnson hanno trovato una classe di flock ovali di traslazione in cui l' ovale non é una conica. Cioé, l'ovale in questione é un'ovale di traslazione. Questo flock ammette un gruppo di automorfismi che agisce due transitivamente sui piani del flock. Recentemente, é stato notato che tali flock coincidono con quelli trovati da D. Fisher e J.A. Thas (si veda D. Fisher e J.A. Thas, Flocks in $PG(3, q)$. Math. Zeit. 169 (l979) 1-11).

TEOREMA 20.2. (Fisher e Thas, si veda anche Jha-Johnson [**56**]).

Sia q pari, q $\equiv -1$ mod 3, e sia σ un automorfismo di $GF(q)$. Rappresentiamo un'ovale di traslazione nella forma $\{(1, t, t^\sigma), (0, 0, 1) \mid t \in GF(q)\}$. Siano coordinate omogenee per $PG(3, q)$, (x_o, x_1, x_2, x_3) con $x_i \in GF(q)$ per $i = 0, 1, 2, 3$.

Si consideri l'ovale nel piano $x_3 = 0$ e prenda il cono di traslazione usando (0,0,0,1) come vertice.

Allora, il seguente insieme di piani é un flock ovale.

π_s: $s^{\sigma+1}\mathbf{x}_o + s^{\sigma}\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 0$ al variare di $s \in GF(q)$.

Inoltre, questo flock ammette un gruppo di automorfismi che agisce due transitivamente sui piani del flock. Il gruppo é ST, dove

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & s & s^{\sigma} & s^{\sigma+1} \\ 0 & 1 & 0 & s^{\sigma} \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid s \ \in \ GF(q) \right\rangle$$

$$T = \left\langle \begin{bmatrix} t^{\sigma+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{\sigma-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{1-\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{-1-\sigma} \end{bmatrix} \mid t \ \in \ GF(q) \right\rangle .$$

Dim: Supponiamo che il siffatto insieme di piani ammetta il gruppo ST. Allora, abbiamo un flock se e soltanto se l'intersezione $\pi_1 \cap \pi_o \cap$(il cono) é banale. Questo equivale a mostrare che $\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3 = 0$ non é possibile per i punti (x_1, x_2, x_3) del cono. Le rette del cono sono

$$L_\infty = \langle (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle, L_t = \langle (1,t,t^{\sigma},0), (0,0,0,1) \rangle.$$

Nel primo caso, un'intersezione con L_∞ darebbe $x_1 = x_2 = 0$ e quindi $x_3 = 0$.
Nel secondo caso, un'intersezione con L_t implicherebbe $\beta(1 + t + t^{\sigma}) = 0$ per ogni $\beta \in GF(q)$. Quindi, la traccia $(1 + t + t^{\sigma}) = 0 =$ traccia(1). Ma quando $q \equiv -1$ mod 3 questo non é possibile.

Definizione 20.3. *Un flock come quello dato in (20.2) si chiama un flock ovale di traslazione di Thas.*

Questo flock corrisponde a un $(q + 1)$-arco in $PG(3, q)$. Allora, si puó prendere $C(\sigma) = \{(1, t, t^{\sigma}, t^{\sigma+1}), (0, 0, 0, 1) \mid t \in GF(q)\}$ per $\sigma = 2^s$, $q = 2^r$ dove $(r, s) = 1$ come un $(q + 1)$-arco. Il piano in $PG(3, q)$ che é tangente a

$(1, t, t^\sigma, t^{\sigma+1})$ é $t^{\sigma+1}\mathrm{x}_o + t^\sigma \mathrm{x}_1 + t\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 = 0$ (per esempio, si veda Lüneburg [**112**](44.3)). Il piano tangente a (0,0,0,1) é ($\mathrm{x}_o = 0$).

Teorema 20.4. (Jha-Johnson [**56**]).

Sia C un (q+1)-arco in PG(3,q), per q pari e q$\equiv -1$ mod 3. Allora, esiste esattamente una polarità simplettica β tale che per un punto fissato di C, Q_o, i piani $\{P^\beta \mid \mathbf{P} \in C - \{Q_o\}\}$ formano un flock ovale di traslazione di Thas.

Dim: Si noti che nelle rappresentazione date sopra, la polarità può essere definita dalle funzione g tale che $\mathrm{g}(\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{y}_o,\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\mathrm{y}_3) = \mathrm{x}_0\mathrm{y}_3 + \mathrm{x}_3\mathrm{y}_0 + \mathrm{x}_1\mathrm{y}_2 + \mathrm{x}_2\mathrm{y}_1$. Inoltre, $SL(2,q)$ agisce sul $(q+1)$-arco come un prodotto tensoriale $G = SL(2,q) \otimes SL(2,q)^\sigma$, dove la notazione indica la rappresentazione normale e la rappresentazione sghemba usando l'automorfismo σ. Il gruppo che agisce sul flock ovale di traslazione é un sottogruppo di ordine $q(q-1)$ di G.

Con (20.4), é possibile determinare tutti i flock isomorfi.

Teorema 20.5. (Jha-Johnson [**56**]).

In PG(3,2^r),r dispari, ci sono esattamente ϕ(r)/2 flock ovali di traslazione di Thas non sono isomorfi dove ϕ é la funzione di Eulero.

Inoltre, per tali flock vale che non esistono quattro piani del flock aventi un punto in comune.

Recentemente, Thas ha dimostrato il seguente teorema:

Teorema 20.6. (Thas [**139**]).

Sia F un flock conico in PG(3,q) per q ≥ 4. Se (a) q é pari o (b) q é dispari, con $q > 83$ o $q < 17$ o $q = 27$ o $q = 81$, allora, F é il flock di Fisher-Thas-Walker se e soltanto se non ci sono quattro piani del flock che hanno un punto in comune.

La dimostrazione di Thas usa la teoria della cubica sghemba. É possibile, quindi, provare il seguente teorema.

Teorema 20.7. (Jha - Johnson [**56**]).

Sia F un flock ovale in PG(3,2^r) tale che non ci sono quattro piani di F che hanno un punto in comune. Allora, F é un flock ovale di traslazione di Thas.

Quando l'ovale é una conica, questi flock si chiamano **flock di Betten** perché questi flock corrispondono ai piani di traslazione di Betten [**11**]. Questi flock ammettono un gruppo di automorfismi che agisce in modo 2-transitivo sui piani del flock. Allora poniamo la seguente domanda:

Quali sono i flock ovali che ammettono un gruppo 2-transitivo?

Per esempio, il flock di Kantor-Knuth ammettono un gruppo 2-transitivo.

Ricordiamo che il piano di traslazione corrispondente a questo flock può essere rappresentato nella seguente forma:
La fibrazione in $PG(3,q)$ consiste degli spazi vettoriali $x=0$, $y=x\begin{bmatrix} u & \alpha t^{\sigma} \\ t & u \end{bmatrix}$ tale che $u,t \in GF(q)$, q dispari, α fissato in $GF(q)$, σ un automorfismo per ogni elemento t in $GF(q)$. Questa fibrazione é un fibrazione su un semicorpo e quindi esiste un gruppo transitivo. Ma anche il seguente gruppo agisce sul piano:

$$\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{(\sigma-1)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{(\sigma+1)/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{\sigma} \end{bmatrix} \mid t \in GF(q) - \{0\} \rangle$$

Questo gruppo induce un gruppo di automorfismi sul flock che agisce 2-transitivamente.

Jha e Johnson hanno determinato completamente tale classe:

Teorema 20.8. (Jha-Johnson [**57**], [**58**]).

Sia F un flock ovale in $PG(3, q)$ che ammette un gruppo in $PGL(4, q)$ 2-transitivo sui piani del flock. Allora si ha uno dei seguenti casi:

(1) F é lineare

(2) L'ovale é un ovale di traslazione

(a) Se q é dispari allora il flock é un flock di Kantor-Knuth o un flock di Fisher-Thas-Walker.

(b) Se q é pari e l'ovale é una conica allora il flock é un flock di Betten.

(c) Se q é pari e l'ovale non é una conica allora il flock é un flock ovale di traslazione di Thas.

CAPITOLO 21

Quasicorpi di Bol e flock iperbolici infiniti

Si é giá parlato di flock iperbolici in $PG(3,q)$. In questo caso, si ricordi il teorema di Thas-Bader, Lunardon ([**45**], [**134**]) che dá una classificazione dei tipi di flock. In particolare, i piani corrispondenti sono sempre piani su un quasicorpo associativo. Buona parte del suddetto teorema é contenuta in un precedente risultato di Thas [**134**] il quale prova che tutti i piani corrispondenti ai flock iperbolici sono piani di Bol.
é possibile sviluppare la teoria che lega i flock iperbolici e piani di traslazione le cui fibrazioni consistono di regoli in $PG(3,K)$ che hanno una retta in comune, per K campo finito o infinito.

Allora ci poniamo le seguenti domande:

Tutti i piani di traslazione che corrispondono ai flock iperbolici in PG(3,K), per Kcampo infinito, sono piani di Bol?

I piani di traslazione che corrispondono ai flock iperbolici sono anche piani su un quasicorpo associativo?

Si ricordi che un piano di traslazione é un piano di Bol se e soltanto se esiste un insieme di coordinate Q tale che $a(b(ac)) = (a(ba))c$ per ogni $a, b, c \in Q$. Per rispondere alle domande formulate sopra, cominciamo a studiare i piani di André. Sia K un campo che contiene elementi che non sono quadrati. Sia γ un elemento che non é un quadrato e si ponga $K(\sqrt{\gamma}) = F$. Sia Σ_F il piano di Pappo che può essere coordinatizzato dal campo F. Si scrivano le componenti come $x = 0$ e $y = xa$ per ogni $a \in F$. Consideriamo i piani di André con fibrazioni in $PG(3,K)$.
Sia σ l'automorfismo di F di ordine due che fissa ogni punto di K.

Studiando i piani finiti che corrispondono ai flock iperbolici, Johnson trovato che esiste sempre un gruppo di omologie H tale che per ogni componente L, L H unione l'asse e il coasse formano un regolo. Ció vale anche per piani infiniti. Cioé, se esiste un gruppo di questo tipo, esiste un flock iperbolico corrispondente.

Il gruppo in questo caso ha la forma (nel piano di Pappo):

$$G = \langle (x,y) \to (xu, yv) \mid u,v \in K - \{0\} \rangle.$$

Una rete di André A_α ha componenti: $\{y = xm \mid m^{\sigma+1} = \alpha\}$ dove α é fissato in K.
é chiaro che G permuta le reti di André, perché $y = xm \to y = x(u^{-1}v)m$ e $(u^{-1}vm)^{\sigma+1} = (u^{-1}v)^2 m^{\sigma+1}$.
Allora, proviamo a costruire tutti i piani di André in $PG(3,K)$, che ammettono il gruppo G.
Costruiamo i piani di André con rete di sostituzione. Allora, sostituiamo la rete A_α con la rete $A^*_\alpha = \{y = xm^\sigma \mid y = xm \in A_\alpha\}$ per α in un insieme $\lambda \subset K$. Abbiamo bisogno di un moltiplicazione $*$ tale che gli elementi di K s1ano nel centro dell'insieme delle coordinate $(Q,+,*)$. Per un piano di André, x∗m = $\mathrm{x}^{\sigma^{(m^{\sigma+1}g)}}$m tale che g é una qualunque funzione da K^* in Z_2 con $1g = 0$. Quindi, $x*m = xm$ per $m \in K$ se e soltanto se, $m^{\sigma+1}g = 0$ per tutti gli elementi $m \in K$ e questo é vero se e soltanto se $m^2 g = 0$ per tutti gli $m \in K$. Inoltre, $A_\delta \to A_{\delta\alpha^2}$ di G per tutti elementi α^2 in K. Allora, quando si sostituisce A_δ dobbiamo sostituire $A_{\delta\alpha^2}$ per tutti α^2. Sia S il sottogruppo in $K - \{0\}$ di elementi che sono quadrati. Si noti che K^*/S é un 2-gruppo abeliano elementare. Quando scegliamo una rete di André A_δ per la sostituzione, allora dobbiamo prendere anche le reti $A_{\delta\alpha^2}$ per tutti gli α^2 in K. Questo corrisponde alla selezione di un insieme λ^+ di K^*/S tale che la funzione g può essere estesa a K^*/S e $\delta S \to 1$ di g^+ se e soltanto se $\delta \to 1$ di g e quindi $\alpha^2\delta \to 1$ di g.

Teorema 21.1. (Johnson [**86**]).

(1) L'insieme dei quasicorpi di André che possono essere construiti da un corpo $F = K(\sqrt{\gamma})$ con K contenuto nell'intersezione del nucleo con il nucleo destro (questo produce a piani di traslazione che corrispondono a flock iperbolici) é equivalente all'insieme delle funzioni da K^*/S a $GF(2)$ tale che $S \to 0$ dove S é il sottogruppo di elementi di K^* che sono quadrati.

(2) L'insieme dei quasicorpi associativi di André che corrispondono a flock iperbolici é ottenuto come l'insieme dei funzionali lineare di K^*/S riguardato come spazio vettoriale su $GF(2)$. Quindi, c' é una corrispondenza biunivoca tra quasicorpi associativi di André che corrispondono ai flock iperbolici e lo spazio duale di K^*/S.

Con questo teorema, possiamo provare:

Proposizione 21.2. (Johnson [**86**]).

(1) Se la dimensione di K^*/S é finita, allora, il numero di piani di André che corrispondono ai flock iperbolici é $2^{|K^*/S|-1}$. Inoltre, la funzione zero corrisponde al piano Pappiano.

(2) Se la dimenzione é 1 (l'ordine 2), ci sono esattamente due piani di André di questo tipo: il piano Pappiano e un piano su un quasicorpo associativo.

Ció si verifica quando l'ordine di K é finito e dispari, quando K é il campo di numeri reali, o quando K é un'estensione algebrica di un campo finito, ma non é un'estensione quadratica di estensioni quadratiche.

(3) Il numero di piani di André che non sono piani su quasicorpi associativi é $2^{|K^*/S|-1} - 2^d$ dove $d = log_2 K^*/S$.

(4) Se la dimensione di K^*/Sé infinita, il numero di piani di André che non sono piani su quasicorpi associativi é infinito.

(5) Sia la dimensione di K^*/S maggiore di uno. Allora, c'é un flock iperbolico che non corrisponde ad alcun piano su un quasicorpo associativo.

Possiamo anche provare che:

Teorema 21.3. (Johnson [**86**]).

Ogni piano di André che corrisponde a un flock ipberbolico é un piano di Bol.

Allora, abbiamo una situazione totalmente diversa nel caso infinito e in quello finito. Ci sono molti esempi di flock iperbolici che non sono isomorfi.

Teorema 21.4. (Johnson [**86**]).

(1) Un flock lineare iperbolico in $PG(3, K)$ corrisponde a un piano Pappiano coordinatizzato da un'estensione quadratica di K.

(2) Due flock lineari in $PG(3, K)$ sono isomorfi se e soltanto se le estensioni corrispondenti sono isomorfe.

(3) Esistono corpi K per cui esiste un numero infinito di flock lineari iperbolici in $PG(3, K)$ a due a due non isomorfi.

DEFINIZIONE 21.5. *Consideriamo un corpo K e una sua estensione $K(\sqrt{\gamma})$. Costruiamo piani di André usando il metodo delle reti di sostituzione dato prima. Sia U l'insieme delle reti di André che non sono sostituite e sia R^* l'insieme delle rete di André che sono sostituite. La fibrazione per un piano di questo tipo é $U \cup R^* \cup \{x = 0, y = 0\}$. Per un piano di questo tipo si usa la notazione $\pi = U \cup R^*$.*

TEOREMA 21.6. (Johnson [**86**]).

Siano $\pi_1 = U_1 \cup R_1^*$ e $\pi_2 = U_2 \cup R_2^*$ piani di André sono isomorfi e non Pappiani, construti con il metodo dato in questo Capitolo.

Allora un automorfismo trasforma $U_1 \to R_2^*, R_1^* \to U_2$, oppure $U_1 \to U_2, R_1^* \to R_2^*$.

COROLLARIO 21.7. *Sia π un piano di André su un quasicorpo associativo con fibrazione in PG(3,K)costruito con il metodo dato sopra a partire da un piano Pappiano Σ coordinizzato da un'estensione quadratica F di K. Sia g un elemento dello spazio duale di K^*/S dove S é il sottogruppo di K^* tale che gli elementi non sono quadrati. Siano U la rete sostituita e R^* quella non sostituita tali che $\pi = U \cup R^*$. Allora, esiste un collineazione che scambia U e R^*.*

Per le classi di isomorfismo, si ha:

TEOREMA 21.8. (Johnson [**86**]).

Le classi di isomorfismo di piani di André su un quasicorpo associativo che possono essere costruite come sopra sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle orbite dei sottogruppi di indice due di K^*/S del gruppo degli automorfismi di K.

Il gruppo degli automorfismi di K induce un'azione naturale sullo spazio duale di K^*/S riguardato come spazio vettoriale su $GF(2)$ e le orbite di tale gruppo determina le classi di isomorfismo di piani di André su un quasicorpo associativo.

COROLLARIO 21.9. *Assumiamo che il gruppo degli automorfismi di un campo K é banale ed esiste un'estensione quadratica F di K.*

Allora l'insieme delle classi di isomorfismo di piani di André su un quasicorpo associativo che corrispondono ai flock iperbolici e possono essere costruiti da F (cioé, dal piano Pappiano corrispondente) é in corrispondenza biunivoca con lo spazio duale di K^*/S riguardato come spazio vettoriale su $GF(2)$.

Inoltre, teorema, senza l'ipotesi che i quasicorpi siano associativi, si ha:

TEOREMA 21.10. (Johnson [**86**]).

Sia K un corpo che ha estensioni quadratiche F_1 e F_2. Siano π_1 e π_2 piani di André che possono essere costruiti dai piani di Pappo Σ_{F_1} e Σ_{F_2} rispettivamente come sopra. Se π_1 e π_2 sono isomorfi, allora i campi F_1 e F_2 sono isomorfi.

TEOREMA 21.11. (1) Esiste un numero infinito di estensioni quadratiche del campo razionale i cui gruppi di automorfismi sono banali.

(2) Per ogni corpo K in (1), esiste un insieme di primi tali che radici quadrate e quozienti di radici quadrate non sono in K. Allora, esiste un numero infinito di estensioni quadratiche che non sono isomorfe.

(3) Per ogni corpo K in (1) e per ogni estensione in (2), esiste un insieme di piani su quasicorpi associativi tali che l'insieme delle classi di isomorfismo é in corrispondenza biunivoca con lo spazio duale diK^*/S riguardato come spazio vettoriale su GF(2).

Allora ci sono infiniti piani su quasicorpi associativi che non sono isomorfi e quindi ci sono infiniti flock iperbolici che non sono isomorfi che corrispondono ai piani su un quasicorpo associativo.

R.P Burn [**22**] ha dato il primo esempio di piano di Bol che non é un piano su un quasicorpo associativo.

Gli esempi dati di flock iperbolici corrispondono sempre ai piani di Bol.

Ma R. Riesinger [**130**] nel l992 ha trovato un esempio di piano di traslazione che corrisponde ad un flock iperbolico. I flock di Riesinger non corrispondono a piani di Bol.

Teorema 21.12. (Johnson [**86**]).

Esiste un flock iperbolico infinito che non corrisponde ad alcun piano di Bol.

CAPITOLO 22

Quasifibrazione e flock parziali di un cono infinito

De Clerck e Van Maldeghem [**27**] hanno studiato i flock infiniti di un cono quadratico, i piani di traslazione corrispondenti e la possibilità di ottenere i quadrangoli generalizzati. In particolare, De Clerck e Van Manldeghem hanno costruito alcuni esempi di flock infinti. Per esempio, ci sono esempi infiniti che sono simili ai flock di Fisher-Thas-Walker e di Kantor. Anche, Jha e Johnson [**55**] hanno costruito alcuni esempi di flock infiniti. I nostri metodi sono molto diversi dai metodi di De Clerck e Van Maldeghem e usano fibrazioni e fibrazioni parziali corrispondenti. Inoltre, i nostri metodi permettono di costruire alcuni esempi di fibrazioni parziali massimali che non esistono in spazi proiettivi finiti:
Sia F un campo e sia K un'estensione quadratica di F. Sia Σ il piano Pappiano che può essere coordinatizzato da K. Se $K = F(\sqrt{\gamma})$, allora é possibile rappresentare Σ (cioé la fibrazione di Σ) come:

$$x = 0, \qquad y = x \begin{bmatrix} u & \gamma t \\ t & u \end{bmatrix}$$

per ogni $u, t \in K$. L'insieme

$$R_t = \{x = 0,\ y = x \begin{bmatrix} u & \gamma t \\ t & u \end{bmatrix} \mid u \in F\}$$

é un regolo in $PG(3, F)$.

Si é visto che esiste un sottopiano di Baer π_o (cioé, uno sottospazio vettoriale di dimensione due) tale che quando π_o interseca una retta di R_t. Allora esistono esattamente due rette di R_t che intersecano π_o. In particolare il sottopiano $\pi_o = \langle(0,1,0,0),(1,0,1,0)\rangle$ ha la seguente proprietà: sia $\lambda \subset F$ l'insieme degli elementi t tali che R_t e π_o hanno intersezione non-banale. Sia $H = \langle(\mathrm{x,y}) \rightarrow (\mathrm{xa}^2,\mathrm{ya}^2) \mid \mathrm{a}^2 \in F\rangle$. Allora, H é un gruppo di collineazioni di Σ che fissa ogni rete R_t. Anche

$$E = \left\langle (x, y) \rightarrow (x, y) \begin{bmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid u \in F \right\rangle$$

é un gruppo di collineazioni di Σ che fissa ogni rete R_t.

Sia R_{π_o} la rete di Σ che contiene π_o tale che ogni componente di R_{π_o} é un componente di π_o.

Proposizione 22.1. (Jha-Johnson [**55**]).

$R_{\pi_o}E$ é un insieme di regoli in $PG(3,F)$ tale che ogni componente di $R_{\pi_o}E$ é contenuta in esattamente due regoli. Si noti che $R_{\pi_o}E = \cup_{t\in\lambda} R_t$. Un insieme di questo tipo si chiama un E-nido di regoli. Inoltre, per opportuni campi, $\pi_o EH$ é una fibrazione parziale tale che $\pi_o EH$ e $R_{\pi_o}E$ sono fibrazioni parziali che si coprono. Allora, é possibile usare reti sostituibili per costruire un altro piano di traslazione.

É possibile provare che:

Teorema 22.2. (Jha-Johnson [**56**]).

Sia F un campo tale che

(i) il sottogruppo degli elementi che sono quadrati é un sottogruppo di indice due

(ii) -1 é un quadrato di F.

Sia $K = F(\sqrt{\gamma})$ con γ non-quadrato in K e si supponga che

(iii) il sottogruppo degli elementi di K che sono quadrati é un sottogruppo di indice due di K.

Sia Σ il piano Pappiano coordinatizzato da K. Sia E il sottogruppo di elazioni di asse x $= 0$ che agisce transitivamente sulle rette, diverse da x $=$ 0, di regoli che contenono x $= 0$. Queste reti si chiamano i regoli base. Sia H il sottogruppo di omologie di Σ generato dai quadrati degli elementi di K.

(1) Allora, esiste un piano di traslazione Σ_{π_o} ottenuto dal piano Σ con la rete di sostituzione usando un E-nido di regoli.

(2) Esiste un sottopiano di Baer π_o che ha la proprietà che ha zero o due componenti di intersezione con i regoli basi. Il $E-$nido é l'insieme $R_{\pi_o}E$ e la rete di sostituzione é π_oEH. Inoltre, Σ_{π_o} ha una fibrazione che é unione di regoli che hanno una retta in comune.

Non é difficile estendere la teoria ai piani infiniti e ai flock infiniti.

DEFINIZIONE 22.3. *Un flock costruito con il metodo dato in (22.2) é detto flock generalizzato di Fisher.*

ESEMPIO 22.4. *Sia P un campo isomorfo a GF(p), con p≡1 mod 4, tale che -1 sia un quadrato in P. Sia F una qualunque estensione algebrica di P che non sia chiusa (algebraicamente) e che non sia una serie di estensioni quadratiche di P. Allora, il sottogruppo di elementi che sono quadrati ha indice due.*
Questi esempi fornisce un grande numero di esempi di flock generalizzati di Fisher.

De Clerck e Van Maldeghem hanno costruito un esempio di flock infinito che é simile ad un flock di Fisher-Walker-Thas nel caso finito. Probabilmente questo esempio dovrebbe essere attribuito anche a D. Betten. Nel 1973, Betten [**11**] ha trovato alcuni esempi di piani di traslazione che corrispondono ai flock di un cono quadratico. Gli argomenti di Betten non usano l'ipotesi che i piani siano finiti. Infatti, c'é un esempio con fibrazione in PG(3,R) dove R é l'insieme dei numeri reali.

TEOREMA 22.5. (Jha-Johnson [**55**]).

Sia K un campo in caratteristica diversa da 3 e si consideri la funzione $f\colon K \to K$, tale che $f(x) = x^3$. Sia V$_4$ uno spazio vettoriale su K e consideriamo i sottospazi

$$x = 0, \qquad y = x\begin{bmatrix} u - s^2 & -s^3/3 \\ s & u \end{bmatrix}$$

per ogni $s, u \in K$.

(1) Se f é iniettiva allora l'insieme di questi sottospazi forma una fibrazione parziale in $PG(3, K)$.

(2) Se f é biettiva allora, quest'insieme é una fibrazione.

Betten [**11**] ha provato che quando K é isomorfo a GF(q), con q$\equiv -1$ mod 3 oppure quando K é il campo di numeri reali, ci sono fibrazioni e quindi piani di traslazione. Si noti che tale definizione produce i piani di Walker quando q é dispari.

Definizione 22.6. *Una fibrazione parziale come in (22.5)(1), si chiama fibrazione parziale generalizzata di Betten. Una fibrazione come in (22.5)(2), si chiama fibrazione generalizzata di Betten.*

Infatti, la situazione in (22.5)(1) dá una fibrazione parziale massimale.

Teorema 22.7. (Jha-Johnson [**55**]).

Una fibrazione parziale generalizzata di Betten é una fibrazione o una fibrazione parziale massimale.

Esempio 22.8. *Sia $K = Q$ il campo dei numeri razionali. La funzione $f(x) = x^3$ é iniettiva ma non suriettiva. Quindi, c'é una fibrazione parziale generalizzata di Betten che é una fibrazione parziale massimale.*
Più in generale, si puó considerare un qualunque campo contenente Q e contenuto nel campo di numeri reali e tale che non contiene tutti i numeri della forma $\alpha^{1/3}$. Allora, abbiamo un elevato numero di esempi di fibrazioni parziali massimali di questo tipo.

Esempio 22.9. *(1) Sia Q il campo dei numeri razionali. Per ogni elemento x in Q, si aggiunga $4x^{1/3}$. Sia $K = Q(x^{1/3})$ tale che x in Q. In questo caso, $f(x) = x^3$ é biettiva.*

(2) Più in generale, si puó considerare un qualunque campo contenente Q e contenuto nel campo di numeri reali a cui viene aggiunto $x^{1/3}$ per tutti gli elementi di F e ottenere un campo K tale che f é biettiva.

Quindi abbiamo diversi esempi di fibrazioni generalizzate di Betten.

Gli esempi descritti sopra inducono a studiare fibrazioni parziali con le proprietà date sopra.

Definizione 22.10. *Sia N una rete finita o infinita. Sia P un punto e sia L_P l'insieme delle rette che sono incidenti con P. Sia α una qualunque classe di parallelismo e sia M una retta di α che non é incidente con P. La rete si chiama una rete ricoperta da una classe se e solo se i punti di M sono contenuti nelle intersezioni con L_P.*
Per esempio, la rete $x = 0$, $y = x \begin{bmatrix} u - s^2 & -s^3/3 \\ s & u \end{bmatrix}$ per ogni $s, u \in K$ é una rete ricoperta da una classe con punto P = (0,0), e retta M di equazione (x = 1).

Si noti che

$$(x = 1 = (1, 0)) \cap \{x = 0,\ y = x \begin{bmatrix} u - s^2 & -s^3/3 \\ s & u \end{bmatrix}$$

per ogni s, u in K é $(x = 1)$.

Teorema 22.11. (Jha-Johnson [**59**]).

Una rete ricoperta da una classe rispetto alla retta M e al punto P é: un piano affine oppure una rete massimale che non contiene trasversali contenti P.

Dim: Se la rete non é un piano affine, sia T una trasversale che contiene P. Allora, T ed M hanno un'unica intersezione Q. Tutttavia eistse una retta della rete che contiene P e Q. Assurdo.

Definizione 22.12. *Una rete ricoperta da una classe é una rete ricoperta da una classe di traslazione se e solo se esiste un gruppo di collineazioni G che fissa ogni classe di parallelismo e agisce transitivamente sui punti affini. Un siffatto gruppo si chiama gruppo di traslazione. Tale gruppo di traslazione, se esiste, non é necessariament unico, o abeliano o abeliano elementare.*

Teorema 22.13. (Jha-Johnson [**59**]).

Sia N una rete ricoperta da una classe di traslazione con gruppo di traslazione abeliano (questa rete si chiama rete ricoperta da una classe abeliana). Allora un insieme $(Q, +, *)$ di coordinate può essere scelto in modo tale che:

(i) $(Q, +)$ é un gruppo abeliano,

(ii) per ogni m in Q, esiste una classe associata di parallelismo (m) tale che la funzione T ternaria é lineare, cioé T(x,m,b) = x$*$m + b. Inoltre, per $a \neq b, c$ esiste un'unica soluzione dell'equazione x$*$a = x$*$b + c.

(iii) (c+a)$*$m = c$*$m + a$*$m per ogni a,c, m di Q.

(iv) Viceversa, una rete con un insieme di coordinate con la proprietà (ii) é una rete ricoperta da una classe.

Adesso, é possible formulare una teoria simile a quella sopra per quasicorpi.

Infatti:

Proposizione 22.14. (Jha-Johnson [**56**]).

Sia N una rete ricoperta da una classe abeliana. Si scelgano le coordinate come in (22.13).

(1) Allora, esiste uno corpo K tale che $(Q, +)$ é uno K- spazio vettoriale.

(2) Le rette che contengono il vettore nullo sono isomorfe come K-spazi.

Definizione 22.15. *Sia V uno spazio vettoriale della forma $W \oplus W$ dove W é un K-spazio. Sia B un base per W e scegliamo un vettore v in $W \oplus 0$. Una quasifibrazione Q é un insieme di spazi, tali che a due a due hanno intersezione identica, contenente $W \oplus 0, 0 \oplus W$ e con la proprietà che per ogni vettore della forma $v+w$, esiste un sottospazio di Q che contiene $v+w$.*

Teorema 22.16. (Jha-Johnson [**59**]).

Una quasifibrazione é un fibrazione o una fibrazione parziale massimale.

Teorema 22.17. (Jha-Johnson [**59**]).

Una rete ricoperta da una classe abeliana é equivalente ad una quasifibrazione.

Definizione 22.18. *Un insieme di coordinate come in (22.13) si chiama un pseudo quasicorpo.*

Allora, si ha:

Teorema 22.19. (Jha-Johnson [**59**]).

Le seguenti strutture sono equivalenti:

(1) le reti coperte da classi abeliane,

(2) le quasifibrazioni,

(3) gli insiemi di pseudo quasicorpi.

Si noti che possiamo costruire reti di sostituzione ricoperte da classi abeliane a partire da reti ricoperte da classi abeliane. Infatti, possiamo usare la derivazione delle fibrazioni parziali generalizzate di Betten per avere molti esempi di quasifibrazioni.

Con riferimento alla teoria dei flock, si ha:

Teorema 22.20. (Jha-Johnson [**59**]).

(1) Per ogni quasifibrazione in $PG(3, K)$, che ammette un gruppo di elazioni E tale che una E-orbita sulla quasifibrazione unione l'asse di E formi un regolo in $PG(3, K)$, esiste un flock parziale conico. Inoltre, se la quasifibrazione é massimale allora il flock parziale conico é massimale.

(2) Per ogni quasifibrazione in $PG(3, K)$, con Kcampo che ammette un gruppo di omologie H tale che una H-orbita sulla quasifibrazione unione l'asse di H formi un regolo in $PG(3, K)$, esiste un flock parziale iperbolico. Inoltre, se la quasifibrazione é massimale allora il flock parziale iperbolico é massimale.

Per maggiori informazioni a riguardo si veda [**59**].

CAPITOLO 23

Nidi misti

Ricordiamo che

Teorema 23.1. (Johnson-Pomareda [**96**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo che contiene $K \cong GF(q)$. Se π ammette un gruppo G nel complemento di traslazione tale che G é il prodotto diretto di due gruppi ciclici di omologie di ordine $q+1$ con assi affini, allora, si ha una delle seguenti situazioni:

(1) π é un piano di André,

(2) q é dispari e π é costruito a partire da un piano di Desargues Σ tramite sostituzione di un $(q+1)$-nido,

(3) q é dispari e π é costruito da un piano di Desargues Σ con una combinazione della sostituzione di un $(q+1)$-nido e della sostituzione delle reti di André in Σ.

Sia G il gruppo di ordine $(q+1)^2$ descritto nel teorema sopra. In questa situazione (cioé, la situazione in cui si ha un $(q+1)$-nido), esiste un sottopiano di Baer L di un piano Desarguesiano Σ di ordine q^2 tale che LG é un insieme di $(q+1)^2/2$ sottopiani di Baer . Inoltre, tale insieme di sottopiani produce una rete tale che possiamo usare reti di sostituzione per ottenere da Σ un $(q+1)$-nido di regoli. Esiste un unico regolo R_L di grado $(q+1)$ che contiene L come sottopiano di Baer. Il $(q+1)$ - nido é R_LG.

Assumiamo $q \equiv 1 \bmod 4$. Ci sono due sottogruppi ciclici di omologie di ordine $(q+1)/2$ in G. Sia G^- il sottogruppo corrispondente di ordine $(q+1)^4/4$. In questo caso, R_LG^- é un insieme di $(q+1)/2$ regoli. I risultati di Johnson e Pomareda implicano che ci sono $(q+1)/2$ reti di André in Σ tale che ciascuna ha due componenti in comune con R_L. Supponiamo che

ci siano j di queste reti di André tali che le componenti in comune con R_L giacciono nelle orbite del gruppo G^-. Quindi, ci sono $((q+1)/2-j)$ reti di André tali che le due componenti in comune con R_L sono nelle stesse orbite del gruppo G^-. Nella situazione di prima, succede che LG copre esattamente $(q+1)/2$ sottopiani di Baer di ogni rete di André; nell'ultima situazione, LG ha un'intersezione con ogni sottopiano di Baer della rete di André. Denotiamo le reti di André che hanno due componente con R_L in orbite diverse con $A_1, A_2, \ldots, A_i$. Poiché ogni rete A_j é una rete di un regolo, se consideriamo l'insieme di reti $R_LG^- \cup A_j$ come un insieme di $((q+1)/2+j)$-regoli, si ottiene anche un $((q+1)/2+j)$-nido. Poiché questa rete contiene varie tipi di reti che possono essere ottenute dalla rete R_L, da un gruppo particolare G^- e da reti di André, si chiama un $((q+1)/2+j)$-nido misto o più semplicemente un nido misto. In realà, ci sono due nidi misti che possono essere ottenuti dal gruppo di ordine $(q+1)^2$ dato sopra e due piani di traslazione che possono essere costruiti con reti di sostituzioni di questi nidi misti. Ogni piano di traslazione di questo tipo ammette due gruppi di omologie di ordine $(q+1)/2$. Si ricordi che il piano originale ammette due gruppi di omologie di ordine $(q+1)$. In questo caso, i piani costruiti non ammettono un gruppo di omologia di ordine $(q+1)$. Recentamente, Pomareda e Johnson hanno studiato queste reti miste. In particolare ci hanno interessato i piani di traslazione con fibrazione in $PG(3,q)$ che ammettono due gruppi di omologie di ordine $(q+1)/2$ che si normalizzano. Quando $q \equiv 1 \bmod 4$, possiamo ipotizzare che esiste un gruppo di ordine $(q+1)^2/4$ contenente questi sottogruppi di omologie. Per ragioni tecniche, quando q $\equiv -1 \bmod 4$, dobbiamo fare l'ipotesi che c'é un gruppo abeliano di ordine $(q+1)^2/2$ che contene questi sottogruppi di omologie.
Si noti che quando si studia un piano di traslazione con fibrazione in $PG(3,q)$ che ammette un gruppo G^- abeliano di ordine $(q+1)^2/2(2,(q-1)/2)$ é possible ottenere un piano di traslazione che può essere costruito con rete di sostituzione di un $(q+1)$-nido di regoli. In questo caso, c'é anche un gruppo abeliano G di ordine $(q+1)^2$ tale che $G^- \subset G$. Non é difficile vedere che esistono G^--**due orbite** di lunghezza $(q+1)^2/4$. Questa possibilità crea qualche difficoltá. Se si ipotizza che c'é solo un'orbita di lunghezza maggiore di $(q+1)$, allora é possibilie avere una classificazione.

Teorema 23.2. (Johnson e Pomareda [**95**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2, per q dispari e diverso da 3 o 7, con fibrazione in $PG(3,q)$. Si assuma che il piano ammette due gruppi ciclici di omologie di ordine $(q+1)/2$ contenuti in un gruppo abeliano di collineazioni di ordine $(q+1)^2/2(2,(q-1)/2)$. Se esiste un'unica orbita di componenti di lunghezza maggiore di $(q+1)/(2,(q-1)/2)$ allora esiste un piano associato Desarguesiano Σ, un nido misto M, e si ha uno dei due casi :

(1) Il piano π può essere costruito da Σ con rete di sostituzione del nido misto M

(2) C'é un insieme di reti di André N che possono essere definite con l'asse e il coasse dei gruppi di omologie tale che π può essere costruito da reti di sostituzioni di M unito alla derivazione multipla di reti di André di N.

Sia Σ un piano Desarguesiano di ordine q^2 con coordinate nel campo F isomorfo a $GF(q^2)$ con q e $(q+1)/2$ sono dispari. Sia $\{1,t\}$ una base per F su $K \simeq GF(q)$ con $t^2 = \gamma$ dove γ é un non quadrato. Allora, $t^{q+1} = -\gamma$ tale che $t^q = -t$. Consideriamo una rete di André $\{y = xm$ in Σ tale che $A_\alpha = m^{q+1} = \alpha\}$ per α in K. Sia T un sottospazio di dimensione 2 che non giace nella rete di André e che non abbia un'intersezione con $x = 0$ o $y = 0$. Consideriamo la rete del regolo R_T in Σ di grado $q+1$ che contiene T come sottopiano di Baer. Sia $G^- = \{\mathrm{Diag}\,(a,b) \mid a,b$ in F con l'ordine che divide $(q+1)/2\}$. Allora, l'ordine di G^- é $(q+1)^2/4$. Si noti che G^- é il prodotto diretto di due gruppi di omologie di Σ di ordine $(q+1)/2$.

(1) Sia A una rete di André tale che A e R_T hanno due componenti in comune. Poiché T non é in A come sottopiano di Baer, esistono due sottopiani di Baer (che sono sottospazi vettoriali) di A aventi intersezione non-banale con T. Una rete di André di questo tipo si chiama una $D/S-$rete se e solo se le componenti dell'intersezione sono in orbite diverse ma i sottopiani di Baer dell' intersezione sono nelle stesse orbite.
Analogamente possiamo avere reti di tipo S/D, S/S, D/D.

(2) Una rete di André che ha solo una retta in comune con R_T si chiama una 1-rete.

Proposizione 23.3. (Johnson-Pomareda [**95**]).

(1) Per uno spazio T, se esiste una D/S - rete di André allora tutte le reti di André dell' intersezione sono D/S o S/D -reti.

(2) Se esiste una D/S - rete di André allora possiamo scegliere coordinate tali che $T = \langle$(1,1), (ta,-tb)$\rangle$con a,b che hanno ordini che dividono (q+1)/2 e $ab \neq 1$.

Teorema 23.4. (Johnson-Pomareda, si veda [**95**] (Theorem 8).

Sia Σ un piano Desarguesiano di ordine q^2 tale che $q \equiv 1 \bmod 4$. Se T é uno spazio di dimensione due tale che esiste una rete di André di tipo D/S o S/D allora tutte le immagini di T sotto l'azione del gruppo G^- (di ordine $(q+1)^2/2$ che é il prodotto diretto di due gruppi di omologie in Σ) hanno a due a due intersezione identica.
Esistono j reti di André che sono D/S-reti. Siano queste reti $N_1, N_2, \ldots, N_j$. Allora, per ogni rete N_k, esiste un insieme B_k di $(q+1)/2$ sottopiani che non hanno intersezione in TG^-.
Sia R_L la rete del regolo di grado $q+1$ in Σ che contiene T come sottopiano di Baer. Allora, $R_L \cup \{N_1, N_2, \ldots, N_j\}$ é un $((q+1)/2+j)$-nido misto che ammette una rete di sostituzione che consiste di $TG^- \cup \{B_1, B_2, \ldots, B_j\}$.

Abbiamo un teorema simile per $q \equiv -1 \bmod 4$ con un opportuno cambio dell'ipotesi. Abbiamo visto che per un $(q+1)$-nido, ci sono $((q+1)+j)$-nidi. Anche, da un $((q+1)/2+j)$-nido possiamo costruire un $(q+1)$-nido.

Teorema 23.5. (Johnson-Pomareda [**95**]).

Sia π un piano di traslazione con fibrazione in $PG(3,q)$ che può essere costruito da un $((q+1)/2+j)$-nido e tale che ammette un gruppo abeliano di ordine $(q+1)^2/2(2,(q-1)/2)$. Allora, esiste un piano di traslazione che può essere costruito da un $(q+1)$-nido e ammette due gruppi di omologie di ordine $q+1$.

Con un $((q+1)/2+j)$-nido possiamo costruire $(q+1-j)$-nidi.

Teorema 23.6. (Johnson-Pomareda [**95**]).

$((q+1)/2+j)$-nidi sono equivalenti a $((q+1)-i)$-nidi.

Dim: Consideriamo un piano Desarguesiano Σ e un insieme di reti di André. Deriviamo rispetto a queste reti. É facile vedere che questa costruzione produce a un altro piano Desarguesiano Σ^* che ha solo due componenti in comune con Σ. Ora, verifichiamo che una D/S-rete di André in Σ produce a una $S/D-$rete di André in Σ^*. Allora, ci sono (q-1) reti di André in Σ e di queste (q+1)/2 reti di intersezione di cui esattamente j di queste reti sono di tipo D/S. Allora $(q+1)/2-j$ di queste reti sono S/D-reti. Possiamo dimostrare che ad un sottospazio T di Σ corrisponde un sottospazio T^* di

Σ^* tale che una D/S-rete in Σ diventa una S/D-rete in Σ^* e una S/D-rete in Σ^* diventa una D/S-rete in Σ^*. Quindi un $((q+1)/2+j)$-nido misto in Σ dá luogo a un $((q+1)/2+(q+1)/2-j)=(q+1-j)$-nido misto.

Una domanda naturale é se questi piani di traslazione che possono essere costruiti con nidi misti sono piani nuovi.

Teorema 23.7. (Johnson-Pomareda [**95**]).

Sia π un piano di traslazione con fibrazione in $PG(3,q)$ che ammette un gruppo abeliano di ordine $(q+1)^2/2(2,(q-1)/2)$ che contenente due gruppi di omologie di ordine $(q+1)/2$. Allora, π é un piano di André se e solo se ogni orbita di componenti ha lunghezza minore o uguale $(q+1)/(2,(q-1)/2)$.

Allora, si ha:

Teorema 23.8. (Johnson-Pomareda [**95**]).

Sia π un piano di traslazione con fibrazione in $PG(3,q)$ che ammette un gruppo abeliano di ordine $(q+1)^2/2(2,(q-1)/2)$ contenente due gruppi di omologie di ordine $(q+1)/2$. Se esiste un'orbita di componenti con lunghezza maggiore di $(q+1)$ allora π non può essere un piano di André. In particolare, un piano di traslazione che puó essere costruito con un nido misto non é un piano di André.

CAPITOLO 24

Piani affini che sono ricoperti da sottopiani

Ricordiamo che una r-fibrazione in $PG(2r-1, K)$, K corpo, é un insieme di sottospazi proiettivi di dimensione $(r-1)$ che hanno a due a due intersezione identica e tali che ricoprono i punti di $PG(2r-1, K)$.
Un $(r-1)$-regolo in $PG(2r-1, K)$ é un insieme di sottospazi proiettivi di dimensione $(r-1)$ che hanno due a due intersezione identica tali che se una retta interseca almeno tre sottospazi del regolo allora la retta interseca ogni sottospazio del suddetto insieme e i punti della retta sono contenuti nelle intersezioni con i sottospazi. Normalmente, non si usa la terminolgia $(r-1)$-regolo ma si dice solo "regolo" oppure "K-regolo". é facile vedere che date tre rette distinte di $PG(2r-1, K)$, esiste esattamente un regolo che contiene queste rette.
Non é possibile avere un $(r-1)$-regolo in $PG(2r-1, K)$ se K non é campo. é possibile avere regoli in $PG(2r-1, K)$ per campi infiniti. é anche possibile avere regoli negli spazi proiettivi di dimensione infinita che corrispondono a spazi vettoriali di tipo $W \oplus W$.
Nel 1964, Bose e Bruck (si veda in Bader e Johnson [**4**]) hanno studiato fibrazioni regolari; cioé fibrazioni tali che per ogni tre rette distinte nella fibrazione il regolo da esse generato é contenuto nella fibrazione.

Teorema 24.1. (Bose-Bruck [**20**]).

Sia S una fibrazione regolare su un campo $K \neq GF(2)$. Allora, S definisce un piano di traslazione di Moufang.
In particolare, una fibrazione regolare finita su un campo $K \neq GF(2)$ definisce un piano Desarguesiano.

Un K-regolo definisce una rete ricoperta da sottopiani nel modo seguente: Per ogni coppia di punti distinti della rete, esiste un sottopiano della rete che contiene questi due punti e ha le stesse classi di parallelismo della rete.

Ricordo il seguente teorema giá dato nel Capitolo 8.

TEOREMA 24.2. (Johnson [**75**]).

Sia R una rete derivabile. Allora, esiste un insieme di coordinate Q che é uno spazio vettoriale destro su un corpo K quando la rete R ha equazioni $x = c$, $y = x \cdot \alpha + b$ per ogni $a, b \in Q$ e $\alpha \in K$. Viceversa una rete che ha un insieme di coordinate con le suddette proprietà é derivabile.

Si noti che una rete derivabile può essere riricoperta da sottopiani di Baer.

DEFINIZIONE 24.3. *(si veda anche il Capitolo 16).*

Una rete R é detta rete ricoperta se per ogni coppia di punti P e Q, $P \neq Q$, esiste un sottopiano $\pi_{P,Q}$ che contiene P e Q e tale che tutte le classi di parallelismo di R sono classi di parallelismo del sottopiano.

Non é difficile provare che un K-regolo defisce una rete riricoperta.

DEFINIZIONE 24.4. *Una rete R é detta pseudo-regolo se esiste un insieme di coordinate Q che é uno spazio vettoriale destro su un corpo K in cui R ha equazioni $x = c$, $y = x \cdot \alpha + b$ per ogni $a, b \in Q$ e $\alpha \in K$.*

Ricordiamo,

TEOREMA 24.5. (Johnson [**68**] (si veda il Capitolo 8)).

(1) Sia $R = (P, L, C, B, I)$ una rete derivabile. Allora, esiste un corpo K e uno spazio proiettivo di dimensione tre $\Sigma \cong PG(3, K)$ tale che i punti P di R sono le rette di Σ che sono oblique a una retta fissata N, le rette L di R sono i punti di $\Sigma - N$, le classi di parallelismo C di R sono i piani di Σ che contengono N e i sottopiani B di R sono i piani di Σ che non contengono N.

(2) Viceversa, se $\Sigma_1 \cong PG(3, L)$ é uno spazio proiettivo di dimensione tre sul semicorpo L e N_1 é una qualunque retta fissata, definito in Σ_1 l'insieme dei punti P_1, l'insieme delle rette L_1, l'insieme delle classi di parallelismo C_1, l'insieme dei sottopiani B_1 e l'incidenza I_1, allora $R = (P_1, L_1, C_1, B_1, I_1)$ é una rete derivabile.

Recentemente Johnson ha provato che questo teorema può essere esteso al caso infinito.

TEOREMA 24.6. Johnson [**88**]).

(1) Sia $R = (P, L, C, B, I)$ una rete ricoperta. Allora, esistono un corpo K, uno spazio proiettivo Σ, e un sottospazio N di codimensione due tale che i punti P di R sono le rette di $\Sigma - N$, le rette L di R sono i punti di $\Sigma - N$, le classi di parallelismo C di R sono i sottospazi di codimensione uno di R che contengono N e i sottopiani B di R sono i piani di $\Sigma - N$.

(2) Viceversa, se $\Sigma_1 \cong PG(3, L)$ é uno spazio proiettivo su un semicorpo L e N_1 é un qualunque sottospazio di codimensione due, definiti punti P_1, rette L_1, classi di parallelismo C_1, sottopiani B_1 secondo la corrispondenza data sopra dove l'incidenza I_1 é l'incidenza in Σ_1. Allora, $R = (P_1, L_1, C_1, B_1, I_1)$ é una rete ricoperta.

TEOREMA 24.7. Johnson-Lin [**89**]).

Ogni rete di tipo (24.6) é una rete di un pseudo-regolo.

Allora, abbiamo

TEOREMA 24.8. Johnson [**88**], si veda anche De Clerck e Johnson [**26**] per il caso finito).

Una rete ricoperta é una rete di un pseudo-regolo.

Una rete finita di un pseudo-regolo é una rete di un regolo.

DEFINIZIONE 24.9. *Sia π un piano affine (finito o infinito). Se esiste un insieme B di sottopiani non-banali di π tale che*

(1) l'unione ricopre i punti

(2) se per un sottopiano π_o in B, la rete R_{π_o} le cui rette sono estensione delle rette di π_o é una rete ricoperta, allora si chiamerá π piano affine che é ricoperto da sottopiani.

Allora, un piano di traslazione con fibrazione regolare é ricoperto da sottopiani.
Si considerino ora le fibrazioni regolari o piani di traslazione con fibrazioni regolari solo nel caso in cui caso i piani affini sono ricoperti da sottopiani.

DEFINIZIONE 24.10. *Sia π un piano affine. Sia R un fissato insieme di classi di parallelismo. Sia π un piano che é sottopiano ricoperto.*

(1) π é detto piano ricoperto da sottopiani con rete (incassata) R, se ogni rete ricoperta di π contiene R.

Si dice che R é non-banale quando ci sono almeno tre classi.

(2) π é detto un piano che é regolare rispetto ai sottopiani se e solo se per tre rette distinte che hanno un punto (affine) in comune, esiste un sottopiano dell'insieme dei sottopiani di π che contiene queste tre rette.

(3) Sia Π un piano proiettivo. Πé detto un piano proiettivo che é ricoperto da sottopiani se e solo se ogni piano affine π associato a Πé un piano affine che é ricoperto da sottopiani.

(4) Un piano proiettivo si chiama regolare rispetto ai sottopiani se e solo se ogni piano affine associato é regolare rispetto ai sottopiani.

Per mostrare alcuni esempi, possiamo menzionare che ogni piano di traslazione di caratteristica due é un piano affine che é ricoperto da sottopiani. Ci sono anche piani di traslazione di Ostrom di ordine q^4 che sono piani affini che sono ricoperto da sottopiani con rete (incassata) di grado $q+1$. C'é un insieme di q^2+q+1 reti derivabili che contengono una rete di grado $q+1$. Questi piani sono importanti perché vi corrispondono packing (si veda Jha-Johnson su "packings" o "parallelisms" in Bader e Johnson [**4**]).

Possiamo dimostrare:

TEOREMA 24.11. Baer-Johnson [**4**]).

Un piano affine che é sottopiano ricoperto con rete non-banale (incassata) é un piano di traslazione. Inoltre tale rete (incassata) é una rete ricoperta.

Gleason [**35**] ha considerato piani di Fano. Questi sono piani proiettivi tali che ogni quadrangolo genera un sottopiano proiettivo di ordine 2.

TEOREMA 24.12. bf (Gleason [**35**]).

Un piano finito di Fano é Desarguesiano.

Inoltre, Gleason ha dimostrato che un piano di Fano soddisfa la piccola configurazione di Reidemeister. Anche, Lüneburg e Kegel hanno lavorato su questo.

Ricordiamo la piccola configurazione di Reidemeister.

DEFINIZIONE 24.13. *Sia* Π *un piano proiettivo e sia* L *una retta e siano* c*,* u*,* v *tre punti distinti di* L*. Siano* p_1*,* p_2 *due punti distinti della retta* $M \neq L$ *dove* M *é incidente con* c*. Siano* Z, W *rette distinte e non uguali a* M *ma incidenti con* c*. Si definiscano* $z_i = Z \cap (p_i u)$ *e* $w_i = Z \cap (p_i W)$ *dove* $i = 1, 2$*. Inoltre, sia* $m_i = (z_i v) \cap (w_i u)$*,* i*=* $1, 2$*.*

(1) Se i punti c*,* m_1*,* m_2 *sono allineati allora la configurazione soddisfa la piccola configurazione di Reidemeister rispetto alla terna* (c, u, v)*.*

(2) Si dice che un piano affine soddisfa la piccola configurazione di Reidemester se e solo se abbiamo la configurazione per tutti i punti c*,* u*,* v *sulla retta all'infinito.*

(3) Si dice che un piano proiettivo soddisfa la piccola configurazione di Reidemeister se e sole se abbiamo la configurazione per tutti i punti c*,* u*,* v *che sono allineati.*

TEOREMA 24.14. Gleason, Lüneburg, Kegel-Lüneburg (si veda in [**4**]).

Un piano proiettivo finito é Desarguesiano se e solo se il piano soddisfa la piccola configurazione di Reidemeister.

DEFINIZIONE 24.15. *Un piano affine si chiama un piano affine di Fano se e solo se per ogni quadrangolo* (P, Q, R, S) *tale che* $PQ \mid\mid RS$ *e* $PR \mid\mid QS$ *allora* $PS \mid\mid QR$*.*

Per esempio, abbiamo

Teorema 24.16. Bader-Johnson [**4**]).

Un piano affine che é regolare rispetto ai sottopiani e tale che i sottopiani hanno ordine pari é un piano affine di Fano.

Viceversa, ogni piano affine di Fano é regolare rispetto ai sottopiani.

Possiamo provare:

Teorema 24.17. (Bader-Johnson [**4**]).

Un piano proiettivo che é regolare rispetto ai sottopiani soddisfa la piccola configurazione di Reidemeister. Allora, un piano proiettivo finito che é regolare rispetto ai sottopiani é Desarguesiano.

Teorema 24.18. Bader-Johnson [**4**]).

Un piano di traslazione é sottopiano regolare se e solo se il piano é regolare (cioé, la fibrazione é regolare).

Allora, un piano finito di traslazione di ordine dispari che é sottopiano regolare é Desarguesiano.

CAPITOLO 25

Flock parziali e loro estensioni

Nel Capitolo 3, abbiamo parlato di piani di traslazione che ammettono gruppi di Baer. Si ricordi che

Corollario 25.1. (si veda (3.5)).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer B.

(1) Se $|B| = q$, π corrisponde a un flock parziale conico privato di una sola conica. Questo flock può essere esteso a un flock conico se e solo se la rete di grado $q+1$ che contiene il sottopiano $Fix B$ é una rete derivabile.

(2) Se $|B| = q-1$, π corrisponde a un flock parziale iperbolico privato di una sola conica. Questo flock può essere esteso a un flock iperbolico se e solo se, la rete di grado $q+1$ che contiene il sottopiano $Fix\ B$ é una rete che corrisponde a un regolo in $PG(3, K)$.

Recentemente, Payne e Thas [**127**] hanno provato

Teorema 25.2. Payne e Thas [**127**]).

Un flock parziale conico privato di una sola una conica può essere esteso ad un unico flock conico.

Allora, abbiamo

Teorema 25.3. L'insieme dei flock conici in $PG(3, q)$ é equivalente all'insieme dei piani di traslazione con fibrazione in $PG(3, q)$ che ammettono un gruppo di Baer di ordine q.

Recentemente, Storme e Thas hanno migliorato (25.2) per q pari.

Teorema 25.4. (Storme e Thas [**132**]).

Un flock parziale conico in $PG(3, 2^r)$ di k coniche può essere esteso ad un unico flock nei seguenti casi:

(1) per r pari e k maggiore di $2^r - 2^{r/2} - 1$,

(2) per r dispari e k maggiore di $2^r - 2^{(r+1)/2}$.

Payne e Thas hanno studiato flock conici che hanno un sottoflock lineare di $(q - 1)/2$ coniche.

Teorema 25.5. (Payne e Thas [**123**]).

Se un flock conico in $PG(3, q)$ ha un sottoflock lineare di $(q - 1)/2$ coniche allora il flock é lineare o un flock di Fisher.

Ora ci chiediamo:

Se un flock parziale conico P contiene un sottoflock lineare di t coniche F, quanto deve essere grande t per poter estendere P a un flock? Per esempio, se t maggiore o uguale $(q - 1)/2$ é possible ottenere un' estensione?

La risposta a questa domanda é data dal seguente:

Teorema 25.6. (Johnson [**87**]).

Un flock parziale conico in $PG(3, q)$ che contiene un sottoflock lineare di almeno $(q - 1)/2$ coniche può essere esteso ad un unico flock e questo flock é lineare o un flock di Fisher.

La dimostrazione di (25.6) dipende dal seguente teorema:

Teorema 25.7. (Johnson [**87**]).

Sia Σ un piano affine Desarguesiano di ordine q^2, q dispari. Denotiamo un insieme di reti di un regolo che hanno una retta in comune con $\{R_1, R_2, \ldots, R_q\}$. Queste reti si chiamano le reti della base.

Consideriamo uno spazio vettoriale di dimensione due T che interseca $(q-1)/2$ delle reti della base.

Allora, esiste un sottoinsieme di $(q+1)/2$ delle reti della base tali che viene intersecato da ogni rete della base. In questo caso, ci sono esattamente due rette e due sottopiani di Baer di ogni rete che intersecano T. Inoltre, se H é il gruppo di omologia di Σ con la retta all'infinito come l'asse, allora, questi due sottopiani di Baer sono in orbite diverse di H.

Ora, si considerino le condizioni in (25.6). Inoltre assumiamo che il flock parziale P ha esattamente $(q+1)/2$ coniche. Allora, abbiamo una rete di traslazione di grado $(q+1)/2$ che ha una sottorete lineare di grado (q-1)/2. Cioé, possiamo incassare la fibrazione parziale della sottorete lineare come componenti di Σ. In questo caso, c'é un'altra componente T che diventa un sottopiano di Baer in Σ o una componente. Nell'ultimo caso, P é lineare. Nel primo caso, invece, abbiamo la situazione descritta in (25.6). Si ricordi che c'é un gruppo di elazione E che agisce transitivamente sulle componenti delle reti della base che non hanno una retta comune.

Si consideri TEH, allora abbiamo un $(q+1)$-nido. Infatti, prima si dimostra che ci sono $(q(q+1)/2)$ sottospazi di dimensione due in TEH. Si noti che sono $(q+1)/2$ sottopiani di Baer in ogni rete della base di intersezione perche H fissa ogni componente in Σ. Non é difficile dimostrare che questi sottopiani hanno due a due intersezione identica. Inoltre, usando il gruppo E é possibile provare che TEH é uguale all'unione di questi sottopiani di Baer. Usando questo $(q+1)$-nido, le componenti di Σ, e le reti della base che non hanno intersezione con T, possiamo estendere P a un flock conico. é possible vedere che questo flock é un flock di Fisher con i lavori di Payne [**123**], [**124**], Payne e Thas [**127**], e Baker e Ebert [**8**]. Adesso, supponiamo che P contenga un flock parziale lineare ma non facciamo ipotesi sul grado di P. Allora, possiamo assumere che ci siano due sottopiani di Baer di Σ, T_1 e T_2 tali che questi sottopiani non hanno intersezione non banale con un insieme di $(q-1)/2$ reti della base di Σ. Quindi, esistono due flock F_1 , F_2 contenenti le coniche C_1, C_2 le quali corrispondono alle reti di Σ che contengono T_1, T_2 rispettivamente. Inoltre, questi due flock sono flock di Fisher. Se la conica C_2 non é in F_1 allora ci sono $(q-1)/2+1$ coniche in F_1 tale che C_2 e queste hanno a due a due intersezione identica. Ma questo implica che C_2 può avere al piú due punti di intersezione con le altre $(q-1)/2$ coniche. Cioé, possiamo avere solo $(q-1)$ punti di C_2. Allora $F_1 = F_2$, completando cosí la dimostrazione al teorema.

Corollario 25.8. (Payne e Thas [**127**]).

Un flock conico in PG(3,q) che contiene un flock parziale lineare di almeno (q-1)/2 coniche é un flock lineare o un flock di Fisher.

Si noti che la nostra dimostrazione mostra come costruire il flock e il metodo di Payne e Thas mostra l'esistenza di un unico flock che non é lineare.

Bibliografia

[1] Abatangelo, V., Larato, B. Translation planes with an automorphism group isomorphic to SL(2,5) Combinatorics '84 (Bari, 1984), 1-7, North-Holland Math. Stud., 123, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[2] André, J. Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. 60, (1954), 156–186.

[3] Bader, L. Some new examples of flocks of $Q^+(3,q)$. Geom Ded. 27 (1988), 213-218.

[4] Bader, L. e Johnson, N.L. Subplane covered affine planes. European J. Math. 63, (1996), 171-182.

[5] Bader, L, Lunardon, G. On the flocks of $Q^+(3,q)$. Geom. Ded. 29(1989), 177–183.

[6] Bader, L., Lunardon, G., Thas, J.A. Derivation of flocks of quadratic cones. Forum Mathematicum 2 (1990), 163–174.

[7] Baker, R.D. , Ebert, G.L. A nonlinear flock in the Minkowski plane of order 11. Eighteenth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, Fol., 1987) Congr. Numer. 58 (1987), 75-81.

[8] Baker, R.D., Ebert, G.L. A new class of translation planes. Proc. Inter. Conf. Combinators '86, (Trento 1986), 7-10, Ann. Discrete Math. 37, North Holland, Amsterdam, 1988.

[9] Baker, R.D. , Ebert, G.L. A new class of translation planes. Nests of size $(q-1)$ and another family of translation planes. J. London Math. Soc. 38 (1988), 341-355.

[10] Beth, Th., Jungnickel, D., Lenz, H. **Design Theory.** Wissenshaftsverlag, Bibliographisches Institute, Cambridge University Press, Cambridge, London-New York-New Rochelle-Melbourne-Sydney, l986.

[11] Betten, D. 4-Dimensionale Translationsebenen met 8-Dimensionaler Kollinetionsgruppi. Geom. Ded. 2 (1973), 327–329.

[12] Biliotti, M., Jha, V., Menichetti, G., Johnson, N.L. A structure theorey for two dimensional translation planes of order q^2 that admit collineation groups of order q^2. Geom. Ded. 29(1989), 7–43.

[13] Biliotti, M., Jha, V., Menichetti, G., Johnson, N.L. The collineation groups of Baer-elation planes. Att em. Mat. Fis. Univ. Moderna 36, no. 1(1988), 23–35.

[14] Biliotti, M., Johnson, N.L. Maximal Baer groups in translation planes and compatibility with homology groups. Geom. Ded. 59 (1996), 65-101.

[15] Biliotti, M., Lunardon, G. Insiemi di derivazione e sottopiani di Baer in un piano di traslazione. Atti. Acc. Nax. Lincei. Cl. Sci Fis. Mat. Nat. (8) 69(1980).

[16] Biliotti, M., Menichetti, G. Derived semifield planes with affine elations. J. Geom. 19(1982), 50–88.

[17] Biliotti, M. , Menichetti, G. On a generalization of Kantor's likeable planes. Geom. Ded. 17(1985), 253–277.

[18] Bonisoli, A. On the sharply 1-transitive subsets of $PGL(2,p^m)$. J. Geom. 31 (1988), 32-41.

[19] Bonisoli, A. On resolvable finite Minkowski planes. J. Geom. 36 (1989), 1–7.

[20] Bose,R.C., Bruck, R.H. The construction of translation planes from projective spaces. J. Algebra 1 (1964), 85–102.

[21] Bruen, A.A. Inversive geometry and some translation planes, I. Geom. Ded. 7(1978), 81–98.

[22] Burn. R.P. Bol quasifields and Pappus' Theorem. Math. Z. 105 (1968), 351–367.

[23] Capursi, M. A translation plane of order 11^2. J. Comb. Theory Ser A 35 (1983), 289-300.

[24] Charnes, C. A non-symmetric translation plane of order 17^2. J. Geom. 37 (1990), 77-83.

[25] Cofman, J. Baer subplanes and Baer collineation of derivable projective planes. Abh. Math. Sem. Hamburg 44, (1975), 187–192.

[26] De Clerck, F., Johnson, N.L. Subplane covered nets and semi-partial geometries. Discrete Math. 106/107(1992), 127–134.

[27] De Clerck, F., Van Maldeghem, H. Flocks of an infinite quadratic cone. Bulletin of the Belgian Math. Society/Simon Stevin. Vol 2, no. 3 (1994), 399–415.

[28] Dembowski, P. **FiniteGeometries.** Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, l967.

[29] Dickson, L.E. **Linear Groups.** Dover Pub. Inc. New York, l958.

[30] Ebert, G.L. Some nonreplaceable nests. Combinatorics '88 vol. 1 (Ravello 1988), 353-372 Lecture notes Math., Mediterranean, Rende, 1997

[31] Ebert, G.L. Spreads admitting regular elliptic covers. Europ. J. Comb.10 (1989), 319-330.

[32] Gevaert, H., Johnson, N.L. On maximal partial spreads in $PG(3,q)$ of cardinalities q^2-q+1, q^2-q+2. ARS Combinatoria, 26(1988), 191–196.

[33] Gevaert, H., Johnson, N.L. Flocks of quadratic cones, generalized quadrangles, and translation planes. Geom. Ded. 27, no. 3(1988), 301–317.

[34] Gevaert, H., Johnson, N.L., Thas, J.A. Spreads covered by reguli. Simon Stevin. Vol. 62(1988), 51–62.

[35] Gleason, A.M. Finite Fano planes. Amer. J. Math. 78, (1956), 797-807.

[36] Grundhöfer, T. Eine charakterisierung ableitbarer translationsebenen. Geom. Dd.11 (1981), 177–185.

[37] Foulser, D.A. Subplanes of partial spreads in translation planes. Bull. London Math. Soc. 4(1972), 32–38.

[38] Foulser, D.A. Baer p-elements in translation planes. J. Alg. 31 (1974), 354–366.

[39] Foulser, D.A., Walker, M. A construction of Ostrom. **Finite Geometries**, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 82, edited by N.L. Johnson, M.J. Kallaher, C.T. Long, l983, 161–173.

[40] Hanson, J., Kallaher, M.J. Finite Bol quasifields are nearfields. Utilitas Math. 37 (1990), 45-64.

[41] Hering, Ch. On shears of translation planes. Abh. d. Math. Seminar d. Univer. Hamburg, 37, 3/4(1972), 258–268.

[42] Hiramine, Y. On nets of order q^2 and degree $q+1$ admitting $GL(2,q)$. Geom. Ded., vol. 48(1993), 86–108.

[43] Hiramine, Y. and Johnson, N.L. Nets of order p^2 and degree $p+1$ admitting $SL(2,p)$. Geom. Ded. 69 (1988), 15-34.

[44] Hiramine, Y., Johnson, N.L. Classification of generalized André planes of order p^t that admit affine homology groups of order $(p^t-1)/2$. Geom. Ded. 41 (1992), 175–190.

[45] Hiramine, Y., Johnson, N.L. Near nearfield planes. Geom. Ded. 43 (1992), 17–33.

[46] Hiramine, Y., Matsumoto, M., Oyama, T. On some extension of 1-spread sets. Osaka J. Math. 24(1987), 123–137.

[47] Jha, V., Johnson, N.L. Derivable nets defined by central collineations, Inform. and Systems Sci., vol. 11, nos. 2-4(1986), 83–91.

[48] Jha, V., Johnson, N.L. Baer-elation planes. Rend. *d.* Math. Padova. Vol 78(1987), 27–45.

[49] Jha, V. , Johnson, N.L. Solution to Dempwolff's B-group problem. Europ. J. Comb. vol. 7, no. 3 July (1986), 227–235.
[50] Jha, V., Johnson, N.L. The odd order analogue of Dempwolff's B-group problem. J. Geom. 28 (1) (1987), 1–6.
[51] Jha, V., Johnson, N.L. Coexistence of elations and large Baer groups in translation planes. J. London Math. Soc. 2 (32) (1985), 297–304.
[52] Jha, V. Johnson, N.L. Baer involutions in translation planes admitting large elation groups. Resultate *d.* Math. vol. 11 (1987), 63–71.
[53] Jha, V., Johnson, N.L. Nests of reguli and flocks of quadratic cones. Simon Stevin. 63 (1989), 311-338.
[54] Jha, V., Johnson, N.L. Rigidity in conical flocks. J. Combinatorial Theory Ser A 73 (1996), 60-76.
[55] Jha, V., Johnson, N.L. Infinite flocks of a quadratic cone. J. Geom. 57 (1996), 123-150.
[56] Jha, V., Johnson, N.L. Flocks of an oval cone and estensions of Theorems of Thas. Note di Mat. 14 (1994), 189-197.
[57] Jha, V. Johnson, N.L. Automorphism groups of flocks of oval cones. Geom. Ded. 61 (1996), 71-85.
[58] Jha, V. Johnson, N.L. The doubly transitive flocks of quadratic cones. europ. J. Comb. 18 (1997), 763-778.
[59] Jha, V. Johnson, N.L. Quasifibrations. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 3 (1996), 313-324.
[60] Johnson, N.L. Lezioni sui piani di traslazione. Quaderni d. Dipart. d. Mat. dell'Univ. di Lecce. Q. 3(1986), 1–121.
[61] Johnson, N.L. On derivable Baer-elation planes. Note di Mat. Lecce., vol III(1987), 19–27.
[62] Johnson, N.L. Semifield flocks of quadratic cones. Simon Stevin, 61, no. 3-4(1987), 313–326.
[63] Johnson, N.L. A note on translation planes of large dimension. J. Geom. vol. 33(1988), 66–72.
[64] Johnson, N.L. Derivation is a polarity. J. Geom. vol. 35(1989), 97–102.
[65] Johnson, N.L. Flocks of hyperbolic quadrics and translation planes admitting affine homologies. J. Geom. vol. 34(1989), 50–73.
[66] Johnson, N.L. A characterization of the Hall planes by planar and non-planar involutions. Inter. J. Math. and Math Sci. 12, no. 4 Dec. (1989), 781–786.
[67] Johnson, N.L. Translation planes admitting Baer groups and partial flocks of quadric sets. Simon Stevin. vol. 63, no. 3 (1989), 163–187.
[68] Johnson, N.L. Derivable nets and 3-dimensional projective spaces. Abh. d. Math. Sem.(Hamburg), 58(1988), 245–253.
[69] Johnson, N.L. Derivable nets and 3-dimensional projective spaces. II — the structure. Arch. d. Math. Archiv d. Math. vol. 55 (1990), 84-104.
[70] Johnson, N.L. Nest replaceable translation planes. J. Geom. vol. 36(1989), 49–62.
[71] Johnson, N.L. The derivation of dual translation planes. J. Geom. vo. 36(1989), 63–90.
[72] Johnson, N.L. Derived Fisher planes. Simon Stevin, no. 64, no. 1 (1990), 21–50.
[73] Johnson, N.L. Maximal partial spreads and central groups. Note di Mat., Vol. 9,no. 2 (1989), 249–261.
[74] Johnson, N.L. Ovoids and translation planes revisited. Geom Ded. 38 (1991), 13–57.
[75] Johnson, N.L. Derivation by coordinates. Note di Mat. Vol X(1990), 89–96.
[76] Johnson, N.L. Derivation of partial flocks of quadratic cones. Rend. *d.* Mat., VII, Vol. 12, 4 (1992) 817–848.
[77] Johnson, N.L. Conical flocks whose corresponding translation planes are derivable. Simon Stevin, vol. 65, 3/4(1991), 199–215.

[78] Johnson, N.L. A group theoretic characterization of finite dervable nets. J. Geom. vol. 49 (1991), 105–112.

[79] Johnson, N.L. Homology groups, nearfields, and reguli. J. Geom. vol. 42 (1991), 109–125.

[80] Johnson, *N.L* Sequences of derivable translation planes. Osaka J. Math. 25(1988), 519–530.

[81] Johnson, N.L. translation planes of order q^2 that admit $q+1$ elations. Geom. Ded. 15(1984), 329–337.

[82] Johnson, N.L. Foulser's covering theorem. Note di Mat. Lecce, vol. 11 (1985), 139–145.

[83] Johnson, N.L. Flocks and partial flocks of quadric sets. Comtemp. Math. 111 (1990), 71-80.

[84] Johnson, N.L. Translation planes covered by subplane covered nets. Simon Stevin, vol. 66, no. 3/4(1992), 221–239.

[85] Johnson, N.L. Partially sharp subsets of $PL(n, q)$. London Math. Soc. Lecture Notes #191. Finite Geometry and Combinatorics, (1993), 217–232.

[86] Johnson, N.L. Flocks of infinite hyperbolic quadrics. J. Algebraic Combin. 6 (1997), 27-51.

[87] Johnson, N.L. Extending partial flocks containing linear subflocks. J. Geom. 55 (1996), 99-106.

[88] Johnson, N.L. The classification of subplane covered nets. Bulletin Belgian Math. Soc./ Simon Stevin 2 (1995), 487-508.

[89] Johnson, N.L. e Lin, K-S. Embedding dual nets in affine or projective spaces. Rend. d. Mat., vol. 14 (1994), 483–502.

[90] Johnson, N.L., Lunardon, *G.* Maximal partial flocks and quadratic cones. Des. Codes Cryptogr. 10 (1997), 193-202.

[91] Johnson, N.L., Lunardon, G., Wilke, F.W. Semifields skeletons of conical flocks. J. Geom. vol. 49 (1991), 105–112.

[92] Johnson, N.L., Ostrom, *T.G.* Direct products of affine linear spaces. J. Combinatorial Theory 75 (1996), 99-140.

[93] Johnson, N.L., Ostrom, T.G. Inherited Groups and kernels of derived translation planes. Europ. J. Comb. 11,(1990), 145–149.

[94] Johnson, N.L., Pomareda, R. A maximal partial flock of deficiency one of the hyperbolic quadric in PG(3,9). Simon Stevin, vol. 64, no. 2 (1990), 169-177.

[95] Johnson, N.L., Pomareda, R. Mixed nests. J. Geom. 56 (1996), 59-86.

[96] Johnson, N.L., Pomareda, R. André planes and nests of reguli. Geom. Ded. 31(1989), 245–260.

[97] Johnson, N.L., Pomareda, R., Wilke, F.W. j-planes. J. Comb. Theory(series A), vol. 56, no. 2 (1991), 271–284.

[98] Johnson, N.L., Rahilly, A. On elations of derived semifield planes. Proc. London Math. Soc. (3), 35(1977), 76–88.

[99] Jungnickel, D. Maximal partial spread and translation nets of small deficiency. J. Alg. 90(1984), 119–132.

[100] Kallaher, M.J. A note on Bol projective planes. Arch. d. Math. 20 (1969), 329–332.

[101] Kallaher, M.J. A note on finite Bol quasifields. Arch. *d.* Math. 23(1972), 164-166.

[102] Kantor, W.M. Generalized quadrangles and translation planes. Alg. Groups, an Geom., 2(1986), 323–354.

[103] Kantor, W.M. Some generalized quadrangles with parameters q^2, q. Math. Z. 192 (1986), 45-50.

[104] Kantor, W.M. Point-transitive affine planes. Israel J. Math. 42(1982), 227–234.

[105] Kantor, W.M. Ovoids and translation planes. Canad. J. Math., no. 5, 34(1982), 1195–1207.

[106] Kantor, W.M. Note on generalized quadrangles, flocks and BLT-sets. J. Combin. Theory Ser. A 58 (1991) 153-157.

[107] Korchmaròs, G. A translation plane of order 49 with non-solvable collineation group. j. Geom. 28 (1985), 18-30.

[108] Korchmaròs, G., Pellegrino, G. Translation planes of order 11^2. Annals of Discrete Math. 14, (1982), 249–264.

[109] Krüger, J. Derivation in Projectiven Ebenen über Cartesischen Gruppen. Diplomarbiet. Univ. Dortmund l988.

[110] Larato, B., Raguso, G. Il gruppo delle collineazioni di un particopare piano di traslazione d'ordine 11^2. Rivista Mat. Parma. (to appear).

[111] Liebler, R.A. Combinatorial representation theory and translation planes. **Finite Geometries**. Lecture notes in pure and applied math., vol. 82 , Marcel Dekker, l983,, edited by $N.L$ Johnson, M.J. Kallaher, C.T. Long, 307–325.

[112] Lüneburg, H. **Translation planes**. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, l980.

[113] Lunardon, G. Piani di traslazione derivabili. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 61 (1979), 271–284.

[114] Orr, W.F. The Miquelian Inversive plane $IP(q)$ and the associated projective planes. Thesis, Univ. Wisconsin, l973.

[115] Ostrom, T.G. The dual Lüneburg planes. Math. Z. 92(1965), 201–209.

[116] Ostrom, T.G. Vector spaces and construction of finite projective planes. Arch. Math. XIX(1968), 1–25.

[117] Ostrom, T.G. Nets with critical deficiency. Pacific J. Math. 14(1964), 1381–1387.

[118] Ostrom, T.G. Semi-translation planes. Trans. Amer. Math. Soc. 111(1964), 1–18.

[119] Ostrom, T.G. Translation planes and configurations in Desarguesian planes. Arch. Math. 11(1960), 457–464.

[120] Ostrom, T.G. Linear transformations and collineations of translation planes. Journal Alg., vol. 14, no. 3 (1970), 405–416.

[121] Pabst, G. , Sherk, F.A. Indicator sets, reguli and a new class of spreads. Canad. J. Math. 29(1977), 132-154.

[122] Payne, S.W. A garden of generalized quadrangles. Alg., Groups, Geom. 3(1985), 323–354.

[123] Payne, S.W. The Thas-Fisher generalized quadrangles. Annals of Discrete Math. 37(1988), 357–366.

[124] Payne, S.W. Spreads, flocks and generalized quadrangles. J. Geom. 33(1988), 113–128.

[125] Payne, S.W. An essay on skew translation generalized quadrangles. Geom. Ded. 32(1989), 93–118.

[126] Payne, S.W., Rogers, L.A. Local group actions on generalized quadrangles. (to appear).

[127] Payne, S.W., Thas, J.A. Conical flocks, par;tial flocks, derivation, and generalized quadrangles. Geom. Ded. 38 (1991), 229–243.

[128] Prohaska, O. Endliche Ableitbare Affine Ebenen. Geom. Ded. 1(1972), 6–17.

[129] Raguso, G. Un piano di traslazione di ordine 11^2 . Rendiconti di Math. (Roma)(to appear).

[130] Riesinger, R. J. Faserunger, die aus Reguli mit einem gemeinsamen Geradenpaar zusammengesetzt sind. Geom. Vol. 45 (1992), 137–157.

[131] Rosati, L. Su una nuova classee di piani grafici. Richerche di Mat. 13(1964), 1–17.

[132] Storme, L, Thas, J.A. k-arcs and partial flocks. Linear Algebra Appl. 226/228 (1995), 33-45.

[133] Thas, J.A. Generalized quadrangles and flocks of cones. Europ. J. Comb. 8(1987), 441–452.

[134] Thas, J.A. Flocks, maximal exterior sets and inversive planes. Contemp. Math. 111 (1990), 187–218.

[135] Thas, J.A. Flocks of finite egglike inversive planes, in “Finite Geometric Structures and their applications. (E. by A. Barlotti).Rome, (1973), 189–191.

Finito di stampare nel mese marzo 2006
dalle Edizioni del Grifo
Via V. Monti, 18 -73100 Lecce Italy

ISBN 88-8305-029-0