CAPITOLO 6

Regolarità di ordine superiore

Nelle sezioni precedenti abbiamo provato esistenza e unicità della soluzione in $W^{2,p}(\Omega)$ dell'equazione $\lambda u - Au = f$ con condizioni al bordo di Dirichlet, dove A è l'operatore differenziale ellittico del secondo ordine

$$Au = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{N} b_i u + cu.$$

In questa sezione studiamo regolarità di ordine superiore della soluzione in presenza di maggiore regolarità del dato f. Supporremo infatti f in $W^{k,p}(\Omega)$ con $k \in \mathbb{N}$.
Ripercorriamo il procedimento già usato nelle sezioni precedenti, provando regolarità di ordine superiore dapprima in $\mathbb{R}^N$ ed infine in un aperto limitato regolare Ω, passando attraverso il semispazio $\mathbb{R}^N_+$.

Per cominciare abbiamo bisogno di richiedere maggiore regolarità ai coefficienti dell'operatore A, assumendo pertanto d'ora in avanti

$$a_{ij} = a_{ji} \in BUC^k, \quad b_i, c \in W^{k,\infty}.$$

Supponiamo al solito che l'operatore sia uniformente ellittico con costante di ellitticità $\nu > 0$ e poniamo

$$\omega(r) := \max_{i,j} \sup_{|x-y|<r} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|;$$

$$M = \max\{\|a_{ij}\|_{k,\infty}, \|b_i\|_{k,\infty}, \|c\|_{k,\infty}\}.$$

Sia $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $h \in \mathbb{R}^N$, $h \neq 0$; chiamiamo *quoziente differenziale* di u in x l'espressione

$$\tau_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}.$$

E' immediato verificare che per ogni $u, v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\tau_h u) v = \int_{\mathbb{R}^N} u(\tau_{-h}\, v) \tag{6.1}$$

ed inoltre

(a) $\tau_h(uv)(x) = u(x+h)\tau_h v(x) + \tau_h u(x) v(x)$, per ogni $u, v \in L^p(\mathbb{R}^N)$;
(b) $\tau_h Du = D\tau_h u$, per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con Du generica derivata di u.

Se $u \in L^p(\Omega)$ e ω è un aperto a chiusura compatta contenuta in Ω (brevemente $\omega \subset\subset \Omega$), allora ha senso considerare $D_h u(x)$ per $x \in \omega$ e $0 < |h| < dist\,(\omega, \partial\Omega)$.

La prossima proposizione è una ben nota caratterizzazione degli spazi di Sobolev in termini di quozienti differenziali (vedi [**2**, Proposizione IX.3]).

PROPOSIZIONE 6.1. *Sia $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Sono equivalenti*

(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$;
(ii) *esiste $C > 0$ tale che per ogni aperto $\omega \subset\subset \Omega$ e per ogni $h \in \mathbb{R}^N$ con $0 < |h| < \mathrm{dist}\,(\omega, \partial\Omega)$ risulti*

$$\|\tau_h u\|_{L^p(\omega)} \leq C.$$

In tal caso possiamo prendere $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$.

OSSERVAZIONE 6.2. L'ipotesi $|h| < dist\,(\omega, \partial\Omega)$ serve a garantire che il quoziente differenziale $\tau_h u$ sia ben definito. Se siamo in $\mathbb{R}^N$, non vi è alcun bisogno di restringersi ad un aperto ω e si può prendere un h qualunque, purchè ovviamente diverso dal vettore nullo.
La proposizione si può applicare ad ogni singola derivata parziale. Basta infatti che $\|\tau_h u\|_{L^p(\omega)}$
$\leq C$ per ogni $h = te_i$ con $0 < t < dist\,(\omega, \partial\Omega)$ per dedurre l'esistenza di $D_h u \in L^p(\Omega)$.

Proviamo adesso un primo risultato di regolarità in $\mathbb{R}^N$. Nella dimostrazione useremo la stima a-priori del Teorema 3.4

$$\|u\|_{2,p} \leq C(\|u\|_p + \|Au\|_p) \tag{6.2}$$

valida per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

PROPOSIZIONE 6.3. *Siano $1 < p < \infty$ ed $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che $Au \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Allora $u \in W^{k+2,p}(\mathbb{R}^N)$ ed esiste $C = C(N, p, \nu, M, \omega) > 0$ tale che*

$$\|u\|_{k+2,p} \leq C(\|u\|_p + \|Au\|_{k,p}). \tag{6.3}$$

DIM. Proviamo la tesi per induzione su k.
passo 1: Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che $Au \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Prendiamo $h \in \mathbb{R}^N$, $h \neq 0$, e consideriamo il quoziente differenziale $\tau_h u$. Applichiamo la stima (6.2) a $\tau_h u$

$$\|\tau_h u\|_{2,p} \leq C(\|\tau_h u\|_p + \|A\tau_h u\|_p).$$

Per le proprietà dei quozienti differenziali si ha

$$A(\tau_h u)(x) = \tau_h(Au)(x) - \sum_{i,j=1}^{N} \tau_h a_{ij}(x) D_{ij} u(x+h) - \sum_{i=1}^{N} \tau_h b_i(x) D_i u(x+h) - \tau_h c(x) u(x+h) \quad (6.4)$$

e quindi

$$\|\tau_h u\|_{2,p} \leq C\left(\|\tau_h u\|_p + \|\tau_h Au\|_p + \sum_{i,j=1}^{N} \|\tau_h a_{ij}\|_\infty \|D_{ij} u\|_p + \sum_{i=1}^{N} \|\tau_h b_i\|_\infty \|D_i u\|_p + \|\tau_h c\|_\infty \|u\|_p\right). \quad (6.5)$$

Per la Proposizione 6.1 possiamo maggiorare con una costante ogni termine a secondo membro della (6.5), sicchè

$$\|\tau_h u\|_{2,p} \leq \text{cost}$$

e questo, sempre per la Proposizione 6.1, implica che $u \in W^{3,p}(\mathbb{R}^N)$.

Possiamo adesso applicare l'operatore A ad una qualsiasi derivata parziale $D_r u$, che come abbiamo appena visto appartiene a $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Data la regolarità $W^{1,\infty}$ dei coefficienti dell'operatore si ha

$$A(D_r u) = D_r(Au) - \sum_{i,j=1}^{N} D_r a_{ij} D_{ij} u - \sum_{i=1}^{N} D_r b_i D_i u - D_r c\, u,$$

allora $\|AD_r u\|_p \leq \|D_r Au\|_p + M\|u\|_{2,p}$. Applicando più volte la stima (6.2) si ottiene

$$\begin{aligned}
\|D_r u\|_{2,p} &\leq C(\|D_r u\|_p + \|AD_r u\|_p) \\
&\leq C(\|D_r u\|_p + \|D_r Au\|_p + M\|u\|_{2,p}) \\
&\leq C'(\|u\|_{2,p} + \|D_r Au\|_p) \\
&\leq C''(\|u\|_p + \|Au\|_p + \|D_r Au\|_p)
\end{aligned}$$

dove C' e C'' sono costanti positive dipendenti da N, p, ν, M, ω. Per finire

$$\|u\|_{3,p} = \|u\|_p + \sum_{r=1}^{N} \|D_r u\|_{2,p} \leq C''(\|u\|_p + \|Au\|_{1,p})$$

che è proprio la stima cercata.
passo 2: Sia $k \geq 2$, supponiamo la tesi vera per $k-1$ e proviamola per k. Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che $Au \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Per l'ipotesi induttiva $u \in W^{k+1,p}(\mathbb{R}^N)$ ed esiste $C = C(N,p,\nu,M,\omega) > 0$ tale che

$$\|u\|_{k+1,p} \leq C(\|u\|_p + \|Au\|_{k-1,p}).$$

Sia $D_r u$ una qualsiasi derivata parziale di u. $D_r u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \subset W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ e

$$AD_r u = D_r(Au) - \sum_{i,j=1}^{N} D_r a_{ij} D_{ij} u - \sum_{i=1}^{N} D_r b_i D_i u - D_r c\, u. \tag{6.6}$$

Per ipotesi i coefficienti di A sono in $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$, perciò dall'uguaglianza precedente si ha che $AD_r u \in W^{k-1,p}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|AD_r u\|_{k-1,p} \leq \|D_r Au\|_{k-1,p} + M\|u\|_{k-1,p}. \tag{6.7}$$

A questo punto per il passo induttivo $D_r u \in W^{k+1,p}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|D_r u\|_{k+1,p} \leq C(\|D_r u\|_p + \|AD_r u\|_{k-1,p}) \tag{6.8}$$

Mettendo assieme (6.7) e (6.8) ed usando ancora una volta il passo induttivo otteniamo

$$\begin{aligned}\|D_r u\|_{k+1,p} &\leq C(\|D_r u\|_p + \|D_r Au\|_{k-1,p} + M\|u\|_{k-1,p})\\ &\leq C'(\|u\|_{k-1,p} + \|D_r Au\|_{k-1,p})\\ &\leq C''(\|u\|_p + \|Au\|_{k-1,p} + \|D_r Au\|_{k-1,p}),\end{aligned}$$

dove C' e C'' sono nuove costanti positive dipendenti da N, p, ν, M, ω. Infine dall'arbitrarietà di r discende che $u \in W^{k+2,p}(\mathbb{R}^N)$ e che vale la stima

$$\|u\|_{k+2,p} \leq C''(\|u\|_p + \|Au\|_{k,p}).$$

Proviamo l'analogo risultato nel semispazio $\mathbb{R}^N_+$.

PROPOSIZIONE 6.4. *Siano* $1 < p < \infty$ *ed* $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ *tale che* $Au \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N_+)$. *Allora* $u \in W^{k+2,p}(\mathbb{R}^N_+)$ *ed esiste* $C = C(N, p, \nu, M, \omega) > 0$ *tale che*

$$\|u\|_{k+2,p} \leq C(\|u\|_p + \|Au\|_{k,p}). \tag{6.9}$$

DIM. Per $k = 0$ la tesi è stata già provata nel Corollario 4.5. Procediamo per induzione su k. Supponiamo dapprima $Au \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. Sia $h = (h_1, \ldots, h_{N-1}, 0) \in \mathbb{R}^N_+)$, $h \neq 0$, vettore tangente all'iperpiano $\{x_N = 0\}$. Allora il quoziente differenziale $\tau_h u$ risulta ben definito ed appartiene a $W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. Possiamo perciò applicare a $\tau_h u$ la stima (4.8) e procedere come nella dimostrazione della Proposizione 6.3, ottenendo che

$$\|\tau_h u\|_{2,p} \leq cost.$$

Per la Proposizione 6.1, questa maggiorazione ci permette di affermare che una qualsiasi derivata seconda $D_{rs} u$ ammette derivata parziale in $L^p(\mathbb{R}^N_+)$ nella direzione coordinata e_j per ogni $j < N$. Se $j = N$ distinguiamo i casi seguenti:

1) almeno uno dei due indici r ed s è diverso da N. Supponiamo $r \neq N$, allora, invertendo l'ordine di derivazione, risulta

$$D_N D_{rs} u = D_r D_{Ns} u$$

che appartiene a $L^p(\mathbb{R}^N_+)$ per quanto già provato.
2) Se $r = s = N$, allora

$$D_{NN} u = \frac{1}{a_{NN}} \left(Au - \sum_{(i,j) \neq (N,N)} a_{ij} D_{ij} u - \sum_{i=1}^{N} D_r b_i D_i u - D_r c\, u \right)$$

e quindi $D_{NN} u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$.

Abbiamo pertanto provato che $u \in W^{3,p}(\mathbb{R}^N_+)$. Da questo punto in poi si procede come nella dimostrazione della Proposizione 6.3. □

Passiamo alla regolarità in un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$, limitato e di classe C^k. Come nella sezione 5 mediante carte locali ci riconduciamo a studiare il problema in palle di $\mathbb{R}^N$ o intersezioni di palle con $\mathbb{R}^N_+$. Per comodità ricordiamo come si trasforma l'operatore A se si cambia variabile, questa volta assumendo che il cambio di variabile sia un diffeomorfismo di classe C^k.

Siano Ω e Λ aperti limitati di $\mathbb{R}^N$ e sia $H : \overline{\Lambda} \to \overline{\Omega}$ un diffeomorfismo di classe C^k con inverso $J : \overline{\Omega} \to \overline{\Lambda}$. Data $u \in W^{k,p}(\Omega)$, definiamo

$$v(y) = u(H(y)), \qquad y \in \Lambda.$$

Risulta ben definita la seguente applicazione

$$\begin{aligned} &T : W^{k,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega) \to W^{k,p}(\Lambda) \cap W^{1,p}_0(\Lambda), \\ &u \mapsto Tu = u \circ H = v. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Si può facilmente verificare che T è lineare, limitata e invertibile con inversa data da

$$T^{-1} : W^{k,p}(\Lambda) \cap W^{1,p}_0(\Lambda) \to W^{k,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega), \quad v \mapsto T^{-1} v = v \circ J = u.$$

Se $u(x) = v(Jx)$, si ottiene facendo un calcolo esplicito e ponendo $y = Jx$

$$Au(x) = \tilde{A} v(y) = \sum_{h,k} \alpha_{hk}(y) D_{y_h y_k} v(y) + \sum_h \beta_h D_{y_h} v(y) + \gamma(y) v(y) \tag{6.11}$$

dove

$$\begin{aligned} &\alpha_{hk}(y) = \textstyle\sum_{i,j} a_{ij}(H(y)) D_{x_j} J_h(H(y)) D_{x_i} J_k(H(y)), \\ &\beta_h(y) = \textstyle\sum_{i,j} a_{ij}(H(y)) D_{x_i x_j} J_h(H(y)) + \sum_i b_i(H(y)) D_{x_i} J_h(H(y)), \\ &\gamma(y) = c(H(y)). \end{aligned}$$

Quindi risulta definito $\tilde{A} = TAT^{-1}$ operatore uniformemente ellittico i cui coefficienti

$$\alpha_{hk} \in C_{ub}(\Lambda) \cap W^{k,\infty}(\Lambda),\ \beta_h,\ \gamma \in W^{k,\infty}(\Lambda).$$

Inoltre

$$\tilde{M} \leq c_1(J)M \qquad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\omega, J, M) \qquad \tilde{\nu} \geq c_2(J)\,\nu$$

dove $c_1(J)$ e $c_2(J)$ dipendono solo dal cambio di variabile fissato (e quindi dall'aperto) e non dall'operatore A.

PROPOSIZIONE 6.5. *Siano* $1 < p < \infty$ *ed* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *tale che* $Au \in W^{k,p}(\Omega)$. *Allora* $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ *ed esiste* $C = C(N, p, \nu, M, \omega, \Omega) > 0$ *tale che*

$$\|u\|_{k+2} \leq C(\|u\|_p + \|Au\|_{k,p}).$$

DIM. Supponiamo dapprima $Au \in W^{1,p}(\Omega)$. Denotiamo con $B(1)$ la palla unitaria di $\mathbb{R}^N$. Per la regolarità di Ω, per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste una carta locale (U_x, H_x) con

$$H_x : \overline{B(1)} \to \overline{U}_x \text{ diffeomorfismo di classe } C^k, \quad H_x(B^+(1)) = U_x \cap \Omega$$
$$H_x(B(1) \cap \{x_N = 0\}) = U_x \cap \partial\Omega.$$

Inoltre, essendo Ω aperto, per ogni $x \in \Omega$ esiste $B(x, R_x) \subset \Omega$. Risulta così

$$\overline{\Omega} \subset \left(\bigcup_{x\in\Omega} B(x, R_x) \right) \cup \left(\bigcup_{x\in\partial\Omega} U_x \right).$$

Per compattezza possiamo estrarre un ricoprimento finito. Esistono pertanto $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$\overline{\Omega} \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n_1} B(x_i, R_i) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n_2} U_j \right),$$

dove per semplicità denotiamo R_{x_i} con R_i e U_{x_j} con U_j. Posto $n = n_1 + n_2$ consideriamo una partizione dell'unità $\{\eta_i\}_{i=1,\dots,n}$ relativa al ricoprimento con $\eta_i \in C_c^\infty(B(x_i, R_i))$ se $i \leq n_1$, $\eta_i \in C_c^\infty(U_i)$ se $n_1 < i < n$.

Trattiamo separatamente le funzioni $\eta_i u$ nei casi $i \leq n_1$ e $n_1 < i < n$.
'caso $i \leq n_1$': Risulta $supp\,\eta_i \subset B(x_i, R_i)$ e $\eta_i u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Per applicare i risultati di regolarità nell'intero spazio estendiamo l'operatore A dalla palla a tutto $\mathbb{R}^N$ in modo tale che l'estensione $\hat{A}$ sia ancora un operatore uniformemente ellittico e conservi le proprietà di regolarità dei coefficienti di A. A tal fine sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$0 \leq \varphi \leq 1, \qquad \varphi = 1 \text{ in } B(1), \qquad \varphi = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus 2B(1).$$

Consideriamo allora $\hat{\varphi}(x) = \varphi\left(\dfrac{x - x_i}{R_i}\right)$ e poniamo

$$\hat{A} = \hat{\varphi}A + (1 - \hat{\varphi})\Delta.$$

Osserviamo che $\hat{A}$ è uniformemente ellittico perché combinazione convessa di operatori uniformemente ellittici ed ha costante di ellitticità

$$\hat{\nu} \geq \min\{1, \nu\}.$$

I coefficienti di $\hat{A}$ sono

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{ij} &= \hat{\varphi} a_{ij} + (1 - \hat{\varphi})\delta_{ij} \in BUC(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \\
\hat{b}_i &= \hat{\varphi} b_i \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N), \quad c = \hat{\varphi} c \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)
\end{aligned}$$

ed inoltre

$$\begin{aligned}
\hat{M} &= \max\{\|\hat{a}_{ij}\|_{1,\infty}, \|\hat{b}_i\|_{1,\infty}, \|c\|_{1,\infty}\} \leq c(N)M \\
\hat{\omega} &\leq \omega + (M+1)\omega_{\hat{\varphi}}
\end{aligned}$$

dove $c(N) > 0$ è una costante che dipenda da N e $\omega_{\hat{\varphi}}$ è il modulo di continuità di $\hat{\varphi}$.

E' ora lecito applicare la Proposizione 6.3, da cui otteniamo che $\eta_i u \in W^{3,p}(\mathbb{R}^N)$, quindi $\eta_i u \in W^{3,p}(\Omega)$, e

$$\begin{aligned}
\|\eta_i u\|_{3,p;\Omega} &\leq \|\eta_i u\|_{3,p;\mathbb{R}^N} \leq C(\|\eta_i u\|_{p;\mathbb{R}^N} + \|\hat{A}(\eta_i u)\|_{1,p;\mathbb{R}^N}) \\
&= C(\|u\|_{p;\Omega} + \|A(\eta_i u)\|_{1,p;B(x_i,R_i)}) \\
&\leq C(\|u\|_{p;\Omega} + \|\eta_i Au\|_{1,p;B(x_i,R_i)} + K(\eta_i, M)\|u\|_{2,p;B(x_i,R_i)}) \\
&\leq C(\|u\|_{2,p;\Omega} + \|Au\|_{1,p;\Omega}).
\end{aligned}$$

'*caso* $n_1 < i < n$': Poniamo $v_i(y) = (\eta_i u)(H_i y)$. Osserviamo che $v_i \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{2,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ e *supp* $v_i \subset B^+(1)$. Consideriamo l'operatore $\tilde{A}$ definito in (6.11) ed estendiamolo, come prima, all'operatore $\hat{A} = \varphi\tilde{A} + (1-\varphi)\Delta$ definito in $\mathbb{R}^N_+$. Applichiamo la Proposizione 6.4 ed otteniamo che $v_i \in W^{3,p}(\mathbb{R}^N_+)$, quindi $\eta_i u \in W^{3,p}(\Omega)$, e

$$\begin{aligned}
\|\eta_i u\|_{3,p;\Omega} &\leq c(J)\|v_i\|_{3,p;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\|v_i\|_{p;\mathbb{R}^N_+} + \|\hat{A}v_i\|_{1,p;\mathbb{R}^N_+}) \\
&= C(\|v_i\|_{p;B^+(1)} + \|\tilde{A}v_i\|_{1,p;B^+(1)}) \\
&\leq C(\|\eta_i u\|_{p,;U_i} + \|A(\eta_i u)\|_{1,p;U_i}) \\
&\leq C(\|u\|_{p;\Omega} + \|\eta_i Au\|_{1,p;U_i} + K(\eta_i, M)\|u\|_{2,p;U_i}) \\
&\leq C(\|u\|_{2,p;\Omega} + \|Au\|_{1,p;\Omega}).
\end{aligned}$$

Sommando sull'indice $i = 1, ..., n$, abbiamo che $u = \sum \eta_i u \in W^{3,p}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{3,p;\Omega} \leq \sum_{i=1}^{N} \|\eta_i u\|_{2,p;\Omega} \leq C(N, p, \nu, M, \omega, \Omega, \varphi)\ (\|u\|_{2,p;\Omega} + \|Au\|_{1,p;\Omega})$$

da cui la tesi, siccome $\|u\|_{2,p;\Omega} \leq C\,(\|u\|_{p;\Omega} + \|Au\|_{p;\Omega})$.

Il passaggio da $k-1$ a k si fa come nella Proposizione 6.3. □