CENNI SULLA TEORIA DI MORSE

1. Introduzione

I primi lavori di Topologia algebrica di R. Thom riguardano proprio la "teoria di Morse" e lo studio dei punti critici di un'applicazione differenziabile è stato lo strumento fondamentale per studiare proprietà globali di varietà differenziabili. Per questi risultati, connessi con la teoria del cobordismo, Thom ha ricevuto la medaglia Fields nel 1958.

La teoria di Morse (H.C. Marston Morse 1892-1977) nacque nel 1925 con l'articolo *Relations between the critical points of a real-valued function of n independent variables*, che portava a compimento ricerche condotte da maestri dell'*Analysis situs* quali Poincaré, Veblen, Brouwer, Birkhoff, Lefscetz e Alexander ([B]) . Lo scopo principale è quello di avere informazioni sulla topologia della varietà a partire dalla conoscenza di una particolare funzione definita sulla stessa varietà; intuitivamente si può pensare a come una carta topografica può dare informazioni sulla conformazione del terreno.

Inoltre, con una successione finita di "operazioni chirurgiche", è possibile realizzare un cobordismo.

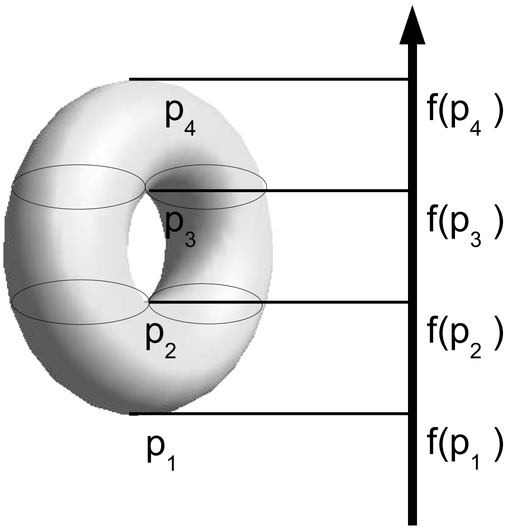
Esistono numerose applicazioni della teoria di Morse nell'àmbito della topologia differenziale (Bott 1960, Milnor 1963) e recentemente nella teoria quantistica dei campi (dopo i lavori di Witten 1982).

Quanto segue prende le mosse da alcune voci del "LEXIQUE " di Alain Chenciner, che compare come appendice al testo di R. Thom *Prédire n'est pas expliquer.* L'esposizione è abbastanza divulgativa e i periodi preceduti da un asterisco (*[...]) possono essere trascurati in una prima lettura.

2. Funzioni su una varietà differenziabile

Associamo ad ogni punto p di una varietà M un numero reale $f(p)$, valore della funzione f nel punto p, in modo che, in ogni "carta" di un "atlante" (vedi articolo precedente) f sia rappresentata da una funzione di classe C^k su $\mathbb{R}^n$, cioè una funzione ben approssimata nell'intorno di ogni punto da un polinomio di grado k a n variabili.

L'insieme dei punti aventi lo stesso valore è la cosiddetta "curva di livello", ben nota nelle carte topografiche, dove f rappresenta l'altitudine (rispetto al livello del mare) del luogo preso in considerazione.



Nella figura sono rappresentati i punti critici e le corrispondenti linee di livello sul toro relative alla funzione "altitudine" o "quota" $z = f(x, y)$, dove (x, y, z) è un punto del toro. Se tagliamo il toro con il fascio di piani perpendicolari all'asse z, vediamo che le linee di livello *cambiano forma* nel passaggio per i punti p_1, p_2, p_3, p_4, in cui il piano variabile del fascio diventa tangente al toro. Questi particolari punti, detti *punti critici*, sono punti di "resistenza" in cui Thom immagina siano contenute le informazioni essenziali per la forma della varietà. I punti critici significativi (per la forma di M) sono quelli "non degeneri", punti intorno ai quali la funzione f si rappresenta con un polinomio di grado 2. Nel caso di una supeficie, un punto critico sarà di uno dei tre tipi seguenti: di massimo, di minimo o di sella, che nelle carte topografiche corrispondono rispettivamente alle vette, alle valli e ai passi di montagna.

Ovviamente sulla sfera la funzione altitudine ha solo due punti critici (non degeneri): il massimo e il minimo; le curve di livello (tranne nei punti critici) sono sempre circonferenze.

Una funzione è detta *funzione di Morse* se tutti i suoi punti critici sono non degeneri.

*[Siano M una varietà differenziabile ed $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Un punto $p \in M$ è *critico* se in esso sono nulle tutte le derivate parziali prime di f rispetto alle coordinate locali intorno a p ([CG-DC]).

Ovviamente i punti di massimo e di minimo di f sono suoi punti critici. Se p è un punto critico, il valore critico $f(p)$ è detto anche *stazionario*, perché è legato alle condizioni di stazionarietà specialmente nella dinamica dei sistemi oscillatori con n gradi di libertà.

Un punto $p \in M$ è detto non degenere se in un sistema di coordinate locali (U, φ) (e quindi in ogni altro sistema) il determinante della matrice hessiana, $H_p(f)$, è non nullo. Un notevole risultato, dovuto a Morse, stabilisce che f ha una rappresentazione locale in p (punto critico non degenere) uguale proprio a $f(p) + \frac{1}{2}H_p(f)$.

Il numero degli autovalori strettamente negativi di $H_p(f)$ (contati con la loro molteplicità) è detto *indice del punto critico p di f*, in simboli $ind_f(p)$. Si ha

$$p \quad \textit{minimo locale} \Leftrightarrow ind_f(p) = 0$$

$$p \quad \textit{massimo locale} \Leftrightarrow ind_f(p) = \dim M$$

Se scambiamo f con $-f$, l'indice k del punto critico p si muta in $(\dim M - k)$.]

Se $f : M \to \mathbb{R}$ è la sua funzione “altitudine”, chiamiamo *linee di gradiente* le “linee di massima pendenza”, orientate secondo le altitudini crescenti; seguendo queste curve la funzione aumenta il più rapidamente possibile, cioè le linee di massima pendenza sono definite dalla proprietà di avere in ogni punto la massima pendenza compatibile con l'appartenenza alla superficie[22].

Il fatto che M sia una superficie immersa in $\mathbb{R}^3$ comporta che su M ci siano in modo naturale una nozione di perpendicolarità ed una nozione di lunghezza per le curve (la lunghezza di una curva su M è uguale a quella della stessa curva pensata in $\mathbb{R}^3$). Ciò posto, si prova che le linee di gradiente sono perpendicolari a quelle di livello, tanto nello spazio ambiente quanto in proiezione.

L'unione delle linee di gradiente che convergono in un punto critico non degenere p costituisce un disco topologico (senza bordo) di centro p, detto *cella di Thom* o *mappa discendente* del punto critico; la

[22]Si osservi che, in generale, una linea di massima pendenza non è la traiettoria di un punto materiale che si muove senza attrito su una superficie topografica. Questa traiettoria coincide con la linea di massima pendenza quando quest'ultima si trova in un piano verticale.

sua dimensione è l'*indice* del punto critico p (rispetto ad f). Se scambiamo f con $-f$, l'indice k diventa $2-k$ e la mappa diventa *ascendente.*

In accordo con l'intuizione, se p è un punto di massimo, cioè una vetta, l'unione delle traiettorie di massima pendenza convergenti in p costituisce un disco di dimensione 2, indice di p; se p è un minimo, cioè una valle, l'indice è 0; mentre se p è un punto di sella, cioè un passo, esistono solo due traiettorie di massima pendenza convergenti in p, cioè la loro unione costituisce una cella di dimensione 1, che è proprio l'indice di p. Considerando sull'asse z l'orientazione opposta, un punto di massimo diventa di minimo e viceversa, mentre quelli di sella rimangono di sella; come è intuitivo, nel nostro caso, la "forma" dell'intorno dei punti critici si conserva.

3. Teoria di Morse secondo Morse

Lo scopo principale della teoria è quello di ricostruire la "forma globale" di una varietà differenziabile M a partire dalla conoscenza di una particolare funzione di Morse su M ([M]). Il cuore della teoria è dato dalle *diseguaglianze di Morse*, che nel caso di una superficie (2-varietà) orientabile si scrivono

$$m_0 \geq b_0, \qquad m_1 - m_0 \geq b_1 - b_0, \qquad m_2 - m_1 + m_0 = b_2 - b_1 + b_0$$

dove m_k è il numero dei punti critici di indice k e b_k è il k-esimo numero di Betti di M: b_0 è il numero delle componenti connesse (cioè il numero dei pezzi) di M (quindi $b_0 = 1$ per il toro e per la sfera); $b_1 = 2h$ dove h è il *genere* di M (si ricordi che $h = 0$ per la sfera, $h = 1$ per il toro, $h = 2$ per il bitoro); $b_2 = b_0$ (poiché M è orientabile). I numeri di Betti sono invarianti topologici, cioè se M ed M' sono due varietà omeomorfe, allora i corrispondenti numeri di Betti sono uguali (ma non vale l'inverso).

Il numero intero

$$b_0 - b_1 + b_2 = \chi(M)$$

è la "caratteristica di Eulero-Poincaré" di M; anche esso chiaramente è un invariante topologico.

Per quanto sopra detto, se M è una 2-varietà (connessa) orientabile di genere h vale

$$\chi(M) = b_0 - b_1 + b_2 = 1 - 2h + 1 = 2 - 2h.$$

quindi $\chi(M) = 2$ se M è omeomorfa alla sfera $\mathbb{S}^2$ e $\chi(M) = 0$ se M è omeomorfa al toro $\mathbb{T}^2$.

Ritornando ai risultati di Morse, se $M = \mathbb{T}^2$ ed f è la funzione altitudine prima considerata, si ha $m_0 = 1, m_1 = 2, m_2 = 1$, e quindi $\chi(\mathbb{T}^2) = 1 - 2 + 1 = 0$.

Se $M = \mathbb{S}^2$ ed f è ancora la funzione "quota" del grafico della sfera, si ha $m_0 = 1 = m_2, m_1 = 0$ e qundi $\chi(\mathbb{S}^2) = 0$; se M è il geoide (omeomorfa a $\mathbb{S}^2$) ed f è la funzione altitudine sul livello del mare si ha

$$m_0 - m_1 + m_2 = 2$$

che è la cosiddetta "equazione del montanaro", già nota a L. Kronecker, grande matematico del diciannovesimo secolo ([G]). Se M è la parte di piano delimitata da una curva semplice e chiusa $\mathcal{C}$ (quindi M è omeomorfa ad un triangolo), già Newton aveva scoperto che

$$m_0 - m_1 + m_2 = 1,$$

dove m_0 è il numero delle valli, m_1 è il numero dei passi e m_2 il numero delle vette che cadono all'interno della curva di livello $\mathcal{C}$.

Le diseguaglianze di Morse si estendono al caso di varietà n-dimensionali.

4. La caratteristica di Eulero nel caso classico

Sia M una 2-varietà, anche con bordo. Se T è una sua "triangolazione", indichiamo con α_0 il numero dei vertici di T, con α_1 il numero dei lati o spigoli di T, con α_2 il numero dei triangoli o facce di T; alora si prova che

$$\chi(M) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

che è l'espressione originaria della caratteristica di Eulero.

Quindi se M ha due triangolazioni distinte T e T', allora

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0' - \alpha_1' + \alpha_2',$$

cioè $\chi(M)$ non dipende dalla triangolazione scelta; inoltre, poiché $\chi(M)$ è un invariante topologico, esso può essere calcolato considerando una triangolazione di una varietà M', omeomorfa a M, opportunamente scelta.

Per esempio, la sfera $\mathbb{S}^2$ è omeomorfa ad un tetraedro, che ha $(\alpha_0 =)$4 vertici, $(\alpha_1 =)$6 lati e $(\alpha_2 =)$4 facce, per cui $\chi(\mathbb{S}^2) = 4 - 6 + 4 = 2$. Invece la caratteristica di Eulero di un triangolo (pieno) vale 1, poiché $\alpha_0 = \alpha_1 = 3$ e $\alpha_2 = 1$; ciò prova che non possono essere omeomorfe una sfera ed un triangolo (o più in generale una figura piana delimitata da una curva semplice e chiusa).

La caratteristica di Eulero è un semplice e potente invariante topologico; la storia della Topologia - come osserva J.C. Pont ([P]) - fino al 1851 si confonde, a meno di rare eccezioni, con la storia del *teorema di Eulero* (nome latinizzato di Leonard Euler (1707-1783)), il cui enunciato originario (pubblicato nel 1752 in *Elementa doctrinae solidorum*) è

In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex angulorum solidorum et ex numero hedrorum binario excedit numerum acierum.

Chiamando con F il numero delle facce di un poliedro, con V quello dei vertici e con S quello degli spigoli, si ha la celebre formula

$$F + V = S + 2$$

che genrazioni di ragazzi hanno ricordato considerandola come acronimo della frase *Fatti Vedere Sabato alle 2* ([DC]).

Naturalmente, con il nostro simbolismo, si ha

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

se il bordo del poliedro è una poliedrica omeomora ad una sfera. Ma se la definione di poliedro usata da Eulero è quella del Libro XI degli *Elementi* di Euclide, cioè "solido delimitato da facce piane", la formula di Eulero non si applica a tutti i poliedri, come osservò già S. Lhuilier nel 1813, che esaminò i diversi casi *patologici*, introdusse il concetto di *genere* di un poliedro, concetto che giocherà un ruolo fondamentale in topologia.

Chi pose al teorema nel 1847 le ipotesi corrette è C. von Staudt, che sostanzialmente definì la nozione di poliedro semplicemente connesso (cioè di genere 0).

Infine nel 1850 L. Schläfli ottenne la prima generalizzazione per poliedri (euleriani) ad n dimensioni pervenendo alla relazione

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + ... + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1} + (-1)^n = 1$$

dove α_k è il numero delle facce k-dimensionali.

Successivamente J.B. Listing(1861) mette in luce il legame tra il teorema di Eulero e l'*Analysis situs*, che dopo di lui si chiamerà *Topologia*.

Una dimostrazione puramente topologica del teorema di Eulero è data nel 1900 da H. Poincaré (1854-1912), che si può considerare il fondatore della *Topologia combinatoria*, che dal 1940 in poi si è chiamata *Topologia algebrica*, nome più adatto ai metodi di questa disciplina.

Come afferma lo storico C.J. Pont ([P]), da cui sono tratte le notizie storiche): *dopo un secolo di storia, il teorema di Eulero ha percorso tutte le tappe di un onesto teorema: apparizione empirica, enunciato approssimativo, dimostrazione in un caso particolare, enunciato esatto, generalizzazione.*

A me non è sembrato fuori luogo accennare a questo itinerario, poiché la convinzione diffusa è che un teorema nasca già perfetto, nella forma compiuta. Quasi sempre la matematica, specialmente nelle trattazioni più formali, è presentata come un edificio perfetto, bello ma privo di vita. Per far amare la matematica è opportuno, penso, presentarla anche nella sua realtà storica: emerge così anche l'uomo con le sue pene, le sue gioie, i suoi sogni, le sue ambizioni. È chiaro che non possiamo ogni volta percorrere tutto il cammino seguito per giungere alla soperta di un teorema o all'elaborazione di una teoria, ma accennare che questo cammino c'è stato o almeno averne coscienza, è già un primo passo verso *l'umanizzazione della matematica*, che ha anche un valore "sapienziale".

L'eminente geometra russo I.R. Shafarevich (in una conferenza all'Accademia delle Scienze di Gottinga [23]) così si esprime: *Ad un'osservazione superficiale la matematica dà l'impressione di essere il risultato degli sforzi individuali separati di molte migliaia di studiosi in continenti ed epoche diversi. La logica interna del suo sviluppo, però, assomiglia molto di più all'opera di un singolo intelletto, che sviluppa il suo pensiero in modo continuo e sistematico, usando le differenti individualità umane solo come mezzi. Fa pensare ad una orchestra che esegua una sinfonia di un qualche autore. Il tema passa da uno strumento all'altro e quando uno strumentista termina la sua parte, questa viene ripresa da un altro esecutore che la sviluppa seguendo le indicazioni dello spartito.*

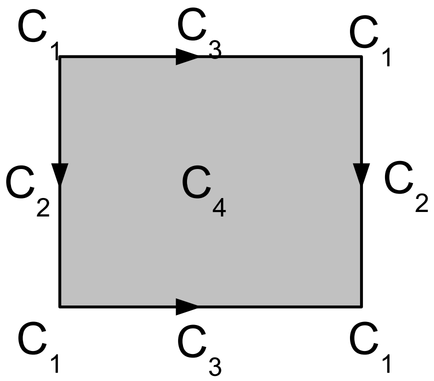
5. Teoria di Morse secondo Thom

Come detto nel paragrafo precedente, per ogni punto critico non degenere p, si può costruire una cella di Thom avente dimensione uguale all'indice del punto critico. In tal modo la varietà M viene decomposta in celle (ma la decomposizione cellulare non è necessariamente un complesso cellulare). Incollando opportunamente queste celle si può avere un "modello" della varietà originaria.

[23] Il testo, in russo, della conferenza, e la traduzione in tedesco di C.L. Siegel, sono apparsi nello *Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften in Göttingen* 1973, pp. 37-42.

Per esempio la sfera viene decomposta in una cella di dimensione 2 (indice del punto critico corrispondente al massimo) e in una cella di dimensione 0 (indice del punto critico corrispondente al minimo). Se identifichiamo il bordo della cella di dimensione 2 ad un punto (cella di dimensione 0), otteniamo una figura omeomorfa alla sfera: intuitivamente si pensi ad un fazzoletto del quale tutti i capi vengono congiunti (per esempio con un nodo).

Analogamente il toro (considerando la figura nel paragrafo 2) viene decomposto in una cella C_4 di dimensione 2 (indice del punto p_4), due celle C_3 e C_2 di dimensione 1 (indice dei punti p_3 e p_2) e una cella C_1 di dimensione 0 (indice di p_1). Questa decomposizione corrisponde a quella illustrata dalla seguente figura e già considerata come definizione del toro.



Esiste un altro procedimento, dovuto a Smale, che permette di "ricostruire " la varietà incollando successivamente "manici " (cioè tubi) sul bordo della varietà, fino ad allora costruita. Il procedimento è abbastanza tecnico ed esula da questa trattazione, che ha voluto dare soltanto un cenno della potenza e bellezza della teoria di Morse.