

## APPENDICE B

### Il teorema di Stone Weierstrass

DEFINIZIONE B.1. Siano  $X$  un insieme non vuoto e  $A$  un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni a valori reali (risp. complessi) su  $X$ . Si dice che  $A$  è un'algebra funzionale reale (risp. complessa) se per ogni  $f, g \in A$  si ha che  $fg \in A$ . Un sottospazio  $B \subseteq A$  è detto una sottoalgebra di  $A$  se  $B$  è un'algebra.

ESEMPIO B.2. Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $C(X, \mathbb{R})$  lo spazio delle funzioni reali e continue su  $X$ .  $C(X, \mathbb{R})$  è un'algebra reale funzionale. Il sottospazio  $BC(X, \mathbb{R})$  delle funzioni reali limitate e continue su  $X$  è una sottoalgebra di  $C(X, \mathbb{R})$ .

È noto che lo spazio  $BC(X, \mathbb{R})$  dotato della norma

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| \quad (f \in BC(X, \mathbb{R}))$$

è uno spazio di Banach.

DEFINIZIONE B.3. Date le funzioni  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , si indicano con  $f \vee g$  e  $f \wedge g$  le funzioni così definite

$$(f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \quad (f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\} \quad (x \in X).$$

OSSERVAZIONE B.4. Si prova facilmente che

$$f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad f \wedge g = \frac{f + g - |f - g|}{2}.$$

Quindi, se  $f$  e  $g$  sono funzioni reali continue su uno spazio topologico  $X$ , allora anche  $f \vee g$  e  $f \wedge g$  sono funzioni reali continue su  $X$ .

Per quello che segue è bene ricordare che

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

e che

LEMMA B.5. Se  $\alpha > 0$ , allora per ogni  $x \in [-1, 1]$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$$

e la convergenza della serie è totale in  $[-1, 1]$ .

DIM. Il comportamento della serie binomiale in  $] -1, 1[$  è un fatto ben noto. La convergenza assoluta della serie binomiale in  $-1$  e  $1$  segue dal criterio di Raabe osservando che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \frac{\left| \binom{\alpha}{n} \right|}{\left| \binom{\alpha}{n+1} \right|} - 1 \right) = 1 + \alpha. \quad \square$$

TEOREMA B.6. Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $A$  una sottoalgebra di  $BC(X, \mathbb{R})$ . Allora la chiusura  $\bar{A}$  di  $A$  rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$  è una sottoalgebra di  $BC(X, \mathbb{R})$ . Inoltre, se  $f, g \in \bar{A}$ , allora  $|f|$ ,  $f \vee g$  e  $f \wedge g \in \bar{A}$ .

DIM. Siano  $f, g \in \bar{A}$ . Allora esistono delle successioni  $(f_n)_n, (g_n)_n \subset A$  tali che

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0.$$

Poiché  $A$  è un'algebra,  $(f_n + g_n)_n, (\alpha f_n)_n, (f_n g_n)_n \subset A$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dalle seguenti disequaglianze

$$\begin{aligned} \|f_n + g_n - f - g\|_\infty &\leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty \\ \|\alpha f_n - \alpha f\|_\infty &= |\alpha| \|f_n - f\|_\infty \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ \|f_n g_n - f g\|_\infty &= \|f(g - g_n) + g_n(f - f_n)\|_\infty \\ &\leq \|f\| \|g - g_n\| + \|g_n\| \|f - f_n\| \end{aligned}$$

segue che  $f_n + g_n \rightarrow f + g$ ,  $\alpha f_n \rightarrow \alpha f$  e  $f_n g_n \rightarrow f g$  in  $(BC(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Di conseguenza, anche  $f + g$ ,  $\alpha f$ ,  $f g \in \bar{A}$ . Abbiamo così provato che  $\bar{A}$  è una sottoalgebra di  $BC(X, \mathbb{R})$ .

Sia ora  $f \in \bar{A}$  con  $\|f\| \neq 0$ . Per provare che  $|f| \in \bar{A}$ , procediamo come segue.

Osserviamo che, per il Lemma B.5,

$$\forall t \in [0, 1] \quad \sqrt{t} = [1 + (t-1)]^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (t-1)^k$$

e che la convergenza della serie è uniforme su  $[0, 1]$ .

Posto  $p_n(t) := \sum_{k=0}^n \binom{\frac{1}{2}}{k} (t-1)^k$ , allora  $p_n$  è un polinomio di grado  $n$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(0) = 0$ . Di conseguenza, il polinomio  $q_n := p_n - p_n(0)$  è omogeneo e  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t) - p_n(0) = \sqrt{t}$  uniformemente su  $[0, 1]$ . In particolare,

$$|t| = \sqrt{t^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(t^2)$$

uniformemente su  $[-1, 1]$ .

Poiché  $\left| \frac{f}{\|f\|_\infty} \right| \leq 1$ , possiamo scrivere che

$$\frac{|f|}{\|f\|_\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n \left( \frac{f^2}{\|f\|_\infty^2} \right) \quad \text{in } (BC(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty). \quad (\text{B.1})$$

Dato che  $f^2 \in \bar{A}$  così che  $\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2} \in \bar{A}$ , anche  $q_n \left( \frac{f^2}{\|f\|_\infty^2} \right) \in \bar{A}$ . Per (B.1) ne segue che  $\frac{|f|}{\|f\|_\infty} \in \bar{A}$  e quindi che  $|f| \in \bar{A}$ .  $\square$

**DEFINIZIONE B.7.** *Sia  $X$  un insieme non vuoto e sia  $A$  un insieme di funzioni reali definite su  $X$ . Si dice che  $A$  separa i punti di  $X$  se*

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists f \in A \quad f(x) \neq f(y).$$

**LEMMA B.8.** *Sia  $X$  un insieme non vuoto e sia  $A$  uno spazio vettoriale di funzioni reali su  $X$  che separa i punti di  $X$  e che contiene le funzioni costanti. Allora*

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \exists f \in A \quad f(x) = a \quad \text{e} \quad f(y) = b.$$

**DIM.** Siano  $x, y \in X$  tali che  $x \neq y$ . Per ipotesi esiste  $g \in A$  tale che  $g(x) \neq g(y)$ . Posto  $f := a + \frac{b-a}{g(y)-g(x)}(g - g(x))$ , la funzione  $f \in A$  poiché è una combinazione lineare della funzione  $g$  e di funzioni costanti. Inoltre, la funzione  $f$  chiaramente verifica  $f(x) = a$  e  $f(y) = b$ .  $\square$

**TEOREMA B.9 (TEOREMA DI STONE-WEIERSTRASS - REALE).** *Siano  $X$  uno spazio topologico compatto e  $A$  una sottoalgebra di  $C(X, \mathbb{R})$  che separa i punti di  $X$  e che contiene le funzioni costanti. Allora  $A$  è una sottoalgebra densa di  $C(X, \mathbb{R})$ .*

**DIM.** Fissati  $f \in C(X, \mathbb{R})$  e  $\varepsilon > 0$ , per provare che esiste  $g \in A$  tale che  $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$  procediamo come segue.

Per ogni  $x, y \in X$  tali che  $x \neq y$  scegliamo  $h_{x,y} \in A$  tale che  $h_{x,y}(x) = f(x)$  e  $h_{x,y}(y) = f(y)$ . Nel caso in cui  $x = y$ , poniamo  $h_{x,x} = f$ . Consideriamo ora l'insieme così definito

$$V_{x,y} := \{t \in X \mid h_{x,y}(t) < f(t) + \varepsilon\}.$$

Allora  $x, y \in V_{x,y}$  e  $V_{x,y}$  è un sottoinsieme aperto di  $X$ . Infatti, la funzione  $\phi := h_{x,y} - f$  è continua in  $X$  così che  $V_{x,y} = \phi^{-1} ]-\varepsilon, \varepsilon[$  è un sottoinsieme aperto di  $X$ .

Dato che per ogni  $x \in X$  la famiglia  $\{V_{x,y} \mid y \in X\}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ , esistono  $y_1, \dots, y_n \in X$  tali che

$$X = V_{x,y_1} \cup \dots \cup V_{x,y_n}.$$

A questo punto, per ogni  $x \in X$  consideriamo la funzione così definita

$$g_x := h_{x,y_1} \wedge \cdots \wedge h_{x,y_m}.$$

Allora  $g_x \in \bar{A}$  e  $g_x(x) = f(x)$ . Inoltre, se  $t \in X$ , esiste  $i \in \{1, \dots, m\}$  tale che  $t \in V_{x,y_i}$ . Di conseguenza,  $g_x(t) \leq h_{x,y_i} < f(t) + \varepsilon$ .

Per ogni  $x \in X$  poniamo

$$W_x := \{t \in X : g_x(t) > f(t) - \varepsilon\}.$$

Procedendo come prima, si dimostra che  $x \in W_x$  e che  $W_x$  è un sottoinsieme aperto di  $X$ . Allora  $\{W_x \mid x \in X\}$  è anche un ricoprimento aperto di  $X$ . Pertanto, esistono  $x_1, \dots, x_m \in X$  tali che

$$X = W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_m}.$$

Consideriamo ora la funzione così definita

$$g := g_{x_1} \vee \cdots \vee g_{x_m}.$$

Allora  $g \in \bar{A}$ . Inoltre, per ogni  $t \in X$  esistono  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  tali che

$$g_x(t) = g_{x_i}(t) < f(t) + \varepsilon \quad \text{e} \quad t \in W_{x_j}$$

il che implica che

$$g_x(t) \geq g_{x_j}(t) > f(t) - \varepsilon.$$

Pertanto,  $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ . □

**TEOREMA B.10 (TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE DI WEIERSTRASS).** *Siano  $K$  un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}$  e  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora esiste un polinomio  $P$  tale che  $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$ .*

**DIM.** Sia  $A$  l'insieme di tutti i polinomi del tipo

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (a_k \in \mathbb{R})$$

con dominio ristretto a  $K$ . Allora  $A$  è una sottoalgebra di  $C(K)$  che contiene le funzioni costanti e che separa i punti di  $K$  (basta prendere  $P(x) = x$ ). Per il teorema precedente segue quindi la tesi. □

Concludiamo con alcune considerazioni sulla validità del teorema di Stone-Weierstrass nel caso complesso.

**ESEMPIO B.11.** Consideriamo un compatto  $K \subseteq \mathbb{C}$  con parte interna  $\text{int}(K)$  non vuota e l'insieme così definito

$$A := \{f \in C(X, \mathbb{C}) : f \text{ analitica in } \text{int}(K)\}.$$

Allora  $A$  è una sottoalgebra di  $C(X, \mathbb{C})$ , contiene le funzioni costanti e separa i punti di  $K$  (basta considerare  $f(z) = z$ ). Inoltre  $A$  è una sottoalgebra

chiusa di  $C(X, \mathbb{C})$  poiché limiti uniformi di funzioni analitiche sono ancora funzioni analitiche. D'altro canto  $A \neq C(X, \mathbb{C})$  poiché ad esempio  $g(z) = |z| \notin A$ . Quindi il teorema di Stone-Weierstrass non vale nel caso complesso nella formulazione appena vista.

Con un esempio più articolato si può provare anche che lo spazio dei polinomi complessi non è denso nello spazio delle funzioni continue complesse su un compatto di  $\mathbb{C}$  (vedi [15]).

**TEOREMA B.12 (TEOREMA DI STONE-WEIERSTRASS-COMPLESSO).** *Siano  $X$  uno spazio topologico compatto e  $A$  una sottoalgebra di  $C(X, \mathbb{C})$  che separa i punti di  $X$ , contiene le costanti ed è chiusa rispetto alla coniugazione, i.e.,  $\bar{f} \in A$  per ogni  $f \in A$ . Allora  $A$  è una sottoalgebra densa di  $C(X, \mathbb{C})$ .*

**DIM.** Sia  $A_0 := \{\operatorname{Re} f \mid f \in A\}$ . Allora  $A_0$  è un sottospazio vettoriale di  $C(X, \mathbb{R})$ . In particolare, se  $f \in A$ , allora  $\operatorname{Im} f = -\operatorname{Re} if \in A_0$  e, per ogni  $f, g \in A$ ,

$$\operatorname{Re} f \cdot \operatorname{Re} g = \operatorname{Re} \frac{1}{2}(fg + f\bar{g}) \in A_0.$$

Pertanto,  $A_0$  è una sottoalgebra di  $C(X, \mathbb{R})$  che contiene le funzioni costanti. Inoltre, se  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ , esiste  $h \in A$  tale che  $h(x) \neq h(y)$ . Questo implica che  $\operatorname{Re} h(x) \neq \operatorname{Re} h(y)$  oppure  $\operatorname{Im} h(x) \neq \operatorname{Im} h(y)$ . Quindi  $A_0$  separa i punti di  $X$ . Allora, per il teorema di Stone-Weierstrass, possiamo concludere che  $A_0$  è una sottoalgebra densa di  $C(X, \mathbb{R})$ .

Sia ora  $f \in C(X, \mathbb{C})$ . Per quanto appena provato, per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono  $h_1, h_2 \in A_0$  tali che

$$\|\operatorname{Re} f - h_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|\operatorname{Im} f - h_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2},$$

da cui segue che  $\|f - h_1 + ih_2\|_\infty < \varepsilon$ . Questo completa la dimostrazione.  $\square$

**COROLLARIO B.13.** *Siano  $K$  un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}$  e  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione continua. Allora esiste un polinomio  $P$  a coefficienti complessi tale che  $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$ .*

**DIM.** Sia  $A$  l'insieme di tutti i polinomi del tipo

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (a_k \in \mathbb{R})$$

con dominio ristretto a  $K$ . Allora  $A$  è una sottoalgebra di  $C(K, \mathbb{C})$  che contiene le funzioni costanti, separa i punti di  $K$  (basta prendere  $P(x) = x$ ) ed è chiusa rispetto alla coniugazione. Per il teorema precedente segue quindi la tesi.  $\square$

COROLLARIO B.14. Sia  $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Allora lo spazio delle funzioni del tipo

$$P(z) = \sum_{k=-n}^n a_k z^k \quad (a_k \in \mathbb{C})$$

è denso in  $C(X, \mathbb{C})$ .

DIM. Basta osservare che  $\bar{z} = z^{-1}$  in  $X$ . □

COROLLARIO B.15. Siano  $K$  un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{C}$  e  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione continua. Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un polinomio  $P(x, y)$  in due variabili a coefficienti complessi tale che  $\sup_K |f(z) - P(z, \bar{z})| < \varepsilon$ .

DIM. Basta osservare che l'insieme delle funzioni del tipo  $P(z, \bar{z})$ , con  $P$  polinomio in due variabili a coefficienti complessi, è una sottoalgebra di  $C(K, \mathbb{C})$  che verifica tutte le ipotesi del Teorema B.12. □