APPENDICE A

Funzioni olomorfe a valori vettoriali

In questa appendice richiameremo e dimostreremo alcuni risultati di base sulle funzioni olomorfe a valori vettoriali. A tal fine ricordiamo in primis la definizione di integrale per una funzione continua a valori vettoriali, rinviando a [**6**, Ch.3], per ulteriori approfondimenti.

Definizione A.1. *Siano* $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio di Banach e sia* $f : [a, b] \to X$ *una funzione limitata. Diciamo che* f *è integrabile su* $[a, b]$ *se esiste* $x \in X$ *tale che per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni partizione* $\{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ *di* $[a, b]$ *con* $\sup_{i=1,\ldots,n}(t_i - t_{i-1}) < \delta$ *e per ogni scelta di punti* $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ *risulta*

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| < \varepsilon.$$

In tal caso, si pone

$$\int_a^b f(t)dt = x.$$

Si dimostra che ogni funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile.

Proposizione A.2. *Siano* $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio di Banach,* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g : [a, b] \to X$ *integrabili. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(a) $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$.
(b) $|| \int_a^b f(t)dt|| \leq \max_{t\in[a,b]} ||f(t)||(b - a)$.
(c) $|| \int_a^b f(t)dt|| \leq \int_a^b ||f(t)||dt$.
(d) $\langle \int_a^b f(t)dt, x' \rangle = \int_a^b \langle f(t), x' \rangle dt$ *per ogni* $x' \in X'$.
(e) *Se* $(f_n)_n$ *è una successione di funzioni continue da* $[a, b]$ *in* X *tali che* $\lim_n \max_{t\in[a,b]} ||f_n(t) - f(t)|| = 0$, *then* $\lim_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

Nella Proposizione A.2, e anche in seguito, $\langle x, x' \rangle$ sta a indicare $x'(x)$ se $x \in X$ e $x' \in X'$.

Se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to X$ è una funzione continua e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva regolare a tratti, allora l'integrale di f lungo γ è definito come

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Nel seguito, siano X uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$ e Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$.

Definizione A.3. *$f : \Omega \to X$ è detta olomorfa in Ω se per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste in X il limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} := f'(z_0).$$

f è detta debolmente olomorfa in Ω se è continua in Ω e la funzione complessa $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$ è olomorfa in Ω per ogni $x' \in X'$.

Ogni funzione olomorfa è chiaramente debolmente olomorfa. In realtà vale il viceversa.

Teorema A.4. *Se $f : \Omega \to X$ è debolmente olomorfa in Ω, allora è olomorfa in Ω.*

Dim. Dato $\overline{B(z_0, r)}$ disco chiuso contenuto in Ω, proviamo che per ogni $z \in B(z_0, r)$ vale la seguente formula integrale di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{A.1}$$

Osserviamo che l'espressione a destra di (A.1) è ben definita perchè f è continua. D'altro canto, f è debolmente olomorfa in Ω, quindi per la funzione olomorfa $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$, con $x' \in X'$, vale la formula integrale ordinaria di Cauchy in $B(z_0, r)$, cioè,

$$\langle f(z), x' \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{\langle f(\xi), x' \rangle}{\xi - z} d\xi = \left\langle \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, x' \right\rangle.$$

Per l'arbitrarietà di x' si ottiene (A.1). Differenziando rispetto a z sotto il segno d'integrale, otteniamo che f è olomorfa e

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

per ogni $z \in B(z_0, r)$ e $n \in \mathbb{N}$. □

Definizione A.5. *Si dice che $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è rappresentabile in serie di potenze nel punto $z_0 \in \Omega$ se esistono una successione $(a_n)_n$ a valori in X e*

$r > 0$ tali che $B(z_0, r) \subset \Omega$ e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{in } B(z_0, r).$$

TEOREMA A.6. *Sia $f : \Omega \to X$ una funzione continua. Allora f è olomorfa se e solo se f è rappresentabile in serie di potenze in ogni punto di Ω.*

DIM. Supponiamo che f sia olomorfa in Ω. Allora se $z_0 \in \Omega$ e $B(z_0, r) \subset \Omega$, la formula integrale di Cauchy (A.1) vale per ogni $z \in B(z_0, r)$. Se $z \in B(z_0, r)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{\xi - z}$$

converge uniformemente rispetto a ξ in $\partial B(z_0, r)$, poichè $\big|(z-z_0)/(\xi-z_0)| = r^{-1}|z - z_0|$. Allora per (A.1) e la Proposizione A.2(e), si ottiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \Big] (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

dove la serie converge in X.
Viceversa, supponiamo che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, r),$$

dove (a_n) è una successione in X. Allora f è continua, e per ogni $x' \in X'$,

$$\langle f(z), x' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle a_n, x' \rangle (z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, r).$$

Dunque la funzione $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$ è olomorfa in $B(z_0, r)$ per ogni $x' \in X'$ e quindi f è olomorfa per il Teorema A.4. □

TEOREMA A.7 (TEOREMA DI CAUCHY). *Sia $f : \Omega \to X$ olomorfa in Ω e sia $D \subseteq \Omega$ un dominio regolare. Allora*

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

DIM. Basta osservare che per ogni $x' \in X'$ la funzione $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$ è olomorfa in Ω e quindi

$$0 = \int_{\partial D} \langle f(z), x' \rangle dz = \Big\langle \int_{\partial D} f(z) dz, x' \Big\rangle.$$

□

Teorema A.8 (Sviluppo di Laurent). *Sia* $f : D := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \to X$ *olomorfa. Allora, per ogni* $z \in D$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,\varrho)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

e $r < \varrho < R$.

Dim. Per ogni $x' \in X'$, la funzione $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$ è olomorfa in D, quindi

$$\langle f(z), x' \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(x')(z - z_0)^n$$

dove

$$a_n(x') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,\varrho)} \frac{\langle f(z), x' \rangle}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Per la Proposizione A.2(d), si ha che

$$a_n(x') = \langle a_n, x' \rangle, \quad n \in \mathbb{Z},$$

dove a_n ha l'espressione indicata nell'enunciato. □