CAPITOLO 4

Teorema di rappresentazione spettrale per operatori illimitati

Nel seguito, $(H, \|\cdot\|)$ indicherà sempre uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ con prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

4.1. Operatori simmetrici, autoaggiunti, dissipativi

DEFINIZIONE 4.1. *Dato $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito su H, si pone*

$$D(T^*) := \{\, y \in H \mid \exists y^* \in H \text{ tale che } \forall x \in D(T)\ \langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle \,\}. \tag{4.31}$$

Osserviamo che, fissato $y \in D(T^*)$, l'elemento y^* che compare in (4.31) è unico. Infatti, se esistessero $y_1^* \in H$ e $y_2^* \in H$ tali che

$$\forall x \in D(T)\ \langle x, y_1^*\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, y_2^*\rangle\,,$$

allora, per la densità di $D(T)$ in H, seguirebbe che

$$\forall x \in H\ \langle x, y_1^*\rangle = \langle x, y_2^*\rangle\,,$$

da cui $y_1^* = y_2^*$. Pertanto, è ben posta la seguente definizione.

DEFINIZIONE 4.2. *Dato $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito su H, si definisce l'operatore aggiunto $(T^*, D(T^*))$ di $(T, D(T))$ ponendo, per ogni $y \in D(T^*)$, $T^*y := y^*$ dove y^* è l'unico elemento di H tale che $\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$ per ogni $x \in D(T)$.*

Si verifica facilmente che $T^* : D(T^*) \to H$ è ancora un operatore lineare.

PROPOSIZIONE 4.3. *Se $T : D(T) \subseteq H \to H$ è un operatore lineare densamente definito su H, allora*

$$y \in D(T^*) \ \Leftrightarrow\ \exists c > 0\ \forall x \in D(T)\ |\langle Tx, y\rangle| \le c\|x\|\,.$$

DIM. $\Rightarrow$: Se $y \in D(T^*)$, allora per la definizione (4.31) esiste $y^* \in H$ tale che

$$\forall x \in D(T) \ \ |\langle Tx, y\rangle| = |\langle x, y^*\rangle| \leq ||y^*||\,||x||.$$

$\Leftarrow$: Per densità di $D(T)$ in H, si ha che

$$\forall x \in H \ \ |\langle Tx, y\rangle| \leq c||x||,$$

il che assicura che il funzionale lineare $x \in H \rightarrow \langle Tx, y\rangle$ è continuo. Pertanto, per il teorema di Riesz-Fréchet, esiste $y^* \in H$ tale che

$$\forall x \in H \ \langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle. \quad \square$$

ESEMPIO 4.4. Siano (Ω, Σ, μ) uno spazio misurabile con misura μ σ-finita e $H = L^2(\Omega, \mu)$. Consideriamo l'operatore di moltiplicazione M_m associato ad una funzione misurabile $m : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, il cui dominio è dato da $D(M_m) = \{\, f \in L^2(\Omega, \mu) \mid mf \in L^2(\Omega, \mu)\}$. Allora $M_m^* = M_{\overline{m}}$.
Infatti, se $f \in D(M_{\overline{m}})$, allora

$$\forall h \in D(M_m) \ \ \langle mh, f\rangle = \int_\Omega mh\overline{f}d\mu = \int_\Omega h\overline{(\overline{m}f)}d\mu = \langle h, \overline{m}f\rangle\,.$$

Abbiamo così provato che $D(M_{\overline{m}}) \subseteq D(M_m^*)$ e che $M_m^* f = M_{\overline{m}} f$ per ogni $f \in D(M_{\overline{m}})$.
Viceversa, se $f \in D(M_m^*)$, allora esiste $g \in H$ tale che

$$\forall h \in D(M_m) \ \ \langle mh, f\rangle = \langle h, g\rangle\,,$$

da cui

$$\forall h \in D(M_m) \ \ \langle h, \overline{m}f\rangle = \langle h, g\rangle\,.$$

Questo significa che $f \in D(M_{\overline{m}})$.

In generale, T^* non è densamente definito, come dimostra il prossimo esempio.

ESEMPIO 4.5. Sia $H = L^2(\mathbb{R})$. Siano $f_0 \in L^2(\mathbb{R})$ con $f_0 \neq 0$ ed $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ tale che $f \notin L^2(\mathbb{R})$. Consideriamo l'operatore lineare $(T, D(T))$ su $L^2(\mathbb{R})$ così definito

$$D(T) := \{\, g \in L^2(\mathbb{R}) \mid fg \in L^1(\mathbb{R})\,\}, \qquad Tg := \langle g, f\rangle \cdot f_0\,.$$

$D(T)$ è un sottospazio denso di $L^2(\mathbb{R})$, perché contiene lo spazio $C_c(\mathbb{R})$ delle funzioni continue a supporto compatto. Invece $D(T^*)$ non è un sottospazio denso di H. Infatti, se $h \in D(T^*)$, allora per ogni $g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\langle g, T^*h\rangle &= \langle Tg, h\rangle = \langle\langle g, f\rangle \cdot f_0, h\rangle = \langle g, f\rangle \cdot \langle f_0, h\rangle \\ &= \langle g, \overline{\langle f_0, h\rangle} \cdot f\rangle = \langle g, \langle h, f_0\rangle \cdot f\rangle\,,\end{aligned}$$

da cui $T^*h = \langle f_0, h\rangle \cdot f$. Ora, dato che $f \notin L^2(\mathbb{R})$, $\langle f_0, h\rangle$ deve essere necessariamente uguale a 0 per ogni $h \in D(T^*)$. Pertanto, $D(T^*)$ non può essere denso, perché ciò implicherebbe $f_0 = 0$, contro l'ipotesi.

Proposizione 4.6. *Siano $S : D(S) \subseteq H \to H$ e $T : D(T) \subseteq H \to H$ due operatori lineari densamente definiti su H. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) *Se $S \subset T$, allora $T^* \subset S^*$.*
(2) *Se T^* è densamente definito, allora $T \subset T^{**} = (T^*)^*$.*

Dim. (1) Sia $y \in D(T^*)$. Allora per ogni $x \in D(S) \subseteq D(T)$

$$\langle Sx, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle .$$

Ne segue che $y \in D(S^*)$ e $S^* y = T^* y$.
(2) Sia $x \in D(T)$. Allora, per ogni $y \in D(T^*)$,

$$\langle T^* y, x \rangle = \overline{\langle x, T^* y \rangle} = \overline{\langle Tx, y \rangle} = \langle y, Tx \rangle .$$

Ne segue che $x \in D(T^{**})$ e $T^{**} x = Tx$. $\square$

Proposizione 4.7. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare su H densamente definito, iniettivo e con $\overline{\mathrm{Rg}(T)} = H$. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) *T^* è iniettivo.*
(2) *$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Dim. (1) Sia $y \in D(T^*)$ tale che $T^* y = 0$. Allora per ogni $x \in D(T)$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle = 0 ,$$

Questo implica che per ogni $z \in \mathrm{Rg}(T)$

$$\langle z, y \rangle = 0 .$$

Per la densità di $\mathrm{Rg}(T)$ in H, segue che $y = 0$. Dunque, T^* è iniettivo.
(2) Poichè $D(T^{-1}) = \mathrm{Rg}(T)$, $D(T^{-1})$ è un sottospazio denso di H, dunque l'operatore aggiunto $((T^{-1})^*, D((T^{-1})^*))$ è ben definito. Proviamo ora che $(T^*)^{-1} \subset (T^{-1})^*$ e che $(T^{-1}){*} \subset (T^*)^{-1}$.
Sia $y^* \in D((T^*)^{-1}) = \mathrm{Rg}(T^*)$. Allora esiste $y \in D(T^*)$ tale che $T^* y = y^*$. Se $z \in D(T^{-1})$, allora $T^{-1} z \in D(T)$ e, quindi

$$\langle T^{-1} z, y^* \rangle = \langle T^{-1} z, T^* y \rangle = \langle T T^{-1} z, y \rangle = \langle z, y \rangle = \langle z, (T^*)^{-1} y^* \rangle .$$

Pertanto, $y^* \in D((T^{-1})^*)$ e $(T^{-1})^* y^* = (T^*)^{-1} y^*$.
Sia ora $y^* \in D((T^{-1})^*)$. Allora per ogni $x \in D(T^{-1}) = \mathrm{Rg}(T)$

$$\langle T^{-1} x, y^* \rangle = \langle x, (T^{-1})^* y^* \rangle .$$

Da questo segue che, per ogni $z \in D(T)$

$$\langle z, y^* \rangle = \langle T^{-1} T z, y^* \rangle = \langle Tz, (T^{-1})^* y^* \rangle .$$

Dunque, $(T^{-1})^* y^* \in D(T^*)$ e $T^*((T^{-1})^* y^*) = y^*$. Di conseguenza, $y^* \in \mathrm{Rg}(T^*) = D((T^*)^{-1})$ e $(T^*)^{-1} y^* = (T^{-1})^* y^*$. $\square$

Definizione 4.8. *Dato $T : D(T) \subseteq H \to H$ operatore lineare densamente definito su H, si dice che T è simmetrico se $T \subset T^*$, cioè se*

$$\forall x, y \in D(T) \quad \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle\,.$$

Inoltre, si dice che T è autoaggiunto se $T = T^*$.

Esempio 4.9. Consideriamo l'operatore di moltiplicazione M_m (cfr. Esempio 4.4). Si verifica facilmente che M_m è simmetrico se e solo se $\mathrm{Im} m = 0$. In tal caso, $D(M_m) = D(M_m^*)$ così che l'operatore M_m è anche autoaggiunto.

Osservazione 4.10. Ogni operatore autoaggiunto è chiaramente simmetrico. Il viceversa non è vero in generale. Infatti, è sufficiente considerare il seguente esempio. Per le definizioni e le proprietà degli spazi di Sobolev $W^{1,2}([0,1])$ e $W_0^{1,2}([0,1])$, faremo riferimento al capitolo VIII del libro [**4**]. Siano $H = L^2([0,1])$ e $T : W_0^{1,2}([0,1]) \subseteq H \to H$ l'operatore così definito

$$\forall f \in W_0^{1,2}([0,1]) \quad Tf = if'\,.$$

Allora $D(T) = W_0^{1,2}([0,1])$ è un sottospazio denso di $L^2([0,1])$. Inoltre, per ogni $f \in W_0^{1,2}([0,1])$ e $g \in W^{1,2}([0,1])$, si ha

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^1 if'\overline{g}dx = -\int_0^1 if\overline{g'}dx = \int_0^1 f\overline{(ig')}dx.$$

Ne segue che T è simmetrico (considerando g anche in $W_0^{1,2}([0,1])$), che $W^{1,2}([0,1]) \subseteq D(T^*)$ e che $T^*g = ig'$ per ogni $g \in W^{1,2}([0,1])$.
D'altro canto, se $g \in D(T^*)$, allora per ogni $f \in D(T) = W_0^{1,2}([0,1])$ si ha

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle\,,$$

cioè

$$\int_0^1 if'\overline{g}dx = \int_0^1 fT^*gdx\,.$$

Pertanto, per ogni $f \in C_c^\infty([0,1])$, si ha

$$\int_0^1 f'(i\overline{g})dx = \int_0^1 fT^*gdx\,.$$

Ricordando la definizione di $W^{1,2}([0,1])$, ne deduciamo che $ig \in W^{1,2}([0,1])$. Dunque $D(T^*) \subseteq W^{1,2}([0,1])$. Avendo provato che $D(T^*) = W^{1,2}([0,1])$, T non può essere autoaggiunto. Osserviamo anche che T^* non è simmetrico.

Teorema 4.11 (Teorema di Hellinger-Toeplitz). *Se $T : H \to H$ è un operatore lineare simmetrico, allora $T \in \mathcal{L}(H)$. In particolare, T è anche autoaggiunto.*

Dim. Per il Teorema 1.4, è sufficiente provare che il grafico di T è chiuso. Sia allora $(x_n)_n \subseteq H$ una successione tale che esistono $\lim_n x_n = x$ e $\lim_n Tx_n = y$. Adesso, osserviamo che, per ogni $z \in H$, si ha

$$\langle z, y\rangle = \lim_n \langle z, Tx_n\rangle = \lim_n \langle Tz, x_n\rangle = \langle Tz, x\rangle = \langle z, Tx\rangle\,.$$

Di conseguenza, $Tx = y$. □

PROPOSIZIONE 4.12. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito su H. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) *T^* è chiuso.*
(2) *T è chiudibile se e solo se $D(T^*)$ è denso in H. In tal caso, $\overline{T} = T^{**}$.*
(3) *Se T è chiudibile, allora $(\overline{T})^* = T^*$.*

DIM. Prima di procedere nella dimostrazione delle suddette proprietà, osserviamo che sullo spazio prodotto $H \times H$ si definisce in maniera naturale un prodotto scalare ponendo, per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H \times H$,

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{H \times H} := \langle x_1, x_2 \rangle_H + \langle y_1, y_2 \rangle_H \, .$$

Ora, è facile verificare che lo spazio $H \times H$, dotato del prodotto scalare sopra definito, è uno spazio di Hilbert. Inoltre, l'operatore lineare $V : H \times H \to H \times H$ così definito

$$\forall (x, y) \in H \times H \quad V(x, y) := (-y, x) \, ,$$

preserva il prodotto scalare (i.e., è unitario), è suriettivo e $V^2 = -I$. In particolare, per ogni sottospazio $E \subseteq H \times H$ vale la seguente identità

$$V(E^\perp) = V(E)^\perp \, . \tag{4.32}$$

Se $S \colon D(S) \subseteq H \to H$ è un operatore lineare densamente definito su H, allora per ogni $x, y \in H$ si ha

$$\begin{aligned}
(x, y) \in [V(\mathcal{G}(S))]^\perp \quad & \Leftrightarrow \quad \forall (x_1, y_1) \in \mathcal{G}(S) \;\; \langle (x, y), V(x_1, y_1) \rangle_{H \times H} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall z \in D(S) \;\; \langle (x, y), (-Sz, z) \rangle_{H \times H} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall z \in D(S) \;\; - \langle x, Sz \rangle + \langle y, z \rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall z \in D(S) \;\; \langle x, Sz \rangle = \langle y, z \rangle \\
& \Leftrightarrow \quad x \in D(S^*) \;\text{ e }\; S^* x = y \\
& \Leftrightarrow \quad (x, y) \in \mathcal{G}(S^*).
\end{aligned}$$

Abbiamo così provato che

$$\mathcal{G}(S^*) = [V(\mathcal{G}(S))]^\perp. \tag{4.33}$$

(1) Poiché l'ortogonale di un sottospazio di uno spazio di Hilbert è sempre un sottospazio chiuso, l'identità (4.33) implica che $\mathcal{G}(T^*)$ è un sottospazio chiuso di $H \times H$ e, quindi $(T^*, D(T^*))$ è un operatore lineare chiuso.
(2) Per le ben note proprietà della operazione di ortogonalizzazione in spazi di Hilbert, si ha

$$\overline{\mathcal{G}(T)} = [\mathcal{G}(T)^\perp]^\perp.$$

Ricordando che l'operatore V sopra definito soddisfa le proprietà (4.32) e (4.33) e che $V^2 = -I$, ne segue

$$\overline{\mathcal{G}(T)} = V^2\left[[\mathcal{G}(T)^\perp]^\perp\right] = \left[V[V(\mathcal{G}(T))]^\perp\right]^\perp = [V(\mathcal{G}(T^*))]^\perp \,. \tag{4.34}$$

Possiamo ora dimostrare la proprietà (2). Supponiamo che $\overline{D(T^*)} = H$. Allora, applicando prima l'uguaglianza (4.34) e poi l'uguaglianza (4.33), otteniamo che

$$\overline{\mathcal{G}(T)} = [V(\mathcal{G}(T^*))]^\perp = \mathcal{G}(T^{**})\,.$$

Questo assicura che $(T^{**}, D(T^{**}))$ è un operatore lineare chiuso e dunque $(T, D(T))$ è un operatore lineare chiudibile tale che $\overline{T} = T^{**}$.
Viceversa, supponiamo che $(T, D(T))$ sia un operatore lineare chiudibile, ma che il dominio $D(T^*)$ di T^* non sia un sottospazio denso di H. Allora $D(T^*)^\perp$ è un sottospazio proprio di H e, quindi esiste $x \in D(T^*)^\perp$ tale che $x \neq 0$. Di conseguenza, per ogni $y \in D(T^*)$ si ha

$$\langle (x,0), (y, T^*y)\rangle_{H\times H} = \langle x, y\rangle + \langle 0, T^*y\rangle = 0\,,$$

cioè $(x, 0) \in [\mathcal{G}(T^*)]^\perp$. Pertanto, $(0, x) \in V[\mathcal{G}(T^*)^\perp] = [V(\mathcal{G}(T^*))]^\perp = \overline{\mathcal{G}(T)}$. Ora, dato che $x \neq 0$ e $(0, x) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$, lo spazio $\overline{\mathcal{G}(T)}$ non può essere il grafico di un operatore lineare e quindi T non è chiudibile.
(3) Per la proprietà (1) l'operatore lineare $(T^*, D(T^*))$ è chiuso. Questo ci consente di applicare la proprietà (2) a T^* per concludere che

$$T^* = \overline{T^*} = (T^*)^{**} = (T^{**})^* = (\overline{T})^*. \qquad \square$$

Corollario 4.13. *Se $T : D(T) \subseteq H \to H$ è un operatore lineare densamente definito simmetrico, allora T è chiudibile.*

Dim. Basta osservare che $T \subset T^*$.

Osservazione 4.14. Se T è un operatore simmetrico densamente definito su H, allora $T \subset T^*$ e dunque $T^{**} = \overline{T} \subset T^*$. Se T è anche chiuso, allora

$$T = \overline{T} = T^{**} \subset T^*. \tag{4.35}$$

Di conseguenza, se T è un operatore chiuso e simmetrico, allora T è autoaggiunto se e solo se T^* è simmetrico.

Proposizione 4.15. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito su H. Allora T è simmetrico se e solo se $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in D(T)$.*

Dim. Supponiamo che T sia simmetrico. Allora per ogni $x \in D(T)$

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}\,,$$

da cui segue che $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.
Viceversa, supponiamo che $\langle Tz, z\rangle \in \mathbb{R}$ per ogni $z \in D(T)$. Allora, per ogni $x, y \in D(T)$,

$$\langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle = -\langle T(x-y), x-y)\rangle + \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle \in \mathbb{R}\,.$$

Di conseguenza, $\mathrm{Im}\langle Tx, y\rangle = -\mathrm{Im}\langle Ty, x\rangle = \mathrm{Im}\langle x, Ty\rangle$. Analogamente, per ogni $x, y \in D(T)$, risulta

$$i\langle Ty, x\rangle - i\langle Tx, y\rangle = -\langle T(x-iy), x-iy)\rangle + \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle \in \mathbb{R}\,.$$

Pertanto, $\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle = \mathrm{Im}\, i\langle Tx, y\rangle = \mathrm{Im}\, i\langle Ty, x\rangle = \mathrm{Re}\langle Ty, x\rangle = \mathrm{Re}\langle x, Ty\rangle$.
Abbiamo così dimostrato che $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ per ogni x, $y \in D(T)$, cioè che T è simmetrico. □

Teorema 4.16. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito su H. Se T è simmetrico, allora le seguenti proprietà sono equivalenti.*

(i) *T è autoaggiunto.*
(ii) *T è chiuso e* $\ker(T^* \pm i) = \{0\}$.
(iii) $\mathrm{Rg}(T \pm i) = H$.

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii): Poiché $T = T^*$, per la Proposizione 4.12(i) possiamo concludere che T è chiuso. Ora, sia $x \in D(T^*) = D(T)$ tale che $T^*x = Tx = ix$. Allora, ricordando che T è simmetrico, risulta

$$i\langle x, x\rangle = \langle ix, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle x, ix\rangle = -i\langle x, x\rangle,$$

da cui $x = 0$. In modo analogo si dimostra che $\ker(T^* + i) = \{0\}$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Proviamo prima che $\mathrm{Rg}(T - i)$ è un sottospazio denso di H. Sia $y \in H$ tale che $\langle Tz - iz, y\rangle = 0$ per ogni $z \in D(T)$. Allora, per ogni $z \in D(T)$,

$$\langle Tz, y\rangle = \langle z, -iy\rangle\,.$$

Quindi, $y \in D(T^*)$ e $T^*y = -iy$. Per ipotesi, si ha che $y = 0$. Abbiamo così provato che $[\mathrm{Rg}(T-i)]^\perp = \{0\}$, il che implica che $\mathrm{Rg}(T-i)$ è un sottospazio denso di H.
Proviamo ora che $\mathrm{Rg}(T - i)$ è un sottospazio chiuso di H. Per questo osserviamo che, grazie alla Proposizione 4.15, per ogni $x \in D(T)$,

$$\begin{aligned} ||(T-i)x||^2 &= ||Tx||^2 + ||x||^2 + 2\mathrm{Re}\langle Tx, -ix\rangle \\ &= ||Tx||^2 + ||x||^2 + 2\mathrm{Re}[i\langle Tx, x\rangle] \\ &= ||Tx||^2 + ||x||^2. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Se $(x_n)_n \subseteq D(T)$ è una successione tale che $\lim_n(Tx_n - ix_n) = y_0 \in H$, allora $(Tx_n - ix_n)_n$ è una successione di Cauchy in H. D'altro canto, per l'uguaglianza (4.36) appena dimostrata, si ha per ogni $n, m \in \mathbb{N}$

$$||x_n - x_m||^2 + ||Tx_n - Tx_m||^2 = ||Tx_n - ix_n - Tx_m + ix_m||^2\,.$$

Di conseguenza, anche $(x_n)_n$ e $(Tx_n)_n$ sono successioni di Cauchy in H, e pertanto successioni convergenti di H. Siano $x_0 = \lim_n x_n$ e $z_0 = \lim_n Tx_n$. T è chiuso, quindi $x_0 \in D(T)$ e $z_0 = Tx_0$, cioè $y_0 = (T-i)x_0 \in \mathrm{Rg}(T-i)$. La dimostrazione è analoga per $\mathrm{Rg}(T+i)$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Osserviamo che $\ker(T^*-i) = \{0\}$. Infatti, se $T^*z = iz$ per qualche $z \in D(T^*)$, allora

$$\forall x \in D(T) \quad \langle Tx + ix, z\rangle = \langle x, T^*z - iz\rangle = 0\,.$$

Dato che $\mathrm{Rg}(T+i) = H$ per ipotesi, ne segue che $z = 0$.
Sia ora $y \in D(T^*)$. Per ipotesi, esiste $x \in D(T)$ tale che $(T-i)x = (T^*-i)y$. Poiché $D(T) \subset D(T^*)$ essendo T simmetrico, ne segue che $y - x \in D(T^*)$ e che $(T^*-i)(y-x) = 0$. Quindi, $y - x = 0$ così che $y \in D(T)$. Abbiamo così provato che $D(T) = D(T^*)$, cioè che T è autoaggiunto. □

Osservazione 4.17. L'ipotesi che $\ker(T \pm i) = \{0\}$ non può essere rimossa in (ii). Infatti, se consideriamo l'operatore lineare

$$T : W_0^{1,2}([0,1]) \subseteq L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), \qquad Tf = if'\,,$$

allora T è simmetrico e $D(T^*) = W^{1,2}([0,1])$ (cfr. Osservazione 4.10). Inoltre, $(T, D(T))$ è anche un operatore chiuso. Infatti, sia $(\psi_n)_n \in W_0^{1,2}([0,1])$ tale che $\lim_n \psi_n = \psi$ e $\lim_n T\psi_n = \phi$ in $L^2([0,1])$. Allora, per ogni $\xi \in C_c^\infty([0,1])$ risulta

$$\int_0^1 \psi\xi' dx = \lim_n \int_0^1 \psi_n \xi' dx = -\lim_n \int_0^1 \psi_n' \xi dx = i\int_0^1 \phi\xi dx.$$

Ciò assicura che esiste $\psi' \in L^2([0,1])$ tale che $\psi' = i\phi$. Quindi, possiamo concludere che $\psi_n \to \psi$ in $W^{1,2}([0,1])$. Poiché $(\psi_n)_n \subset W_0^{1,2}([0,1])$ e $W_0^{1,2}([0,1])$ è un sottospazio chiuso di $W^{1,2}([0,1])$, deduciamo anche che $\psi \in W_0^{1,2}([0,1])$. Questo completa la dimostrazione del fatto che T è chiuso. D'altro canto, le funzioni $f_\pm \in D(T^*)$ così definite $f_\pm(x) := e^{\pm x}$ sono tali che $T^* f_\pm = \pm i f_\pm$. Dunque, $\ker(T^* \pm i) \neq \{0\}$.

Definizione 4.18. *Un operatore lineare $T : D(T) \subseteq H \to H$ si dice dissipativo se*

$$\forall x \in D(T) \quad \mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle \leq 0.$$

Esempio 4.19. Consideriamo l'operatore lineare T su $L^2([0,1], \mathbb{C})$ definito ponendo

$$D(T) := \{f \in C^1([0,1], \mathbb{C}) \mid f(0) = f(1) = 0\}, \qquad Tf := f'\,.$$

Se $f \in D(T)$, allora

$$\langle Tf, f\rangle = \int_0^1 f'\overline{f} dx = -\int_0^1 f\overline{f'} dx\,.$$

Ciò implica che

$$\mathrm{Re}\langle Tf, f\rangle = -\int_0^1 [(\mathrm{Re} f)(\mathrm{Re} f)' + (\mathrm{Im} f)(\mathrm{Im} f)'] dx = -\frac{1}{2}[|f(1)|^2 - |f(0)|^2] = 0\,.$$

Per l'arbitrarietà di $f \in D(T)$, possiamo concludere che T è dissipativo.

TEOREMA 4.20. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito su H. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti.*

(i) *T è simmetrico.*
(ii) *$\pm iT$ è dissipativo.*

DIM. (i) $\Rightarrow$ (ii): Per ogni $x \in D(T)$ si ha

$$\mathrm{Re}\langle \pm iTx, x\rangle = \pm \mathrm{Re}(i\langle Tx, x\rangle = 0\,.$$

Ciò implica che T è dissipativo.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Per ogni $x \in D(T)$ si ha

$$\mathrm{Im}\langle Tx, x\rangle = -\mathrm{Re}\langle iTx, x\rangle = \mathrm{Re}\langle -iTx, x\rangle\,.$$

Per la dissipatività di $\pm iT$, ne segue che $\mathrm{Im}\langle Tx, x\rangle = 0$ per ogni $x \in D(T)$. Quindi, $\langle Tx, x\rangle = \mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in D(T)$. $\square$

OSSERVAZIONE 4.21. Dal teorema precedente segue che se T è dissipativo, allora iT è simmetrico e dunque chiudibile per il Corollario 4.13. Pertanto anche T è chiudibile.

PROPOSIZIONE 4.22. *Un operatore densamente definito $T : D(T) \subseteq H \to H$ è dissipativo se e solo se $||x - sTx|| \geq ||x||$ per ogni $x \in D(T)$ e $s > 0$.*

DIM. Se T è dissipativo, allora per ogni $x \in D(T)$ e $s > 0$ si ha

$$\begin{aligned} ||x - sTx|| \cdot ||x|| &\geq |(x - sTx, x)| \\ &\geq \mathrm{Re}\langle x - sTx, x\rangle \\ &= ||x||^2 - s\mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle \\ &\geq ||x||^2\,. \end{aligned}$$

Viceversa, se $x \in D(T)$, allora per ogni $s > 0$,

$$||x||^2 \leq ||x - sTx||^2 = ||x||^2 + s^2||Tx||^2 - 2\mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle\,.$$

Ciò implica che $s||Tx||^2 - 2\mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle \geq 0$ per ogni $s > 0$ così che $\mathrm{Re}(Tx, x) \leq 0$. $\square$

COROLLARIO 4.23. *Se $T : D(T) \subseteq H \to H$ è un operatore dissipativo, allora $\lambda - T$ è iniettivo per ogni $\lambda > 0$. Inoltre, se T è anche chiuso, allora $\mathrm{Rg}(\lambda - T)$ è un sottospazio chiuso di H per ogni $\lambda > 0$.*

DIM. Fissato $\lambda > 0$, l'iniettività di $\lambda - T$ segue immediatamente dalla Proposizione 4.22.
Assumiamo ora che T sia chiuso e che $(x_n)_n \subset D(T)$ sia una successione

tale che esiste $\lim_n(\lambda x_n - Tx_n) = y \in H$. Dato che per la Proposizione 4.22 si ha

$$\forall n,\, m \in \mathbb{N} \ \ ||x_n - x_m|| \le ||x_n - \frac{1}{\lambda}Tx_n - x_m + \frac{1}{\lambda}Tx_m||\,.$$

ne segue che $(x_n)_n$ è una successione di Cauchy in H e pertanto converge a qualche $x \in H$. Di conseguenza, $\lim_n Tx_n = \lambda x - y$. Poiché T è chiuso, possiamo così concludere che $x \in D(T)$ e $y = \lambda x - Tx$. Questo dimostra che $\mathrm{Rg}(\lambda - T)$ è un sottospazio chiuso di H. $\square$

Teorema 4.24. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore dissipativo su H. Se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ tale che $(\lambda - T)(D(T)) = H$, allora $\lambda \in \rho(T)$. In particolare, $\mathbb{C}_+ = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\mu) > 0\} \subseteq \rho(T)$ e la seguente diseguaglianza è soddisfatta*

$$\forall \mu \in \mathbb{C}_+ \qquad ||R(\mu, T)|| \le \frac{1}{\mathrm{Re}(\mu)}\,. \tag{4.37}$$

Dim. Occorre provare solo che l'operatore $\lambda - T$ è iniettivo dato che $(\lambda - T)(D(T)) = H$ per ipotesi. Per questo osserviamo che per ogni $x \in D(T)$ e $y := \lambda x - Tx$ si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\lambda\, ||x||^2 &= \mathrm{Re}\lambda\, \langle x, x\rangle = \mathrm{Re}\langle \lambda x, x\rangle \\ &= \mathrm{Re}\langle y + Tx, x\rangle = \mathrm{Re}\langle y, x\rangle + \mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle \\ &\le \mathrm{Re}\langle y, x\rangle \le ||x|| \cdot ||y||\,. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Se $y = 0$, allora da (4.38) segue che anche $x = 0$. Quindi, l'operatore $\lambda - T$ è iniettivo. Inoltre, la diseguaglianza (4.38) implica anche che

$$||(\lambda - T)^{-1} y|| = ||x|| \le \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}||y||.$$

Abbiamo così provato che $\lambda \in \rho(T)$ e che $||R(\lambda, T)|| \le \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}$.
Se $\mu \in \mathbb{C}_+ \cap \rho(T)$ con $\mu \ne \lambda$, allora $||R(\mu, T)|| \le \frac{1}{\mathrm{Re}(\mu)}$ come segue ripetendo l'argomentazione precedente.
Per completare la dimostrazione, è sufficiente quindi provare che $\mathbb{C}_+ \cap \rho(T) = \mathbb{C}_+$. Per fare questo usiamo un argomento di connessione. Osserviamo che $\mathbb{C}_+ \cap \rho(T)$ è un sottoinsieme aperto e non vuoto di $\mathbb{C}_+$. Dimostriamo che è anche un sottoinsieme chiuso di C_+. Sia $(\mu_n)_n \subset \rho(T) \cap \mathbb{C}_+$ una successione convergente a qualche $\mu \in \mathbb{C}_+$. Possiamo allora supporre che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}\mu_n \ge c > 0$ e quindi $||R(\mu_n, T)|| \le \frac{1}{c}$, in virtù di (4.37). Per la convergenza di $(\mu_n)_n$ a μ, esiste $\overline{n}$ tale che

$$|\mu - \mu_{\overline{n}}| \le c \le \frac{1}{||R(\mu_{\overline{n}}, T)||}\,.$$

Pertanto $\mu \in \rho(T)$ per la Proposizione 1.12(1). Dunque $\mathbb{C}_+ \cap \rho(T)$ è anche un sottoinsieme chiuso in $\mathbb{C}_+$. Poiché $\mathbb{C}_+ \cap \rho(T)$ è un sottoinsieme non vuoto sia aperto sia chiuso di $\mathbb{C}_+$ e $\mathbb{C}_+$ è un insieme connesso, possiamo concludere che $\mathbb{C}_+ \cap \rho(T) = \mathbb{C}_+$. $\square$

PROPOSIZIONE 4.25. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito su H. Se T è simmetrico, allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) *Se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Im\lambda > 0$ tale che $(\lambda - T)(D(T)) = H$, allora $\{\mu \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\mu > 0\} \subseteq \rho(T)$.*
(2) *Se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Im\lambda < 0$ tale che $(\lambda - T)(D(T)) = H$, allora $\{\mu \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\mu < 0\} \subseteq \rho(T)$.*

DIM. Osserviamo prima che, in virtù del Teorema 4.20, l'operatore $\pm iT$ è dissipativo poiché T è simmetrico.
(1) Posto $\mu := -i\lambda$, osserviamo ora che $\mathrm{Re}\mu = \mathrm{Im}\lambda > 0$ e che l'operatore $\mu + iT$ è suriettivo per ipotesi. Possiamo così applicare il teorema precedente a $-iT$ per concludere che $\mathbb{C}_+ \subseteq \rho(-iT)$, o equivalentemente che $i\mathbb{C}_+ \subseteq \rho(T)$. Tenuto conto che $i\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}z > 0\}$, la tesi segue.
(2) Si argomenta analogamente al caso (1) considerando però l'operatore iT. □

OSSERVAZIONE 4.26. Dalla Proposizione 4.25 si può dedurre che se T è un operatore simmetrico, allora per lo spettro $\sigma(T)$ si può presentare solo una delle seguenti possibilità.

- $\sigma(T) \subseteq \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\mu \geq 0\}$.
- $\sigma(T) \subseteq \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\mu \leq 0\}$.
- $\sigma(T) = \mathbb{C}$.
- $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ (se esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(T)$ con $\mathrm{Im}\lambda_1 > 0$ e $\mathrm{Im}\lambda_2 < 0$).

COROLLARIO 4.27. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito. Se T è autoaggiunto, allora $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.*

DIM. Poiché T è autoaggiunto, si ha che $\mathrm{Rg}(T \pm i) = H$ in virtù del Teorema 4.16. Quindi, per la Proposizione 4.25, $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}z \neq 0\} \subseteq \rho(T)$ così che $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. □

PROPOSIZIONE 4.28. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito simmetrico e dissipativo. Le sequenti affermazioni sono equivalenti.*

(i) *T è autoaggiunto*
(ii) $\sigma(T) \subseteq]-\infty, 0]$.
(iii) *(I-T)(D(T))=H.*

DIM. (i)$\Rightarrow$ (ii): Per il Corollario 4.27 è sufficiente provare che se $\lambda > 0$, allora $\lambda \in \rho(T)$.

Se $\lambda > 0$, allora l'operatore $\lambda - T$ è iniettivo ed ha rango chiuso in virtù del Corollario 4.23 e del Teorema 4.16. D'altro canto, poiché T è autoaggiunto,

$$\{0\} = \ker(\lambda - T) = [\mathrm{Rg}(\lambda - T)]^{\perp},$$

così che $(\lambda - T)(D(T))$ è un sottospazio denso di H. Pertanto $(\lambda - T)(D(T)) = H$, cioè $\lambda - T$ è anche un operatore suriettivo. Abbiamo così provato che $\lambda \in \rho(T)$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Per (ii), $\pm i \in \rho(T)$ e dunque T è autoaggiunto per il Teorema 4.16.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Per (ii), $1 \in \rho(T)$.
(iii) $\Rightarrow$ (ii): Per il Teorema 4.24, si ha che $\mathbb{C}_+ \subseteq \rho(T)$, dunque esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(T)$ con $\mathrm{Im}\lambda_1 > 0$ e $\mathrm{Im}\lambda_2 < 0$. Pertanto, per la Proposizione 4.25, $\pm i \in \rho(T)$ e dunque T è autoaggiunto per il Teorema 4.16. $\square$

Esempio 4.29. Consideriamo l'operatore $(A, D(A))$ su $L^2([0,1])$ definito da

$$D(A) = W_0^{1,2}([0,1]) \cap W^{2,2}([0,1]), \qquad Af = f''.$$

L'operatore $(A, D(A))$ è noto come Laplaciano con condizioni al bordo di Dirichlet. Proviamo che A è un operatore dissipativo autoaggiunto.
Siano $f, g \in D(A)$. Ricordando che $f(0) = f(1) = g(0) = g(1)$, si ha

$$\begin{aligned} \langle Af, g\rangle_{L^2([0,1])} &= \int_0^1 f''\overline{g}dx = f'\overline{g}|_0^1 - \int_0^1 f'\overline{g}'dx = -\int_0^1 f'\overline{g}'dx \\ &= -f\overline{g'}|_0^1 + \int_0^1 f\overline{g}''dx = \langle f, Ag\rangle_{L^2([0,1])}. \end{aligned}$$

Dunque A è simmetrico e poichè

$$\langle Af, f\rangle = -\int_0^1 |f'|^2 dx \leq 0$$

possiamo concludere che A è dissipativo. Dimostriamo ora che A è autoaggiunto provando che $(I - A)(D(A)) = L^2([0,1])$. Data $f \in L^2([0,1])$, consideriamo la forma lineare continua su $W_0^{1,2}([0,1])$

$$\Phi(g) = \int_a^b g\overline{f}dx, \qquad g \in W_0^{1,2}([0,1]).$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz-Fréchet esiste ed è unica $h \in W_0^{1,2}([0,1])$ tale che $\Phi(g) = \langle h, g\rangle_{W^{1,2}([0,1])}$ per ogni $g \in W_0^{1,2}([0,1])$, cioè

$$\int_0^1 g\overline{h}dx + \int_0^1 g'\overline{h}'dx = \int_0^1 g\overline{f}dx.$$

Considerando $\overline{g}$ invece di g, si ottiene

$$\int_0^1 \overline{g}\overline{h}dx + \int_0^1 \overline{g}'\overline{h}'dx = \int_0^1 \overline{g}\overline{f}dx,$$

e passando ai coniugati

$$\int_0^1 ghdx + \int_0^1 g'h'dx = \int_0^1 gfdx,$$

cioè

$$-\int_0^1 g'h'dx = \int_0^1 g(h-f)dx,$$

per ogni $g \in W_0^{1,2}([0,1])$. Ciò significa che $h-f$ è la derivata debole di h'. Dunque $h \in W^{2,2}([0,1])$ e $h'' = h - f$. Pertanto $h \in D(A)$ e $h - Ah = f$.

4.2. Teorema di rappresentazione spettrale per operatori illimitati

TEOREMA 4.30. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert separabile H. Allora esistono uno spazio dotato di misura finita (Y, μ), un operatore unitario $U : H \to L^2(Y, \mu)$ ed una funzione $q : Y \to \mathbb{R}$ μ–misurabile tale che*

(1) $x \in D(T) \;\Leftrightarrow\; Ux \in D(M_q)$,
(2) $Tx = U^{-1}M_qUx$ *per ogni* $x \in D(T)$.

DIM. In virtù del Teorema 4.16, gli operatori $(T+i)$ e $(T-i)$ con dominio $D(T)$ sono iniettivi e chiusi. Inoltre, $\mathrm{Rg}(T \pm i) = H$. Pertanto esistono gli operatori $(T+i)^{-1}$ e $(T-i)^{-1}$ e, in particolare, questi sono definiti e limitati su H e commutano per l'identità del risolvente.
Ora osserviamo che, per ogni x, $y \in D(T)$, si ha

$$\begin{aligned}\langle (T-i)x, (T+i)^{-1}(T+i)y\rangle &= \langle (T-i)x, y\rangle \\ &= \langle x, (T+i)y\rangle \\ &= \langle (T-i)^{-1}(T-i)x, (T+i)y\rangle .\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{Rg}(T \pm i) = H$, per ogni $z_1, z_2 \in H$, si ha

$$\langle z_1, (T+i)^{-1}z_2\rangle = \langle (T-i)^{-1}z_1, z_2\rangle .$$

Questo assicura che $((T+i)^{-1})^* = (T-i)^{-1}$, ovvero che $T+i$ è un operatore normale. Allora per il Teorema 3.21 esiste un spazio dotato di misura finita (Y, μ), un operatore unitario $U : H \to L^2(Y, \mu)$ ed una funzione μ–misurabile limitata $m : Y \to \mathbb{C}$ tale che $U(T+i)^{-1}U^{-1} = M_m$. Poichè $\ker(T+i)^{-1} = \{0\}$, necessariamente $m \neq 0$ μ-q.o. così che possiamo definire la funzione $q := m^{-1} - i$. Chiaramente, q è una funzione μ–misurabile.
Proviamo ora che le proprietà (1) e (2) sono soddisfatte.
Fissato $x \in D(T)$ e posto $y := (T+i)x$, si ha che $x = (T+i)^{-1}y = U^{-1}M_mUy$. Ne segue che $Ux = M_mUy$ così che $(U^{-1}M_{\frac{1}{m}}U)x = y =$

$Tx + ix$. Di conseguenza, $Tx = (U^{-1}M_{\frac{1}{m}}U)x - iU^{-1}Ux = U^{-1}M_qUx$. Ciò implica che $Ux \in D(M_q)$ e che la proprietà (2) è soddisfatta.
Viceversa, se $x \in U^{-1}(D(M_q))$, allora $Ux \in D(M_q)$ e

$$U^{-1}M_qUx = (U^{-1}M_{\frac{1}{m}}U)x - ix\,.$$

Posto $z := U^{-1}M_{\frac{1}{m}}$, si dimostra facilmente che $x = (T+i)^{-1}z$ così che $x \in D(T)$ e $U^{-1}M_qUx = Tx + ix - ix = Tx$.
Infine, ricordando che T è autoaggiunto, possiamo applicare il Corollario 4.27 per affermare $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Ora, tenuto conto che $\sigma(T) = q_{\text{ess}}(Y)$, ne segue che q deve essere a valori reali. □

Definizione 4.31. *Si dice che un operatore $T\colon D(T) \subseteq H \to H$ ha risolvente compatto se $\rho(T) \neq \emptyset$ e $R(\lambda, T)$ è un operatore compatto per ogni $\lambda \in \rho(T)$.*

La seguente proposizione fornisce un'utile caratterizzazione degli operatori con risolvente compatto.

Proposizione 4.32. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare con $\rho(T) \neq \emptyset$. Allora T ha risolvente compatto se e solo se l'immersione canonica $\iota : (D(T), ||\cdot||_T) \hookrightarrow H$ è compatta, dove $||\cdot||_T$ indica la norma del grafico.*

Dim. Poniamo $H_1 = (D(T), ||\cdot||_T)$. Se T ha risolvente compatto, allora $\iota = (\lambda - A)R(\lambda, A)$ è un operatore compatto, poichè $\lambda - A : H_1 \to H$ è un operatore continuo e $R(\lambda, A) : H \to H_1$ è un operatore compatto.
Viceversa, sia ι un operatore compatto. Osserviamo che $R(\lambda, A) : H \to H_1$ è un operatore continuo. Dunque $R(\lambda, A)$, come operatore da H in $D(A)$, è compatto perchè composizione di un operatore continuo con l'immersione compatta ι. □

Proposizione 4.33 (Teorema dell'applicazione spettrale per i risolventi). *Sia $T : D(T) \subseteq X \to X$ un operatore lineare su X e sia $\lambda \in \rho(T)$. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) $\sigma(R(\lambda, T)) \setminus \{0\} = \{\frac{1}{\lambda - \mu} \mid \mu \in \sigma(T)\}$.
(2) $\sigma_p(R(\lambda, T)) \setminus \{0\} = \{\frac{1}{\lambda - \mu} \mid \mu \in \sigma_p(T)\}$.

Dim. Fissato $\mu \in \rho(T) \setminus \{\lambda\}$, osserviamo che l'operatore S così definito

$$S := (\lambda - \mu)(\lambda - T)R(\mu, T)$$

soddisfa

$$S = (\lambda - \mu)(\lambda - \mu)R(\mu, T) + (\lambda - \mu)I \in \mathcal{L}(X).$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\lambda-\mu}-R(\lambda,T)\right)S &= (\lambda-T)R(\mu,T)-(\lambda-\mu)R(\mu,T)\\ &= (\mu-T)R(\mu,T)=I,\\ S\left(\frac{1}{\lambda-\mu}-R(\lambda,T)\right) &= (\lambda-T)R(\mu,T)-(\lambda-\mu)R(\mu,T)\\ &= (\mu-T)R(\mu,T)=I.\end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che esiste

$$\left(\frac{1}{\lambda-\mu}-R(\lambda,T)\right)^{-1}=S=(\lambda-\mu)(\lambda-T)R(\mu,T)\in\mathcal{L}(X), \qquad (4.39)$$

dunque $\frac{1}{\lambda-\mu}\in\rho(R(\lambda,T))$.
Possiamo ora dimostrare la proprietà (1). Sia $\nu\in\sigma(R(\lambda,T))\setminus\{0\}$. Nel caso in cui $\nu\neq\frac{1}{\lambda-\mu}$ per ogni $\mu\in\sigma(T)$, il numero complesso $\lambda-\frac{1}{\nu}$ non può appartenere allo $\sigma(T)$. Pertanto $\lambda-\frac{1}{\nu}\in\rho(T)$. Dato che $\lambda-\frac{1}{\nu}\neq\lambda$, per quanto dimostrato sopra possiamo concludere che $\nu\in\rho(R(\lambda,T))$ e che, per l'identità (4.39),

$$(\nu-R(\lambda,T))^{-1}=\frac{1}{\nu}(\lambda-T)R\left(\lambda-\frac{1}{\nu},T\right).$$

Questo è un assurdo.
Viceversa, sia $\nu=\frac{1}{\lambda-\mu}$ con $\mu\in\sigma(T)$. Supponiamo che $\nu\in\rho(R(\lambda,T))$ e consideriamo l'operatore S_1 così definito $S_1:=\nu R(\lambda,T)(\nu-R(\lambda,T))^{-1}$. Allora

$$\begin{aligned}(\mu-T)S_1 &= (\mu-T)\nu R(\lambda,T)(\nu-R(\lambda,T))^{-1}\\ &= (\mu-\lambda+\lambda-T)\nu R(\lambda,T)(\nu-R(\lambda,T))^{-1}\\ &= (-R(\lambda,T)+\nu)(\nu-R(\lambda,T))^{-1}=I\\ S_1(\mu-T) &= \nu R(\lambda,T)(\nu-R(\lambda,T))^{-1}(\mu-T)=I,\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è utilizzato il fatto che $R(\lambda,T)$ e $(\nu-R(\lambda,T))^{-1}$ commutano. Questo significa che $\mu\in\rho(T)$, ottenendo così un assurdo.
Per la dimostrazione della proprietà (2) si procede in modo analogo utilizzando la definizione di spettro puntuale. □

Osservazione 4.34. Se $D(T)$ è denso in X, ma $D(T)\neq X$, allora

$$\sigma(R(\lambda,T))=\{0\}\cup\{\frac{1}{\lambda-\mu}\mid\mu\in\sigma(T)\}.$$

Infatti, poiché $\mathrm{Rg}(R(\lambda,T))=D(T)$ e $D(T)\neq X$, $R(\lambda,T)$ non può essere invertibile e dunque $0\in\sigma(R(\lambda,T))$.

Teorema 4.35. *Sia $T:D(T)\subseteq H\to H$ un operatore lineare su H con risolvente compatto. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.
(2) $\sigma(T)$ *è finito oppure* $\sigma(T) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C}$ *con* $|\lambda_n| \to +\infty$.
(3) $\dim\ker(\lambda - T) = \infty$ *per ogni* $\lambda \in \sigma(T)$.

Dim. Basta applicare la Proposizione 4.33. □

Teorema 4.36. *Sia* $T : D(T) \subseteq H \to H$ *un operatore autoaggiunto con risolvente compatto su uno spazio di Hilbert separabile* H. *Allora esistono una successsione* $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}$ *ed un sistema ortonormale completo* $\{e_n\}_n$ *di* H, *con* $e_n \in D(T)$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *tali che*

(1) $Te_n = \lambda_n e_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$,
(2) $D(T) = \{x \in H \mid (\lambda_n\langle x, e_n\rangle) \in l^2\}$,
(3) $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\langle x, e_n\rangle e_n$ *per ogni* $x \in D(T)$.

Dim. Per il Teorema 4.35 esiste certamente $\mu \in \mathbb{R}$ con $\mu > 0$ tale che $\mu \in \rho(T)$. L'operatore $R(\mu, T)$ è compatto, in quanto T è un operatore con risolvente compatto. Inoltre, $R(\mu, T)$ è un operatore autoaggiunto perché lo è T. Infatti, per ogni $y_1, y_2 \in H$, dato che per ogni $i = 1, 2$ esiste $x_i \in D(T)$ tale che $y_i = (\mu - T)x_i$, si ha

$$\langle R(\mu, T)y_1, y_2\rangle = \langle x_1, (\mu - T)x_2\rangle = \langle(\mu - T)x_1, x_2\rangle = \langle y_1, R(\mu, T)y_2\rangle \,.$$

Allora per il Teorema 2.28 esistono un sistema ortonormale completo $\{e_n\}_n$ di H ed una successione $(\alpha_n)_n$ di numeri reali tali che $R(\mu, T)e_n = \alpha_n e_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per cui

$$\forall x \in H \quad R(\mu, T)x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\langle x, e_n\rangle e_n \,.$$

Siccome $R(\mu, T)$ è iniettivo, ogni autovalore α_n è diverso da 0. Di conseguenza, $e_n \in D(T)$ e $Te_n = (\mu - \alpha_n^{-1})e_n$ con $\lambda_n := \mu - \alpha_n^{-1} \in \mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Abbiamo così provato la proprietà (1).
Ora, se $x \in D(T)$, per l'ortonormalità di $\{e_n\}_n$,

$$(\lambda_n\langle x, e_n\rangle)_n = (\langle x, Te_n\rangle)_n = (\langle Tx, e_n\rangle)_n \in l^2$$

e

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\langle x, e_n\rangle e_n \,.$$

Da questo seguono la proprietà (3) e un'inclusione della proprietà (2). Per dimostrare l'inclusione inversa procediamo come segue.
Preso $x \in H$ tale che $(\lambda_n\langle x, e_n\rangle)_n \in l^2$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$x_k := \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n\rangle e_n \quad \text{e} \quad y_k := \sum_{n=1}^{k} \lambda_n\langle x, e_n\rangle e_n \,.$$

Chiaramente, $x_k \in D(T)$ e $Tx_k = y_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Inoltre, $x_k \to x$ e $Tx_k \to \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$ in H. Poiché T è chiuso, deduciamo che necessariamente $x \in D(T)$ e $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Esempio 4.37. L'operatore di Laplace con condizioni di Dirichlet considerato nell'Esempio 4.29 ha risolvente compatto. Per dimostrarlo, osserviamo innanzitutto che l'immersione $(D(A), ||\cdot||_A) \hookrightarrow W^{1,2}([0,1])$ è continua. Infatti, se $(f_n)_n \subseteq D(A)$ converge a f rispetto a $||\cdot||_A$ e $\lim_n f_n = g$ in $W^{1,2}([0,1])$, allora $\lim_n f_n = f$ e $\lim_n f_n = g$ in $L^2([0,1])$. Pertanto $f = g$. Ricordando che $(D(A), ||\cdot||_A)$ è uno spazio di Banach, poichè A è chiuso, per il teorema del grafico chiuso si ottiene che l'immersione è continua. Inoltre l'immersione du $W^{1,2}([0,1]) \hookrightarrow L^2([0,1])$ è compatta, pertanto anche l'immersione $(D(A), ||\cdot||_A) \hookrightarrow L^2([0,1])$ è compatta. Per la Proposizione 4.32, $(A, D(A))$ ha risolvente compatto. Si dimostra poi facilmente che, per ogni $f \in L^2([0,1])$,

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2 \left(\int_0^1 f(x) e_n(x) dx \right) e_n$$

dove $e_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$.

4.3. Operatori positivi e teoremi di minimax per autovalori

Definizione 4.38. *Sia $T : D(T) \subset H \to H$ un operatore simmetrico. T si dice positivo se*

$$\forall x \in D(T) \quad \langle Tx, x \rangle \geq 0.$$

Se S e T sono operatori simmetrici su H e $D(S) = D(T)$, allora si dice che $S \leq T$ se $T - S \geq 0$.

Osservazione 4.39. Se $c \in \mathbb{R}$, allora

$$T \geq cI \;\Leftrightarrow\; \forall x \in D(T) \;\; \langle Tx, x \rangle \geq c||x||^2 .$$

In particolare, se T è un operatore simmetrico e positivo, allora $-T$ è un operatore dissipativo.

Grazie al Teorema di rappresentazione spettrale 4.30 possiamo dimostrare la seguente caratterizzazione.

Teorema 4.40. *Siano $T : D(T) \subset H \to H$ un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert separabile H e $c \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti le seguenti proprietà.*

(i) $\langle Tx, x \rangle \geq c||x||^2$ *per ogni* $x \in D(T)$.
(ii) $\sigma(T) \subseteq [c, +\infty[$.

In particolare, $T \geq 0$ *se e solo se* $\sigma(T) \subseteq [0, +\infty[$.

Dim. Per il Teorema 4.30 esistono uno spazio di misura finita (Y, μ), una funzione limitata μ–misurabile $q : Y \to \mathbb{R}$ e un operatore unitario $U : H \to L^2(Y, \mu)$ tali che $T = U^{-1} M_q U$. Allora possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}
\forall x \in D(T) \ \ \langle Tx, x\rangle \geq c||x||^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in D(T) \ \ \langle U^{-1} M_q U x, x\rangle \geq c||x||^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall f \in D(M_q) \ \ \langle U^{-1} M_q f, U^{-1} f\rangle \geq \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \geq c||U^{-1} f||^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall f \in D(M_q) \ \ \langle M_q f, f\rangle \geq c||f||^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall f \in D(M_q) \int_Y q|f|^2 d\mu \geq c \int_Y |f|^2 d\mu \\
&\Leftrightarrow \quad q \geq c \ \ \mu - \text{q.o.} \Leftrightarrow q_{\text{ess}}(\Omega) \subseteq [c, +\infty[\\
&\Leftrightarrow \quad \sigma(T) \subseteq [c, +\infty[. \qquad \square
\end{aligned}$$

.

Teorema 4.41 (Formula variazionale di Rayleigh-Ritz). *Sia* $T : D(T) \subset H \to H$ *un operatore autoaggiunto, positivo con risolvente compatto su uno spazio di Hilbert separabile* H. *Sia* $\{\lambda_n\}_n$ *la successione degli autovalori di* T *ordinati in modo crescente e ripetuti secondo la loro molteplicità. Allora, per ogni* $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_n = \inf\{\lambda(L) \mid L \subset D(T), \ \dim L = n\} \tag{4.40}$$

dove

$$\lambda(L) := \sup\{\langle Tx, x\rangle \mid x \in L \text{ e } ||x|| = 1\}\,. \tag{4.41}$$

Dim. Osserviamo prima che se L è un sottospazio finito dimensionale di H con $L \subset D(T)$, allora $T_{|L}$ è chiaramente un operatore limitato così che esiste $c > 0$ tale che $0 \leq \langle Tx, x\rangle \leq c||x||^2$ per ogni $x \in L$. Di conseguenza, $0 \leq \lambda(L) < +\infty$.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $\mu_n := \inf\{\lambda(L) \mid L \subset D(T), \ \dim L = n\}$ e dimostriamo che $\mu_n = \lambda_n$.
Per il Teorema 4.36 esiste un sistema ortonormale completo $\{\varphi_n\}_n \subset D(T)$ di H tale che $T\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n$ per ogni $x \in D(T)$. Posto $L := \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, se $f \in L$ con $||f|| = 1$, allora

$$f = \sum_{i=1}^{n} \langle f, \varphi_i\rangle \varphi_i, \quad Tf = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f, \varphi_i\rangle \varphi_i\,,$$

così che

$$\langle Tf, f\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\langle f, \varphi_i\rangle|^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} |\langle f, \varphi_i\rangle|^2 = \lambda_n\,.$$

Ne segue che $\lambda(L) \leq \lambda_n$. Ciò implica che $\mu_n \leq \lambda_n$, ricordando la definizione di μ_n.

Viceversa, fissiamo un sottospazio L di $D(T)$ con dimensione n e consideriamo la proiezione ortogonale P su $G = \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}\}$ definita da

$$\forall f \in H \quad Pf = \sum_{i=1}^{n-1} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \,.$$

Allora esiste $f \in L$ con $||f|| = 1$ tale che $Pf = 0$ poiché $\dim G = n - 1 < \dim L$. Di conseguenza,

$$f = \sum_{i=n}^{\infty} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i, \qquad Tf = \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \,.$$

Da ciò segue che

$$\langle Tf, f \rangle = \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 \geq \lambda_n \sum_{i=n}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \lambda_n.$$

Pertanto $\lambda(L) \geq \lambda_n$. Per l'arbitrarietà di L, concludiamo che $\mu_n \geq \lambda_n$. □

Corollario 4.42. *Siano $T_1 \colon D(T_1) \colon H \to H$ e $T_2 \colon D(T_2) \colon H \to H$ due operatori positivi e autoaggiunti su uno spazio di Hilbert separabile H tali che $T_1 \leq T_2$. Siano $\{\lambda_n^{(1)}\}_n$ e $\{\lambda_n^{(2)}\}_n$ le successioni degli autovalori di T_1 e T_2 rispettivamente, ordinati in modo crescente e ripetuti secondo la loro molteplicità. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lambda_n^{(1)} \leq \lambda_n^{(2)} \,. \tag{4.42}$$

Dim. Poiché $T_1 \leq T_2$, $D := D(T_1) = D(T_2)$ e $\langle T_1 f, f \rangle \leq \langle T_2 f, f \rangle$ per ogni $f \in D$. Allora

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)}(L) &= \sup\{\langle T_1 x, x \rangle \mid x \in L \text{ e } ||x|| = 1\} \\ &\leq \lambda^{(2)}(L) = \sup\{\langle T_2 x, x \rangle \mid x \in L \text{ e } ||x|| = 1\} \end{aligned}$$

per ogni sottospazio $L \subset D$ con $\dim L = n$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Passando agli estremi inferiori la tesi segue in virtù dell'uguaglianza (4.40). □