CAPITOLO 2

Operatori compatti in spazi di Banach

2.1. Operatori compatti

Definizione 2.1. *Siano* $(X, ||\cdot||_X)$ *e* $(Y, ||\cdot||_Y)$ *spazi di Banach e* $T\colon X \to Y$ *un operatore lineare. L'operatore* T *si dice compatto se* $T(B_X)$ *è un sottoinsieme relativamente compatto di* Y.

Esempio 2.2. Si consideri un compatto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e una funzione $K : \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}$ continua. Sia $T : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ l'operatore integrale così definito:

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)dy, \qquad f \in L^p(\Omega),\ x \in \Omega.$$

Dal teorema della convergenza dominata segue facilmente che $T(L^p(\Omega)) \subseteq C(\Omega)$. Proviamo che T è compatto. Osserviamo che per ogni $f \in L^p(\Omega)$ con $\|f\|_p \leq 1$, applicando la disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$\|Tf\|_\infty \leq ||K||_{p'}\|f\|_p \leq ||K||_\infty|\Omega|^{1/p'}.$$

Dunque l'insieme $T(B_{L^p(\Omega)})$ è equilimitato in $C(\Omega)$. Inoltre, per l'uniforme continuità di K, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x_1, x_2, y \in \Omega$:

$$||x_1 - x_2|| < \delta \ \Rightarrow\ |K(x_1,y) - K(x_2,y)| < \varepsilon|\Omega|^{-1/p'}.$$

Pertanto per ogni $f \in B_{L^p(\Omega)}$, se $||x_1 - x_2|| < \delta$, applicando nuovamente la disuguaglianza di Hölder si deduce:

$$|Tf(x_1) - Tf(x_2)| \leq \int_\Omega |K(x_1,y) - K(x_2,y)||f(y)|dy \leq \varepsilon.$$

Quindi $T(B_{L^p(\Omega)})$ è anche equiuniformemente continuo e dunque, per il teorema di Ascoli-Arzelà, è relativamente compatto in $C(\Omega)$. Per l'immersione continua di $C(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$, otteniamo che $T(B_{L^p(\Omega)})$ è relativamente compatto in $L^p(\Omega)$.

Poiché i sottoinsiemi relativamente compatti di uno spazio di Banach sono anche limitati, ogni operatore compatto T è anche continuo (cf. Proposizione 1.1). Inoltre, vale la seguente caratterizzazione.

Teorema 2.3 (Teorema di Schauder). *Siano* $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *due spazi di Banach e* $T : X \to Y$ *un operatore lineare. Allora* T *è compatto se e solo se il suo duale* T' *è compatto.*

Dim. Supponiamo che T sia compatto, cioè che $T(B_X)$ sia un sottoinsieme di Y relativamente compatto, e indichiamo con K la chiusura di $T(B_X)$ in Y. Poiché T è un operatore limitato, esiste $M > 0$ tale che $\|y\|_Y \leq M$ per ogni $y \in K$. Pertanto, per ogni $f \in B_{Y'}$ risulta

$$\|f\|_K := \sup\{|f(y)| \mid y \in K\} \leq M,$$

così che possiamo indentificare $B_{Y'}$ con un sottoinsieme limitato dello spazio di Banach $C(K)$ formato da tutte le funzioni continue sul compatto K e dotato della norma

$$\|g\|_K := \sup\{|g(y)| \mid y \in K\} \qquad (g \in C(K)). \tag{2.14}$$

Inoltre, per ogni $f \in B_{Y'}$ e y, $z \in K$ si ha

$$|f(y) - f(z)| \leq \|y - z\|_Y.$$

Questo implica che $B_{Y'}$ è un sottoinsieme equicontinuo di $C(K)$ e, essendo limitato, è relativamente compatto per il Teorema di Ascoli-Arzelà. Perciò, ogni successione $(f_n)_n \subset B_{Y'}$ contiene una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ che è una successione di Cauchy rispetto alla norma (2.14). Poiché

$$\begin{aligned} \|T'f_{n_k} - T'f_{n_j}\|'_Y &= \sup_{x \in B_X} |(T'f_{n_k} - T'f_{n_j})(x)| = \sup_{x \in B_X} |(f_{n_k} - f_{n_j})(Tx)| \\ &= \|f_{n_k} - f_{n_j}\|_K, \end{aligned}$$

$(T'f_{n_k})_k$ è allora una successione di Cauchy di X'. Quindi $(T'f_{n_k})_k$ converge a qualche elemento di X' poiché X' è completo. Abbiamo così dimostrato che $T'(B_{Y'})$ è un sottoinsieme relativamente compatto di X' e quindi l'operatore T' è compatto.
Supponiamo che T' sia compatto. Allora, procedendo come sopra, si dimostra che l'operatore $T'' \colon X'' \to Y''$ è compatto. Dato che $T = T''_{|X}$, ne segue che anche T è compatto. $\square$

Osservazione 2.4. Se indichiamo con $\mathcal{L}$ la classe di tutti gli operatori lineari e continui tra spazi di Banach, allora $\mathcal{L}$ è un'algebra rispetto alla operazione di composizione dato che

$$\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$$

per ogni $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $S \in \mathcal{L}(Z, X)$. Indichiamo con $\mathcal{K}$ la classe di tutti gli operatori lineari e compatti tra spazi di Banach e con $\mathcal{F}$ la classe di tutti gli operatori lineari continui con rango finito dimensionale. Ricordando che ogni sottoinsieme limitato in uno spazio finito dimensionale è relativamente compatto, chiaramente la seguente inclusione è soddisfatta

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{L}.$$

Inoltre, $\mathcal{K}$ è un ideale di $\mathcal{L}$, cioè

$$SRT \in \mathcal{K}(X, W)$$

per ogni $S \in \mathcal{L}(Z, W)$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $R \in \mathcal{K}(Y, Z)$. Infatti, poiché $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $T(B_X)$ è un sottoinsieme limitato di Y e quindi esiste $\lambda > 0$ tale che $T(B_X) \subset \lambda B_Y$. Ne segue che $R(T(B_X)) \subset \lambda R(B_Y)$, dove $R(B_Y)$ è un sottoisieme relativamente compatto di Z dato che $R \in \mathcal{K}(Y, Z)$. Poiché $S \in \mathcal{L}(Z, W)$, possiamo concludere che $S(R(T(B_X)))$ è un sottoisieme relativamente compatto di W.

Proposizione 2.5. *Siano* $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *due spazi di Banach. Allora* $\mathcal{K}(X, Y)$ *è un sottospazio chiuso di* $\mathcal{L}(X, Y)$.

Dim. Sia $(T_n)_n \subset \mathcal{K}(X, Y)$ tale che $T_n \xrightarrow{n} T$ in $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|)$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste allora $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$,

$$\|T_n - T\| < \varepsilon\,,$$

o equivalentemente,

$$T(B_X) \subset (T - T_n)(B_X) + T_n(B_X) \subset \varepsilon B_Y + T_n(B_X)\,. \tag{2.15}$$

Preso $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$, $T_n(B_X)$ è un sottoinsieme relativamente compatto di Y poiché $T_n \in \mathcal{K}(X, Y)$, e quindi $T_n(B_X)$ è totalmente limitato. In corrispondenza di ε, possiamo allora trovare un numero finito di elementi di B_Y, diciamo $y_1, y_2, \ldots, y_k$, tali che

$$T_n(B_X) \subset \cup_{i=1}^{k}(y_i + \varepsilon B_Y)\,. \tag{2.16}$$

Ponendo $y_{k+1} = 0$, per (2.15) e (2.16) otteniamo che

$$T(B_X) \subset \cup_{i=1}^{k+1}(y_i + \varepsilon B_Y).$$

Per l'arbitrarietà di ε, questo significa che $T(B_X)$ è un sottoinsieme totalmente limitato e quindi relativamente compatto di Y. $\square$

Osservazione 2.6. Dalla Proposizione 2.5 segue che se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono due spazi di Banach, $(T_n)_n$ una successione di operatori di rango finito da X in Y e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tali che $\lim_{n\to\infty} ||T_n - T||_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0$, allora T è compatto. La questione se ogni operatore compatto tra spazi di Banach è sempre il limite in norma di una opportuna successione di operatori di rango finito rimase un problema aperto per molto tempo, noto in letteratura come il "problema dell'approssimazione". Questo problema fu risolto in negativo da Enflo nel 1972. Ma è bene ricordare che se Y è uno spazio di Hilbert (o, più in generale, se possiede una base di Schauder), allora la chiusura dello spazio $\mathcal{F}(X, Y)$ è proprio $\mathcal{K}(X, Y)$ (cfr., per esempio, [**4**]).

Osservazione 2.7. Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach infinito dimensionale e $T \in \mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X, X)$, allora $0 \in \sigma(T)$. Altrimenti T sarebbe un isomorfismo topologico da X su X e quindi $T(B_X)$ un intorno di 0 relativamente compatto. Ne seguirebbe che X è localmente compatto e perciò finito dimensionale.

2.2. La teoria di Riesz–Schauder

Nel seguito con $(X, \|\cdot\|)$ indicheremo uno spazio di Banach infinito dimensionale su $\mathbb{C}$ e, dato $T \in \mathcal{L}(X)$, con T_λ l'operatore $\lambda - T$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Se T_λ non è iniettivo per qualche $\lambda \neq 0$, cioè se $\lambda \in \sigma_p(T)$ è un *autovalore* di T, indicheremo con $N(T_\lambda) := \ker T_\lambda$ l'*autospazio* relativo all'autovalore λ. In generale, lo spazio $N(T_\lambda)$ è infinito dimensionale. Invece, se T è compatto, risulta

Proposizione 2.8. *Sia $T \in \mathcal{K}(X)$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$,*

$$\dim N(T_\lambda^n) < \infty\,.$$

Dim. Sia $n = 1$. Posto $B := B_X \cap N(T_\lambda)$, $T_\lambda(B) = \{0\}$, quindi $\lambda B = T(B)$. Poiché $T(B)$ è un sottoinsieme relativamente compatto di X, anche B è un sottoinsieme relativamente compatto di X e dunque in $N(T_\lambda)$. Pertanto $N(T_\lambda)$ è finito dimensionale.
Per $n > 1$ la dimostrazione è analoga dato che

$$\begin{aligned} T_\lambda^n &= (\lambda - T)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k}(-1)^k T^k \\ &= \lambda^n - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1}\lambda^{n-k} T^k\,, \end{aligned}$$

dove $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1}\lambda^{n-k}T^k \in \mathcal{K}(X)$. □

Proposizione 2.9. *Sia $T \in \mathcal{K}(X)$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, $T_\lambda^n(X)$ è un sottospazio chiuso di X.*

Dim. Sia $n = 1$. Per la Proposizione 2.8 $\dim N(T_\lambda) < \infty$. Questo garantisce che $N(T_\lambda)$ è un sottospazio complementato di X, cioè esiste un operatore lineare continuo $P\colon X \to X$ tale che $P(X) = N(T_\lambda)$ e $P^2 = P$. Posto $Y := \ker P$, possiamo rappresentare X come segue

$$X = N(T_\lambda) \oplus Y \tag{2.17}$$

così che $T_\lambda(X) = T_\lambda(Y)$. Fissato $z \in \overline{T_\lambda(X)}$, esiste una successione $(y_n)_n \subset Y$ tale che $T_\lambda(y_n) \stackrel{n}{\to} z$ in X. Supponiamo che la successione $(y_n)_n$ non sia limitata. Allora esiste una sottosuccessione $(y_{n_k})_k$ di $(y_n)_n$ tale che $\|y_{n_k}\| \stackrel{k}{\to} \infty$. Posto $v_k := \frac{y_{n_k}}{\|y_{n_k}\|} \in Y$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, ne segue che $\|v_k\| = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, cioè $(v_k)_k$ è una successione limitata, $T_\lambda(v_k) = \frac{1}{\|y_{n_k}\|}T(y_{n_k}) \stackrel{k}{\to} 0$. Inoltre, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k = \lambda^{-1}(T_\lambda(v_k) + T(v_k))\,. \tag{2.18}$$

Poiché la successione $(v_k)_k$ è limitata e T è un operatore compatto, esiste una sottosuccessione di $(T(v_k))_k$ convergente. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che la successione $(T(v_k))_k$ stessa sia convergente, diciamo a $v' \in X$. Per l'identità (2.18) ne segue che $v_k \xrightarrow{k} \lambda^{-1}v' := v \in X$ così che $\|v\| = 1$. Inoltre, per la continuità di T e l'unicità del limite, $T_\lambda(v_k) \xrightarrow{k} T_\lambda(v) = 0$. Questo implica che $v \in N(T_\lambda)$ e quindi $v = P(v) = \lim_{k\to\infty} P(v_k) = 0$. Abbiamo così ottenuto un assurdo dato che $\|v\| = 1$.
Pertanto la successione $(y_n)_n$ è limitata. Ragionando come per la successione $(v_k)_k$, possiamo concludere che (eventualmente passando ad una sottosuccessione) $y_n \xrightarrow{n} y \in X$. Per la continuità di T_λ e l'unicità del limite, $T_\lambda(y_n) \to T_\lambda(y) = z$. Quindi $z \in T_\lambda(X)$.
In modo analogo si dimostra che $T_\lambda^n(X)$ è un sottospazio chiuso di X se $n > 1$. □

Corollario 2.10. *Sia $T \in \mathcal{K}(X)$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$,*

$$\operatorname{codim} T_\lambda^n(X) < \infty .$$

Dim. Sia $n = 1$. Poiché $T'_\lambda = \lambda - T'$ e $T' \in \mathcal{K}(X')$ per il Teorema 2.3, possiamo applicare la Proposizione 2.8 per concludere che $\dim N(T'_\lambda) < \infty$.
D'altra parte, per la Proposizione 2.9 il rango $T_\lambda(X)$ è un sottospazio chiuso di X e quindi lo spazio quoziente $\frac{X}{T_\lambda(X)}$, dotato della topologia indotta, è uno spazio di Banach. In particolare, per la Proposizione 1.2, il suo duale topologico è isomorfo a $N(T'_\lambda)$. Ne segue che il duale di $\frac{X}{T_\lambda(X)}$, e quindi $\frac{X}{T_\lambda(X)}$ stesso, è finito dimensionale, cioè $\operatorname{codim} T_\lambda(X) < \infty$.
Se $n > 1$, si procede in maniera analoga. □

Lemma 2.11 (Lemma di Riesz). *Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach ed M un sottospazio chiuso di X. Allora, per ogni $\delta \in]0,1[$ esiste $x \in X$ tale che $\|x\| = 1$ e $d(x, M) > \delta$.dove*

$$d(x, M) = \inf\{\|x - y\| \ \mid \ y \in M\} \le \|x\| .$$

Dim. Poiché M è un sottospazio chiuso di X, per il Teorema di Hahn–Banach esiste un iperpiano chiuso H tale che $M \subset H$. Supponiamo che $H = \{y \in X \ \mid \ f(y) = 0\}$ per qualche $f \in X'$ con $\|f\|' = 1$.
Fissato $\delta \in]0,1[$, esiste $x \in X$ tale che $\|x\| = 1$ e $|f(x)| > \delta$. Di conseguenza, per ogni $y \in H$,

$$\delta < |f(x)| = |f(x - y)| \le \|f\|' \cdot \|x - y\| = \|x - y\|$$

così che

$$\delta < |f(x)| \le \inf\{ \ \|x - y\| \ \mid \ y \in H\} = d(x, H) \le d(x, M) . \tag{2.19}$$

□

Osservazione 2.12. Sia H un iperpiano chiuso di X, cioè $H = \{\ y \in X \ \mid f(y) = 0\} = \ker f$ per qualche $f \in X'$ con $\|f\|' = 1$. Sia $x \in X$ con $\|x\| = 1$. Allora $d(x,H) = 1$ se, e solo se, $|f(x)| = 1$. Infatti, se $|f(x)| = 1$, allora per (2.19) otteniamo che

$$1 \leq d(x,H) \leq \|x\| = 1\,.$$

Viceversa, supponiamo che $d(x,H) = 1$. In tal caso, fissato $z \in X \setminus H$ con $\|z\| = 1$, poniamo $y := x - \frac{f(x)}{f(z)} z$. Allora, $f(y) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)} f(z) = 0$, cioè $y \in H$, e

$$1 = d(x,H) \leq \|x - y\| = \left|\frac{f(x)}{f(z)}\right|\,.$$

Ne segue che $|f(z)| \leq |f(x)|$. Per l'arbitrarietà di z, con $\|z\| = 1$, otteniamo che $1 = \|f\|' \leq |f(x)| \leq \|f\|'\|x\| = 1$.
Questo significa che, se il funzionale f non assume la norma sulla sfera unitaria di X, allora $d(x,H) \neq 1$ per ogni $x \in X$ con $\|x\| = 1$. □

Esempi 2.13. (1) Siano $X = c_0$ e $f \in \ell^1 = (c_0, \|\cdot\|_\infty)'$ definito da $f(y_n)_n := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} y_n$ per ogni $(y_n)_n \in c_0$. Allora, per ogni $y = (y_n)_n \in c_0$,

$$|f(y)| \leq \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}|y_n| \leq \|y\|_\infty \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} = \|y\|_\infty\,.$$

Questo implica che $\|f\|' \leq 1$. D'altra parte, per ogni $k \in \mathbb{N}$ la successione $y_k := (y_{nk})_n$, con $y_{nk} = 1$ se $n \leq k$ e $y_{nk} = 0$ se $n > k$, appartiene a c_0 e

$$0 \leq f(y_k) = \sum_{n=1}^k 2^{-n} \leq \|f\|'\|y_k\|_\infty = \|f\|'\,,$$

da cui, passando al limite per $k \to \infty$, si ottiene che

$$1 = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \leq \|f\|'.$$

Di conseguenza, $\|f\|' = 1$.
Supponiamo ora che esista $x = (x_n)_n \in c_0$ con $\|x\| = 1$ tale che $|f(x)| = 1$. Poiché $x \in c_0$, esiste $k \in N$ tale che $|x_k| < 1/2$. Ne segue che

$$\begin{aligned} 1 = |f(x)| = \left|\sum_{n=1}^\infty 2^{-n} x_n\right| &\leq \sum_{n=1}^{k-1} 2^{-n}|x_n| + 2^{-k}|x_k| + \sum_{n>k} 2^{-n}|x_n| \\ &\leq \sum_{n=1}^{k-1} 2^{-n} + \frac{1}{2}\left(2^{-k} + \sum_{n>k} 2^{-n}\right) < 1\,, \end{aligned}$$

e otteniamo una contraddizione.
(2) Siano $X = C[0,1]$ e $f \in (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)'$ definito da $f(x) = \int_0^{1/2} x(t)dt - \int_{1/2}^0 x(t)dt$ per ogni $x \in C[0,1]$. Procedendo in modo analogo, si dimostra che non esiste $x \in C[0,1]$ con $\|x\|_\infty = 1$ tale $|f(x)| = 1$.

Osservazione 2.14. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach riflessivo e $f \in X'$ con $\|f\|' = 1$. Allora esiste $x \in X$ con $\|x\| = 1$ tale che $|f(x)| = 1$. Infatti, dato che $\|f\|' = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = 1$, possiamo determinare una successione $(x_n)_n \subset X$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $f(x_n) \stackrel{n}{\to} 1$. Poiché la sfera unitaria di X è debolmente compatta, $x_n \stackrel{n}{\to} x_0$ debolmente per qualche $x_0 \in X$ (eventualmente passando ad una sottosuccessione), il che implica che $f(x_n) \stackrel{n}{\to} f(x_0) = 1$.

In verità, la proprietà appena dimostrata caratterizza la riflessività nell'ambito della classe degli spazi di Banach.

Teorema 2.15 (Teorema di James). *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach. Allora X è riflessivo se, e solo se, per ogni $f \in X'$ con $\|f\|' = 1$ esiste $x \in X$ tale che $\|x\| = 1$ e $|f(x)| = 1$.*

Per la dimostrazione del Teorema di James rinviamo a [**8**], p.84.

Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach infinito dimensionale e $S \in \mathcal{L}(X)$. Allora è facile verificare che

$$\{0\} = N(S^0) \subseteq N(S) \subseteq N(S^2) \subseteq \ldots \subseteq N(S^k) \subseteq \ldots ,$$

dove $S^0 = I$.

Definizione 2.16. Se esiste $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tale che $N(S^k) = N(S^{k+1})$, allora

$$a(S) := \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \mid \ N(S^k) = N(S^{k+1})\}$$

si dice *indice di ascesa* di S.

Analogamente, risulta

$$X = S^0(X) \supseteq S(X) \supseteq S^2(X) \supseteq \ldots \supseteq S^n(X) \supseteq \ldots .$$

Definizione 2.17. Se esiste $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tale che $S^k(X) = S^{k+1}(X)$, allora

$$d(S) := \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \mid \ S^k(X) = S^{k+1}(X)\}$$

si dice *indice di discesa* di S.

Osservazione 2.18. (1) Se $a(S) = k_0$, allora $N(S^k) = N(S^{k+1})$ per ogni $k \geq k_0$. Infatti, se $k \geq k_0$ e $x \in N(S^{k+1})$, allora $0 = S^{k+1}(x) = S^{k_0+1}(S^{k-k_0}(x))$ così che $S^{k-k_0}(x) \in N(S^{k_0+1}) = N(S^{k_0})$. Di conseguenza, $S^k(x) = S^{k_0}(S^{k-k_0}(x)) = 0$, cioè $x \in N(S^k)$.
(2) Se $d(S) = k_0$, allora $S^k(X) = S^{k+1}(X)$ per ogni $k \geq k_0$. Infatti, se $k \geq k_0$ e $y \in S^k(X)$, allora esiste $x \in X$ tale che $y = S^k(x) = S^{k-k_0}(S^{k_0}(x))$, dove $S^{k_0}(x) \in S^{k_0}(X) = S^{k_0+1}(X)$. Di conseguenza, per qualche $x' \in X$, risulta $S^{k_0}(x) = S^{k_0+1}(x')$, il che implica che $y = S^k(x) = S^{k-k_0}(S^{k_0+1}(x')) = S^{k+1}(x') \in S^{k+1}(X)$.

Proposizione 2.19. *Sia $S \in \mathcal{L}(X)$ con $S(X)$ sottospazio chiuso di X. Se $a := a(S) < \infty$ e $d := d(S) < \infty$, allora $a = d$.*

Dim. Sia $m := \max\{a, d\} \in \mathbb{N}$. Allora, per l'Osservazione 2.18 risulta

$$S^m(X) = S^d(X) \qquad \text{e} \qquad N(S^m) = N(S^a)\,,$$
$$S^k(X) = S^m(X) \qquad \text{e} \qquad N(S^k) = N(S^m)$$

per ogni $k \geq m$. Inoltre, $N(S^m) \cap S^m(X) = \{0\}$. Infatti, se $x \in N(S^m) \cap S^m(X)$, allora $S^m(x) = 0$ e $x = S^m(y)$ per qualche $y \in X$. Ne segue che $S^{2m}(y) = S^m(S^m(y)) = S^m(x) = 0$, cioè $y \in N(S^{2m})$. Poiché $m \geq d$, y è un elemento di $N(S^m)$, così che $x = S^m(y) = 0$.
Pertanto $S^m_{|S^m(X)}$ è una applicazione lineare, continua e iniettiva da $S^m(X)$ su $S^m(X)$. Inoltre, $S^m_{|S^m(X)}$ è una applicazione aperta dato che $S(X)$ è un sottospazio chiuso di X e quindi S è una applicazione aperta. Questo implica che $S^m(X)$ è un sottospazio chiuso di X.
Posto $R := \left(S^m_{|S^m(X)}\right)^{-1} \in \mathcal{L}(S^m(X))$, l'applicazione composta $RS^m \colon X \to S^m(X)$ soddisfa

$$(RS^m)^2 = RS^m RS^m = RS^m\,,$$

cioè RS^m è una proiezione continua su $S^m(X)$. Allora lo spazio di Banach X si rappresenta come segue

$$X = N(RS^m) \oplus (RS^m)(X) = N(S^m) \oplus S^m(X) = N(S^a) \oplus S^d(X)\,, \tag{2.20}$$

dove $N(RS^m) = N(S^m)$ per l'iniettività di R. Per (2.20) otteniamo che

$$S^a(X) = S^{a+d}(X) = S^d(X)\,,$$

il che implica che $a \geq d$ così che $N(S^d) \subseteq N(S^a)$.
Dimostriamo ora l'inclusione inversa. Sia $x \in N(S^a)$. Se $S^d(x) \neq 0$, allora $x = (x - S^d(x)) + S^d(x)$, dove $x - S^d(x) \in N(S^a)$ e $S^d(x) \in S^d(X)$ per (2.20). Pertanto, $0 = S^a(x - S^d(x)) = S^a(x) - S^a(S^d(x)) = -S^a(S^d(x))$, cioè $S^d(x) \in N(S^a)$. Poichè $S^d(x) \in N(S^a) \cap S^d(X)$, risulta $S^d(x) = 0$, e otteniamo così una contraddizione.
Questo significa che $a \leq d$. Quindi, $a = d$. □

Come conseguenza di (2.20), otteniamo che se $a(S) < \infty$ e $d(S) < \infty$, allora $a(S) = d(S)$ e lo spazio di Banach X si decompone come segue

$$X = N(S^m) \oplus S^m(X)\,, \tag{2.21}$$

dove $m = a(S) = d(S)$.

Proposizione 2.20. *Sia $T \in \mathcal{K}(X)$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a(T_\lambda) = d(T_\lambda) < \infty$.*

Dim. Fissato $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, per le Proposizioni 2.9 e 2.19 è sufficiente provare che $a(T_\lambda) < \infty$ e $d(T_\lambda) < \infty$.

Supponiamo che $N(T_\lambda^{n-1})$ sia un sottospazio proprio di $N(T_\lambda^n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ($N(T_\lambda^0) = N(I) = \{0\}$). Allora, applicando il Lemma di Riesz, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in N(T_\lambda^n)$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $d(x, N(T_\lambda^{n-1})) > \frac{1}{2}$.
Ora, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$, risulta

$$\begin{aligned} |\lambda|^{-1}\|T(x_n) - T(x_m)\| &= |\lambda|^{-1}\|\lambda x_n - T_\lambda(x_n) + T_\lambda(x_m) - \lambda x_m\| \\ &= \|x_n - (\lambda^{-1}T_\lambda(x_n) - \lambda^{-1}T_\lambda(x_m) + x_m)\| \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

poiché $\lambda^{-1}T_\lambda(x_n) - \lambda^{-1}T_\lambda(x_m) + x_m \in N(T_\lambda^{n-1})$. Questo implica che la successione $(T(x_n))_n$ non ammette alcuna successione estratta convergente, e otteneniamo così una contraddizione dato che $T \in \mathcal{K}(X)$ e $(x_n)_n$ è una successione limitata. Possiamo allora concludere che $a(T_\lambda) < \infty$.
In modo analogo, si prova che $d(T_\lambda) < \infty$. □

Proposizione 2.21. *Sia $T \in \mathcal{K}(X)$. Allora lo spettro $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$, è al più numerabile ed ha come punto limite al più lo zero.*

Dim. Sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Allora $N(T_\lambda) = \{0\}$ così che $N(T_\lambda^k) = \{0\}$ per ogni $k \geq 0$, cioè $a(T_\lambda) = 0$. D'altra parte, per la Proposizione 2.20 si ha $d(T_\lambda) < \infty$. Possiamo pertanto applicare la Proposizione 2.19 per concludere che $d(T_\lambda) = a(T_\lambda) = 0$. Da ciò segue che $T_\lambda(X) = X$. Di conseguenza, per il Teorema dell'applicazione aperta, T_λ è un isomorfismo topologico da X su X, cioè $\lambda \in \rho(T)$.
Adesso proveremo contemporaneamente che $\sigma_p(T)$ è al più numerabile e ha 0 come unico punto limite, dimostrando che per ogni $\delta > 0$ l'insieme $\{\lambda \in \sigma_p(T) \mid |\lambda| \geq \delta\}$ è di cardinalità finita.
Supponiamo per assurdo che l'insieme $\{\lambda \in \sigma_p(T) \mid |\lambda| \geq \delta\}$ sia di cardinalità infinita per qualche $\delta > 0$. Allora esiste $(\lambda_n)_n \subset \sigma_p(T)$ tale che $\lambda_n \neq \lambda_m$ e $|\lambda_n| \geq \delta$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $x_n \in N(T_{\lambda_n})$ con $\|x_n\| = 1$.
Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ gli elementi $x_1, \ldots, x_n$ sono linearmente indipendenti. Altrimenti, se $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ con $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, allora potremmo sempre supporre che $x_1 = \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$ (eventualmente riordinando gli elementi e supponendo $\alpha_1 \neq 0$) così che

$$\lambda_1 x_1 = T(x_1) = T(\beta_2 x_2 + \ldots \beta_n x_n) = \beta_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \beta_n \lambda_n x_n \,.$$

Ne seguirebbe che

$$\beta_2(\lambda_2 - 1)x_2 + \ldots + \beta_n(\lambda_n - 1)x_n = 0 \,.$$

Iterando questo procedimento ed eventualmente riordinando gli elementi, dedurremmo che $x_{n-1} = \gamma x_n$ con $\gamma \neq 0$ così che

$$\lambda_{n-1} x_{n-1} = T(x_{n-1}) = \gamma \lambda_n x_n = \lambda_n x_{n-1} \,,$$

da cui $\lambda_{n-1} = \lambda_n$ poiché $x_{n-1} \neq 0$, e otterremmo una contraddizione.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo $M_n = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Allora M_{n-1} è un

sottospazio chiuso proprio di M_n e quindi, per il Lemma di Riesz, esiste $y_n \in M_n$ tale che $\|y_n\| = 1$ e $d(y_n, M_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$; di conseguenza, $\|y_n - y_{n-1}\| \geq \frac{1}{2}$ per ogni n. Ora osserviamo che, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$, risulta

$$\begin{aligned} \|T(y_n) - T(y_m)\| &= \|T(y_n) + \lambda_n y_n - \lambda_n y_n + T(y_m)\| \\ &= \|\lambda_n y_n - (T_{\lambda_n}(y_n) + T(y_m))\| \,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Poiché $y_n \in M_n$, $y_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ così che $T(y_n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k T(x_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k x_k \in M_n$. Inoltre, $T_{\lambda_n}(y_n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k T_{\lambda_n}(x_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(\lambda_n - \lambda_k)x_k \in M_n$. Per l'uguaglianza (2.22) otteniamo che

$$\|T(y_n) - T(y_m)\| = |\lambda_n| \|y_n - \lambda_n^{-1}(T_{\lambda_n}(y_n) + T(y_m))\| \geq \frac{\delta}{2} \,.$$

Abbiamo così provato che $(T(y_n))_n$ non ammette alcuna sottosuccessione convergente. Questo è in contraddizione con $T \in \mathcal{K}(X)$. □

Osservazione 2.22. Siano X e Y due spazi di Banach di dimensione finita, rispettivamente m ed n. Supponiamo che $\{x_1, \ldots, x_m\}$ sia una base di X, con $\|x_k\|_X = 1$ per ogni $k = 1, \ldots, m$, $\{f_1, \ldots, f_m\}$ sia la base duale di $\{x_1, \ldots, x_m\}$, e che $\{y_1, \ldots, y_n\}$ sia una base di Y. Consideriamo l'operatore lineare $L \colon X \to Y$ così definito

$$L(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x) y_k, \quad x \in X,$$

dove se $m > n$ poniamo $y_j = 0$ per ogni $j = n+1, \ldots, m$. Allora, $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ dato che

$$\|L(x)\|_Y \leq \|x\|_X \cdot \sum_{k=1}^m \|f_k\|'_X \|y_k\|_Y$$

per ogni $x \in X$. Inoltre, se $m \leq n$ allora L è iniettivo, mentre se $m \geq n$ allora L è suriettivo.

Proposizione 2.23. *Sia $T \in \mathcal{K}(X)$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,*

$$\dim N(T_\lambda) = \operatorname{codim} T_\lambda(X) < \infty \,.$$

Dim. Per la Proposizione 2.8, $\dim N(T_\lambda) < \infty$. Questo assicura che esiste una proiezione lineare continua $P \colon X \to X$ tale che $P(X) = N(T_\lambda)$ così che possiamo rappresentare X come segue

$$X = N(T_\lambda) \oplus Y \,, \tag{2.23}$$

dove $Y = \ker P$. D'altra parte, per le Proposizioni 2.9 e 2.10, $T_\lambda(X)$ è un sottospazio chiuso di X di codimensione finita. Pertanto esiste una proiezione lineare continua $Q \colon X \to X$ tale che $Q(X) = T_\lambda(X)$ così che possiamo rappresentare X anche come

$$X = Z \oplus T_\lambda(X) \,, \tag{2.24}$$

dove $Z = \ker Q$ è un sottospazio chiuso di X con $\dim Z = \operatorname{codim} T_\lambda(X)$.
Consideriamo ora un operatore $L\colon N(T_\lambda) \to Z$ definito come nell'Osservazione 2.22. Poichè lo spazio Z è finito dimensionale, l'operatore L è compatto come pure $S = LP$.
Posto $A := T + S$, si ha $A \in \mathcal{K}(X)$ e $A_\lambda = \lambda - (T + S) = T_\lambda - S$. In particolare, per la decomposizione (2.23) $A_\lambda(y) = T_\lambda(y) - S(y) = T_\lambda(y) - L(P(y)) = T_\lambda(y) - L(0) = T_\lambda(y)$ per ogni $y \in Y$, il che implica che $(A_\lambda)_{|Y} = (T_\lambda)_{|Y}\colon Y \to T_\lambda(X)$ è un isomorfismo suriettivo. Inoltre, sempre per la decomposizione (2.23) $A_\lambda(x) = T_\lambda(x) - S(x) = -S(P(x)) = -L(x)$ per ogni $x \in N(T_\lambda)$ così che $(A_\lambda)_{|N(T_\lambda)} = -L\colon N(T_\lambda) \to Z$. Osserviamo anche che $N(A_\lambda) \subset N(L) \cap N(T_\lambda)$. Infatti, se $x \in N(A_\lambda)$ allora $T_\lambda(x) = S(x) = L(P(x)) \in Z \cap T_\lambda(X)$. Applicando la decomposizione (2.24) otteniamo che $T_\lambda(x) = 0 = S(x)$, cioè $x \in N(T_\lambda)$ e $P(x) \in N(L)$. Quindi, $x = P(x) \in N(L) \cap N(T_\lambda)$.
Per l'Osservazione 2.22 possiamo affermare che l'operatore L è iniettivo o suriettivo.
Supponiamo che L sia iniettivo. Allora, anche A_λ è iniettivo dato che $N(A_\lambda) \subset N(L) \cap N(T_\lambda)$. Poiché $A \in \mathcal{K}(X)$, ne segue che $d(A_\lambda) = a(A_\lambda) = 0$, pertanto A_λ è suriettivo. Questo implica che $(A_\lambda)_{|N(T_\lambda)} = -L$ è un isomorfismo da $N(T_\lambda)$ su Z. Quindi, gli spazi $N(T_\lambda)$ e Z hanno la stessa dimensione.
Supponiamo ora che L sia suriettivo. Allora, anche A_λ è suriettivo dato che $A_\lambda(X) = T_\lambda(X)$ e $A_\lambda(N(T_\lambda)) = L(N(T_\lambda)) = Z$. Poiché $A \in \mathcal{K}(X)$, ne segue che $a(A_\lambda) = N(A_\lambda) = \{0\}$, pertanto A_λ è iniettivo. Questo implica che $(A_\lambda)_{|N(T_\lambda)} = -L$ è iniettivo e dunque un isomorfismo da $N(T_\lambda)$ su Z. Quindi, gli spazi $N(T_\lambda)$ e Z hanno la stessa dimensione. □

Corollario 2.24. *Sia $T \in \mathcal{K}(X)$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$,*

$$\operatorname{codim} T^n_\lambda(X) = \dim N((T^n)'_\lambda) = \operatorname{codim} (T^n)'_\lambda(X) = \dim N(T^n_\lambda)\,.$$

Dim. Per $n = 1$, basta osservare che anche l'operatore duale T' è compatto per il Teorema di Schauder e che

$$\left(\frac{X}{T_\lambda(X)}\right)' = N(T'_\lambda)\,.$$

Poichè gli spazi coinvolti hanno dimensione finita, si deduce che:

$$\operatorname{codim} T_\lambda(X) = \dim \frac{X}{T_\lambda(X)} = \dim \left(\frac{X}{T_\lambda(X)}\right)' = \dim N(T'_\lambda)\,.$$

Le altre uguaglianze seguono dalla Proposizione 2.23. Se $n > 1$, osserviamo che $T^n_\lambda = \lambda^n - S$ con $S \in \mathcal{K}(X)$. □

Osservazione 2.25. La proposizione precedente dice che un operatore compatto verifica il principio dell'alternativa di Fredholm, cioè per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, l'equazione $\lambda u - Tu = 0$ ha solo la soluzione banale e, in tal caso, per ogni $f \in X$ l'equazione $\lambda u - Tu = f$ ha un'unica soluzione, oppure l'equazione $\lambda u - Tu = 0$ ha un numero finito di soluzioni linearmente indipendenti.

2.3. Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti

Studieremo ora il comportamento degli operatori compatti autoaggiunti in spazi di Hilbert. In questo paragrafo, sia $(H, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare di H. Iniziamo con un'osservazione importante.

Osservazione 2.26. Se $T \in \mathcal{L}(H)$ è un operatore autoaggiunto e compatto, allora $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ in virtù della Proposizione 2.21 e della Proposizione 1.26. Poichè $r(T) = \max\{\ |\lambda| \ \mid \ \lambda \in \sigma(T)\ \} = \|T\|$ e $\sigma(T) \cap \partial B_{r(T)} \neq \emptyset$, possiamo concludere che $\|T\| \in \sigma_p(T)$ o $-\|T\| \in \sigma_p(T)$.

Teorema 2.27 (Teorema di Rappresentazione Spettrale 1). *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto autoaggiunto. Allora esistono un sottospazio chiuso separabile H_0 di H, un sistema ortonormale completo $(x_n)_n$ in H_0 e una successione reale infinitesima $(\lambda_n)_n$ tali che*

$$Tx = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n\rangle x_n & \text{se } x \in H_0 \\ 0 & \text{se } x \in H_0^{\perp}\,. \end{cases} \tag{2.25}$$

Dim. Poiché $T \in \mathcal{K}(H)$ ed è autoaggiunto, possiamo applicare la Proposizione 2.21 e l'Osservazione 2.26 per concludere che $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ e $\sigma_p(T) = (\lambda_n)_n$ con $(\lambda_n)_n \in c_0$.
Posto $H_n = N(T_{\lambda_n})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, osserviamo che, per $x \in H_n$ e $y \in H_m$ con $n \neq m$, $\langle x, y\rangle = 0$ poiché

$$\lambda_n \langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \lambda_m \langle x, y\rangle\,,$$

e $\lambda_n \neq \lambda_m$. Inoltre, $H_n \neq \{0\}$ e quindi possiamo scegliere $x_n \in H_n$ con $\|x_n\| = 1$. Di conseguenza, la successione $(x_n)_n$ è un sistema ortonormale completo di $H_0 := \overline{\mathrm{span}(x_n)_n}$.
Ora, osserviamo che $T(H_0^{\perp}) \subset H_0^{\perp}$. Infatti, se $x \in H_0^{\perp}$, allora $\langle x_n, Tx\rangle = \langle Tx_n, x\rangle = \langle \lambda_n x_n, x\rangle = \lambda_n \langle x_n, x\rangle = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo implica che $Tx \in H_0^{\perp}$. Pertanto, $T_{|H_0^{\perp}}$ è un operatore compatto autoaggiunto da $H_0^{\perp}$ in $H_0^{\perp}$. Invero, $T_{|H_0^{\perp}} = 0$. Infatti, se $T_{|H_0^{\perp}} \neq 0$, per l'Osservazione 2.26 esiste $x_0 \in H_0^{\perp}$ tale che $Tx = \lambda x$ con $|\lambda| = \|T_{|H_0^{\perp}}\|$. Otteniamo così un assurdo perché tutti gli autovettori di T appartengono a H_0.
Infine, se $x \in H_0$, allora $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n$ così che

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle T(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n\rangle x_n\,.$$

$\square$

Se H è separabile, il Teorema di Rappresentazione Spettrale 2.27 può essere riformulato come segue.

TEOREMA 2.28. *Siano H uno spazio di Hilbert separabile su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto autoaggiunto. Allora esistono un sistema ortonormale completo $(x_n)_n$ in H e una successione reale infinitesima $(\lambda_n)_n$ tali che*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n \tag{2.26}$$

per ogni $x \in X$.

OSSERVAZIONE 2.29. (1) Dall'identità (2.25) segue subito che $\sigma_p(T) = (\lambda_n)_n$ e che $x_n \in N(T_{\lambda_n})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(2) Nel caso in cui H sia separabile, l'operatore T è equivalente ad un operatore diagonale sullo spazio ℓ^2. Infatti, se indichiamo con U la seguente applicazione

$$U \colon H \to \ell^2, \quad x \mapsto (\langle x, x_n \rangle)_n\,,$$

allora $T = U^{-1}MU$, dove M è l'operatore diagonale su ℓ^2 così definito $M(\xi) = (\lambda_n \xi_n)_n$ per ogni $\xi = (\xi_n)_n \in \ell^2$.

TEOREMA 2.30 (TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE SPETTRALE 2). *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto. Allora esistono un sottospazio chiuso separabile H_0 di H, un sistema ortonormale completo $(x_n)_n$ in H_0, un sistema ortonormale $(y_n)_n$ in H e una successione reale infinitesima $(\lambda_n)_n$ tali che*

$$Tx = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n & \textit{se } x \in H_0 \\ 0 & \textit{se } x \in H_0^{\perp}\,. \end{cases} \tag{2.27}$$

DIM. Osserviamo che l'operatore T^*T è compatto e autoaggiunto. Pertanto, per il Teorema di Rappresentazione Spettrale 2.27 esistono un sottospazio chiuso separabile H_0 di H, un sistema ortonormale completo $(x_n)_n$ in H_0 e una successione infinitesima $(\mu_n)_n \in c_0$ tali che

$$T^*Tx = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, x_n \rangle x_n & \text{se } x \in H_0 \\ 0 & \text{se } x \in H_0^{\perp}\,, \end{cases} \tag{2.28}$$

dove $\sigma_p(T^*T) = (\mu_n)_n$ e $x_n \in N((T^*T)_{\mu_n})$.
Ne segue che $T_{|H_0^{\perp}} = 0$. Infatti, applicando l'identità (2.28), otteniamo che, per ogni $x \in H_0^{\perp}$, $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$, cioè $Tx = 0$.
Osserviamo ora che, se $x \in N((T^*T)_{\mu_n})$, allora

$$\mu_n \|x\|^2 = \langle \mu_n x, x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = \|Tx\|^2\,,$$

da cui $\mu_n \geq 0$. Possiamo così definire $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}$. Ovviamente, $(\lambda_n)_n \in c_0$.
Se $x \in H_0$, allora $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$ e quindi

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle Tx_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n$$

avendo posto $y_n = \lambda_n^{-1} T x_n$ se $\lambda_n \neq 0$ e $y_n = 0$ se $\lambda_n = 0$. Per concludere, rimane da provare che $(y_n)_n$ è un sistema ortonormale. Per questo basta osservare che, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\langle y_n, y_m \rangle &= \lambda_n^{-1}\lambda_m^{-1}\langle Tx_n, Tx_m\rangle = \lambda_n^{-1}\lambda_m^{-1}\langle T^*Tx_n, x_m\rangle \\ &= \mu_n\lambda_n^{-1}\lambda_m^{-1}\langle x_n, x_m\rangle = \lambda_n\lambda_m^{-1}\langle x_n, x_m\rangle = \delta_{nm}\,.\end{aligned}$$

□