CAPITOLO 1

Alcuni richiami di teoria degli operatori

1.1. Richiami sulla dualità

Dato uno spazio di Banach $(X, ||\cdot||)$ su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, indicheremo con $B_X := \{ x \in X \mid ||x|| \leq 1\}$ la palla unitaria chiusa di X.
Se X e Y sono due spazi di Banach, indicheremo con $\mathcal{L}(X, Y)$ lo spazio degli operatori $T : X \to Y$ lineari e continui. Ricordiamo che vale il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1.1. *Siano X ed Y due spazi di Banach su $\mathbb{K}$. Sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Allora sono equivalenti le seguenti proprietà:*

(i) *T è continuo in X.*
(ii) *T è continuo in 0.*
(iii) *T è un operatore limitato (i.e., $T(B_X)$ è limitato in Y).*

Per ogni $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, si può pertanto definire la *norma operatoriale* di T ponendo

$$\|T\| := \sup_{x \in B_X} \|Tx\|_Y .$$

Chiaramente, $\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$ per ogni $x \in X$. Inoltre, lo spazio $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|)$ è ancora uno spazio di Banach.
Nel caso in cui $X = Y$, si pone $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, Y)$ e si indica con $I : X \to X$ l'operatore identità. Infine, se $Y = \mathbb{K}$, lo spazio di Banach $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ è detto *duale topologico* di X e si indica con X'. In tal caso, si preferisce denotare la norma operatoriale semplicemente con $\|\cdot\|'$.
Se Z è un altro spazio di Banach, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, è facile dimostrare che l'operatore composto $ST := S \circ T \in \mathcal{L}(X, Z)$ e che

$$\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\| . \tag{1.1}$$

Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, si può definire l'operatore $T' : Y' \to X'$ ponendo

$$\forall y' \in Y' \ \forall x \in X \quad (T'y')(x) := y'(Tx).$$

L'operatore T' così definito è detto *operatore duale di* T e $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$. Infatti, è immediato provare che T' è lineare. Inoltre, fissato $y' \in Y'$, vale la diseguaglianza

$$|(T'y')(x)| = |y'(Tx)| \le \|y'\|'_{Y'} \cdot \|Tx\|_Y \le \|y'\|'_{Y'} \cdot \|T\| \cdot \|x\|_X, \quad x \in X.$$

Questo assicura che $T'y' \in X'$ con

$$\|T'y'\|'_{X'} = \sup_{x \in B_X} |T'y'(x)| \le \|T\|\|y'\|'_{Y'}.$$

Per l'arbitrarietà di y', possiamo concludere che $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ e che vale la diseguaglianza

$$\|T'\| = \sup_{y' \in B_{Y'}} \|T'y'\|'_{X'} \le \|T\|. \tag{1.2}$$

In verità vale l'uguaglianza

$$\|T\| = \|T'\|. \tag{1.3}$$

Per dimostrare la diseguaglianza inversa procediamo come segue. Fissato $x_0 \in X$, per il Teorema di Hahn–Banach esiste $y'_0 \in Y'$ tale che $\|y'_0\|'_{Y'} = 1$ e $y'_0(Tx_0) = \|Tx_0\|_Y$. Quindi $x'_0 := T'y'_0$ soddisfa $x'_0(x_0) = \|Tx_0\|_Y$ così che

$$\|Tx_0\|_Y = (T'y'_0)(x_0) \le \|T'\| \cdot \|y'_0\|'_{Y'} \cdot \|x_0\|_X = \|T'\| \cdot \|x_0\|_X,$$

cioé $\|T\| \le \|T'\|$.

Se M è un sottospazio di X e N è un sottospazio di X', si definiscono

$$M^{\perp} := \{ y \in X' \mid y'(x) = 0 \text{ per ogni } x \in M \},$$

$$^{\perp}N := \{ x \in X \mid y'(x) = 0 \text{ per ogni } y' \in N \}.$$

Si verifica immediatamente che per ogni $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ valgono:

$$\ker(T') = T(X)^{\perp}, \qquad \ker(T) =^{\perp} T'(X'). \tag{1.4}$$

Ricordiamo la definizione di spazio quoziente. Per le dimostrazioni rinviamo a [**13**], 1.40-42 e 4.8-9. Sia M un sottospazio chiuso di X e sia $\phi : X \to X/M$ l'applicazione canonica, definita da

$$\phi(x) = x + M.$$

Lo spazio X induce su X/M la norma

$$||\phi(x)||_{X/M} = \inf\{ ||x + y|| \mid y \in M \}.$$

Rispetto a tale norma, X/M è uno spazio di Banach e l'applicazione ϕ è continua ed aperta. Ricordiamo che $\dim(X/M)$ è detta codimensione di M. Se codim$M$ è finita, allora M è un sottospazio complementato in X, cioè esiste un sottospazio chiuso in X tale che

$$X = M + N, \qquad M \cap N = \{ 0 \}.$$

Si prova che $(X/M, || \cdot ||_{X/M})'$ è isometrico a $(M^{\perp}, || \cdot ||')$, e dunque, grazie alla prima uguaglianza in (1.4), si ottiene il seguente risultato.

Proposizione 1.2. *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ tale che $T(X)$ è chiuso. Allora $(X/T(X))'$ è isometrico a $\ker(T')$.*

1.2. Operatori chiusi

Dato un operatore lineare $T : D(T) \to X$, con dominio un sottospazio vettoriale $D(T)$ di X e con rango $\mathrm{Rg}(T)$, si dice che T è *densamente definito* se $D(T)$ è denso in X e che T è *chiuso* se il suo grafico $\mathcal{G}(T) := \{ (x, Tx) \mid x \in D(T) \}$ è un sottospazio chiuso dello spazio di Banach prodotto $X \times X$.

Proposizione 1.3. *Sia $T : D(T) \subseteq X \to X$ un operatore lineare su X. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti.*

(i) *T è un operatore chiuso.*
(ii) *Per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ tale che esistono $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to+\infty} Tx_n = y$, si ha $x \in D(T)$ e $y = Tx$.*
(iii) *Lo spazio $D(T)$ dotato della norma del grafico*
$$\|x\|_T = \|x\| + \|Tx\|\,, \qquad x \in D(T),$$
è uno spazio di Banach.

Chiaramente ogni operatore $T \in \mathcal{L}(X)$ è chiuso. Se il dominio di T è l'intero spazio X, vale anche il viceversa per il teorema del grafico chiuso, per la cui dimostrazione rimandiamo a [**13**], sezione 2.13.

Teorema 1.4 (Teorema del grafico chiuso). *Sia $T : X \to X$ un operatore chiuso. Allora T è continuo.*

Dati due operatori lineari $S : D(S) \subseteq X \to X$ e $T : D(T) \subseteq X \to X$, si dice che T un'estensione di S, e si scrive $S \subset T$, se $D(S) \subseteq D(T)$ e $Sx = Tx$ per ogni $x \in D(S)$.

Definizione 1.5. *Un operatore $T : D(T) \subset X \to X$ si dice chiudibile se ammette un'estensione chiusa.*

Il prossimo risultato è di facile verifica.

Proposizione 1.6. *Un operatore $T : D(T) \subset X \to X$ è chiudibile se e solo se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} Tx_n = y$ si ha $y = 0$.*

Esempio 1.7. Sia $T : C^1[0,1] \subset L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ l'operatore così definito $Tf := f'(0)\mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ indica la funzione costante 1. Allora T non è chiudibile. Infatti, se si considera la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1[0,1]$ con

$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$, allora $\lim_{n\to+\infty} f_n = 0$ in $L^2([0,1])$, ma $Tf_n = \mathbf{1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ così che $\lim_{n\to+\infty} Tf_n \neq 0$.

Proposizione 1.8. *Se $T : D(T) \subset X \to X$ è un operatore chiudibile, allora esiste la più piccola estensione chiusa di T che è indicata con $\overline{T}$ ed è detta chiusura di T. Inoltre la seguente identità è soddisfatta*

$$\overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(\overline{T}).$$

Dim. Sia $G = \overline{\mathcal{G}(T)}$. Poiché T è chiudibile, $G \subseteq \mathcal{G}(S)$ per ogni estensione chiusa S di T. Posto

$$D := \{\, x \in X \mid \exists y \in X \ \text{ tale che } (x,y) \in G \,\},$$

se $x \in D$, esiste un unico $y \in X$ tale che $(x,y) \in G$. Infatti, se $(x,y_1) \in G$ e $(x,y_2) \in G$, allora $(0, y_1 - y_2) \in G \subseteq \mathcal{G}(S)$, dove S è un'estensione chiusa di T. Ne segue che $y_1 - y_2 = S(0) = 0$. Allora l'applicazione $\overline{T}\colon D \to X$ che associa ad ogni elemento $x \in D$ l'unico elemento $y \in X$ tale che $(x,y) \in G$ è ben definita e chiaramente è lineare. Inoltre $\mathcal{G}(\overline{T}) = G$ e questo implica che $\overline{T}$ è un operatore chuso. Infine, se S è una qualsiasi estensione chiusa di T, per quanto già osservato $\mathcal{G}(\overline{T}) \subseteq \mathcal{G}(S)$ così che S è anche un'estensione di $\overline{T}$. □

1.3. Risolvente e spettro

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$. Nel seguito, se T è un operatore lineare su X con dominio $D(T)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, indicheremo con $\lambda \pm T$ l'operatore $\lambda I \pm T$ con dominio $D(T)$.

Definizione 1.9. *Sia $T : D(T) \subseteq X \to X$ un operatore lineare. L'insieme*

$$\rho(T) := \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T : D(T) \to X \ \textit{è biiettivo e}\ (\lambda - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \,\}$$

è detto insieme risolvente di T. Se $\rho(T) \neq \emptyset$ e $\lambda \in \rho(T)$, si dice risolvente di T in λ l'operatore

$$R(\lambda, T) := (\lambda - T)^{-1}.$$

L'insieme $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ è detto spettro di T. In particolare, l'insieme $\sigma_p(T) := \{\, \lambda \in \sigma(T) \mid \ker(\lambda - T) \neq \{0\}\}$ è detto spettro puntuale di T. Inoltre, ogni elemento $\lambda \in \sigma_p(T)$ è detto autovalore di T, e ogni $0 \neq x \in X$ tale che $(\lambda - T)x = 0$ è detto autovettore di T, corrispondente all'autovalore λ.

Proposizione 1.10. *Se $T : D(T) \subset X \to X$ è un operatore chiuso e $\lambda - T$ è biiettivo, allora $(\lambda - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.*

Dim. Per ipotesi $\mathcal{G}(\lambda - T)$ è chiuso. Pertanto anche

$$\mathcal{G}((\lambda - T)^{-1}) = \{ (\lambda x - Tx, x) \mid x \in D(T) \}$$

è chiuso. La tesi segue dal teorema del grafico chiuso. □

Lemma 1.11. *Sia*

$$\mathcal{I}(X) := \{ S \in \mathcal{L}(X) \mid S \text{ biiettivo e } S^{-1} \in \mathcal{L}(X) \}.$$

Allora valgono le seguenti proprietà.

(1) *Se $S \in \mathcal{L}(X)$, $||S|| < 1$, allora $I - S \in \mathcal{I}(X)$ e*

$$(I - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n.$$

(2) *Se $\rho \in \mathbb{C}$, $S \in \mathcal{L}(X)$, $||S|| < |\rho|$, allora $\rho \pm S \in \mathcal{I}(X)$.*

(3) *Se $T \in \mathcal{I}(X)$ e $S \in \mathcal{L}(X)$, allora $T + S \in \mathcal{I}(X)$ se e solo se $I + T^{-1}S \in \mathcal{I}(X)$.*

(4) *$\mathcal{I}(X)$ è aperto in $\mathcal{L}(X)$.*

Dim. (1) Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} S^n \tag{1.5}$$

nello spazio di Banach $\mathcal{L}(X)$.

Poiché $||S^n|| \leq ||S||^n$ e $||S|| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} ||S^n||$ converge. Questo implica che la serie (1.5) converge (totalmente) in $\mathcal{L}(X)$. Ora, osserviamo che

$$(I - S) \sum_{n=0}^{\infty} S^n = \sum_{n=0}^{\infty} S^n - \sum_{n=0}^{\infty} S^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n - \sum_{n=1}^{\infty} S^n = I.$$

In modo analogo, possiamo dimostrare che

$$(\sum_{n=0}^{\infty} S^n)(I - S) = I.$$

Tali identità assicurano che l'operatore $I - S$ è invertibile con operatore inverso dato da

$$(I - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n.$$

(2) Dato che $||\rho^{-1}S|| < 1$, per la proprietà (1) possiamo concludere che $I \pm \rho^{-1}S \in \mathcal{I}(X)$. Pertanto, anche $\rho \pm S = \rho(I \pm \rho^{-1}S) \in \mathcal{I}(X)$.

(3) Poiché T è invertibile, possiamo scrivere $T + S = T(I + T^{-1}S)$. Da questa identità segue banalmente la tesi.

(4) Siano $T \in \mathcal{I}(X)$ e $S \in \mathcal{L}(X)$ con $||S|| < ||T^{-1}||^{-1}$. Allora

$$||T^{-1}S|| \leq ||T^{-1}|| \cdot ||S|| < 1.$$

Combinando la proprietà (1) con la proprietà (3) possiamo così concludere che $I + T^{-1}S \in \mathcal{I}(X)$ e quindi $T + S \in \mathcal{I}(X)$. Questo significa che la palla aperta di centro T e raggio $||T^{-1}||^{-1}$ è contenuta in $\mathcal{I}(X)$. Per l'arbitrarietà di $T \in \mathcal{I}(X)$, ne segue che $\mathcal{I}(X)$ è un sottoinsieme aperto di $\mathcal{L}(X)$. $\square$

Proposizione 1.12. *Sia $T : D(T) \subseteq X \to X$ un operatore lineare. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) *Sia $\lambda_0 \in \rho(T)$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda - \lambda_0| < ||R(\lambda_0, T)||^{-1}$, allora $\lambda \in \rho(T)$ e*
$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, T)^{n+1}; \tag{1.6}$$
la serie in (1.6) converge in norma operatoriale.
(2) *$\rho(T)$ è aperto.*
(3) *Se $\rho(T) \neq \emptyset$, la funzione $R(\cdot, T) : \rho(T) \to \mathcal{L}(X)$ è analitica.*
(4) (Equazione del risolvente) *Per ogni $\lambda, \mu \in \rho(T)$*
$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T).$$
In particolare, $R(\lambda, T)$ e $R(\mu, T)$ commutano.
(5) *Sia $(\lambda_n)_n \subseteq \rho(T)$ tale che $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$. Allora $\lambda_0 \in \sigma(T)$ se e solo se $\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, T)\| = \infty$.*

Dim. (1) Osserviamo che
$$\lambda - T = (\lambda - \lambda_0 + \lambda_0 - T) = [I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, T)](\lambda_0 - T), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.7}$$
Se $|\lambda - \lambda_0| < ||R(\lambda_0, T)||^{-1}$, ovvero se $||(\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, T)|| < 1$, possiamo applicare il Lemma 1.11(1) per concludere che $I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, T) \in \mathcal{I}(X)$. Questo fatto insieme con l'identità (1.7) assicura che l'operatore $\lambda - T$ è biiettivo con operatore inverso limitato dato da
$$\begin{aligned} R(\lambda, T) &= R(\lambda_0, T)[I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, T)]^{-1} \\ &= R(\lambda_0, T) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, T)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, T)^{n+1}. \end{aligned}$$
Le proprietà (2) e (3) seguono applicando la proprietà (1). In particolare, dalla rappresentazione in serie del risolvente data in (1.6) segue che la funzione $R(\cdot, T)$ è analitica sull'insieme aperto $\rho(T)$ nel caso in cui $\rho(T) \neq \emptyset$.
(4) Siano $\lambda, \mu \in \rho(T)$. Allora possiamo scrivere
$$\begin{aligned} R(\lambda, T) &= R(\lambda, T)(\mu - T)R(\mu, T) = R(\lambda, T)[(\mu - \lambda) + (\lambda - T)]R(\mu, T) \\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T) + R(\mu, T), \end{aligned}$$
da cui
$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T).$$

(5) Supponiamo che $\lambda_0 \in \sigma(T)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che se $n > \nu$, allora $|\lambda_n - \lambda_0| < \varepsilon$. Per la (1) avremo

$$\varepsilon > |\lambda_n - \lambda_0| > \frac{1}{||R(\lambda_n, T)||}$$

per ogni $n > \nu$. Dunque $\lim_{n\to\infty} ||R(\lambda_n, T)|| = +\infty$.
Viceversa, assumiamo che $\lambda_0 \in \rho(T)$. Allora la funzione $R(\cdot, T)$ è chiaramente limitata sull'insieme compatto $\{ \lambda_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \rho(T)$. Questo contraddice l'ipotesi che $\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, T)\| = \infty$. $\square$

Dalla Proposizione 1.12(2) segue che $\sigma(T)$ è chiuso. In generale, non si può dire di più sullo spettro e sul risolvente come dimostrano i seguenti esempi.

Esempio 1.13. Sia $X = C([0, 1], \mathbb{C})$ lo spazio delle funzioni continue su $[0, 1]$ e a valori complessi dotato della norma del sup. Allora gli operatori $T_i f = f'$, $i = 1, 2$, con domini $D(T_1) = C^1([0, 1], \mathbb{C})$ e $D(T_2) = \{ f \in C^1([0, 1], \mathbb{C}) \mid f(0) = 0\}$, sono chiusi in $C([0, 1], \mathbb{C})$ come si verifica facilmente applicando i classici risultati di passaggio al limite per le derivate.
Fissato $\lambda \in \mathbb{C}$, consideriamo la funzione f_λ definita da $f_\lambda(x) := e^{\lambda x}$, $x \in [0, 1]$. Allora $f_\lambda \in D(T_1)$ e

$$(\lambda - T_1)(f_\lambda) = \lambda f_\lambda - \lambda f_\lambda = 0;$$

questo significa che $\lambda - T_1$ non è iniettivo. Per l'arbitrarietà di λ possiamo così concludere che $\sigma(T_1) = \mathbb{C}$ e $\rho(T_1) = \emptyset$.
Fissato $\lambda \in \mathbb{C}$, consideriamo ora l'operatore S_λ definito da

$$S_\lambda g(x) = \int_0^x e^{\lambda(x-s)} g(s) ds, \qquad 0 \le x \le 1,\ g \in C([0, 1], \mathbb{C}).$$

Chiaramente, $S_\lambda \in \mathcal{L}(X)$. Inoltre, per ogni $g \in C([0, 1], \mathbb{C})$ l'elemento $S_\lambda g$ è la soluzione del problema di Cauchy $\lambda f - f' = g$, $f(0) = 0$. Ne segue che $(\lambda - T_2)S_\lambda = S_\lambda(\lambda - T_2) = I$, cioè $\lambda \in \rho(T_2)$. Per l'arbitrarietà di λ possiamo così concludere che $\rho(T_2) = \mathbb{C}$ e $\sigma(T_2) = \emptyset$.
Questo esempio dimostra quanto spettro e risolvente siano sensibili al dominio dell'operatore.

Se l'operatore T è limitato, lo spettro e la funzione risolvente soddisfano ulteriori interessanti proprietà.

Proposizione 1.14. *Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora valgono le sequenti proprietà.*

(1) *Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è tale che $|\lambda| > ||T||$, allora $\lambda \in \rho(T)$ e*

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}; \tag{1.8}$$

in particolare, $\rho(T) \neq \emptyset$.

(2) $\sigma(T) \neq \emptyset$.
(3) $\sigma(T) \subseteq \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq ||T|| \}$.
(4) *$\sigma(T)$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{C}$.*

Dim. (1) Fissiamo $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda| > ||T||$. Per il Lemma 1.11(2) possiamo allora concludere che $\lambda - T \in \mathcal{I}(X)$, cioè $\lambda \in \rho(T)$, e

$$R(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda}(I - \lambda^{-1}T) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.$$

(2) Supponiamo che $\sigma(T) = \emptyset$, ovvero che $\rho(T) = \mathbb{C}$. Allora la funzione risolvente di T è definita e analitica su tutto $\mathbb{C}$ e soddisfa la seguente diseguaglianza

$$||R(\lambda, T)|| \leq \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1 - \frac{||T||}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - ||T||}, \quad \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > \|T\|, \tag{1.9}$$

in virtù della rappresentazione in serie del risolvente data in (1.8). Da ciò segue che $||R(\lambda, T)|| \to 0$ per $|\lambda| \to +\infty$.
Fissati $x \in X$ e $f \in X'$, possiamo così definire su $\mathbb{C}$ una funzione intera ϕ come segue

$$\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \phi(\lambda) = (f \circ R(\lambda, T))x.$$

Per (1.9) la funzione ϕ soddisfa anche la seguente diseguaglianza

$$|\phi(\lambda)| \leq ||f||'||x||\frac{1}{|\lambda| - ||T||}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > ||T||.$$

Da questo segue che ϕ è anche funzione limitata in $\mathbb{C}$ e $\lim_{|\lambda|\to+\infty} \phi(\lambda) = 0$.
Applicando il teorema di Liouville a ϕ, otteniamo che $\phi = 0$ in $\mathbb{C}$.
Per l'arbitrarietà di f e x, possiamo così affermare che $R(\lambda, T) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, ottenendo un assurdo poichè $R(\lambda, T)$ è un operatore invertibile.
(3) Per la proprietà (1) possiamo affermare che $\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > ||T|| \} \subseteq \rho(T)$. Passando ai complementari, segue la tesi.
(4) Combinando la Proposizione 1.12(2) e la proprietà (3) otteniamo che $\sigma(T)$ è un insieme chiuso e limitato, cioè compatto. □

Definizione 1.15. *Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(X)$. Si definisce raggio spettrale di T il numero*

$$r(T) = \sup\{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T) \}.$$

Dato che $\sigma(T)$ è un insieme compatto per ogni $T \in \mathcal{L}(X)$, risulta

$$r(T) = \max\{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T) \}.$$

Questo significa che lo spettro di un operatore limitato T ha almeno un punto in comune con la frontiera del più piccolo disco chiuso centrato nell'origine che lo contiene. Inoltre, vale il seguente risultato.

TEOREMA 1.16. *Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora $r(T)$ è dato dalla seguente formula*

$$r(T) = \lim_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}.$$

e soddisfa $r(T) \leq ||T||$.

DIM. Posto $r := \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, osserviamo che la seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n T^n \qquad (\mu \in \mathbb{C})$$

converge in norma operatoriale se $|\mu| < r^{-1}$ e non converge in norma operatoriale se $|\mu| > r$. Ne segue che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} \qquad (0 \neq \lambda \in \mathbb{C})$$

converge in norma operatoriale se $|\lambda| > r$. Inoltre, la seguente identità è soddisfatta se $|\lambda| > r$

$$\frac{\lambda - T}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} \frac{\lambda - T}{\lambda} = I.$$

Questo implica che $\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > r \} \subseteq \rho(T)$ e

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}, \qquad (\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > r). \tag{1.10}$$

Ne segue che $\sigma(T) \subseteq \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq r \}$. Per definizione di raggio spettrale, otteniamo così che $r(T) \leq r$.
La serie in (1.10) converge uniformemente in norma operatoriale sulle circonferenze di centro l'origine e raggio $\rho > r$. Possiamo pertanto integrare per serie (cf. APPENDICE A), ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \lambda^n R(\lambda, T) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{|\lambda|=\rho} \lambda^{n-k-1} d\lambda \right) T^k \qquad (1.11) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} \rho^{n-k} e^{i(n-k)t} dt \right) T^k = T^n. \end{aligned}$$

Dato che la funzione $\lambda \mapsto \lambda^n R(\lambda, T)$ è analitica in $\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\ |\lambda| > r(T) \}$, l'integrale in (1.11) non cambia se si considera una circonferenza con raggio $\rho > r(T)$. Applicando pertanto (1.11), otteniamo che, per ogni $\rho > r(T)$,

$$\|T^n\| \leq \rho^{n+1} \max_{|\lambda|=\rho} ||R(\lambda, T)||,$$

dove il massimo esiste poiché la funzione $R(\cdot, T)$ è continua in $\rho(T)$. Da questo segue che

$$r = \limsup_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \le \rho \qquad (\rho > r(T))$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ρ, che

$$r = \limsup_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \le r(T).$$

Proviamo ora che

$$\limsup_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}.$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$, sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $m > n$. Allora esistono e sono unici $k, h \in \mathbb{N}$ tali che $m = kn + h$ con $0 \le h < n$. Di conseguenza possiamo scrivere

$$||T^m||^{\frac{1}{m}} = ||T^{h+kn}||^{\frac{1}{m}} \le ||T||^{\frac{h}{m}} \cdot ||T^n||^{\frac{k}{m}} = ||T||^{\frac{h}{m}} \left(||T^n||^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{kn}{m}}.$$

Poiché

$$0 \le \frac{h}{m} < \frac{n}{m}, \qquad \frac{m-n}{m} < \frac{kn}{m} \le 1,$$

risulta che $h/m \to 0$ e $kn/m \to 1$ per $m \to +\infty$. Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{m\to+\infty} ||T^m||^{\frac{1}{m}} \le ||T^n||^{\frac{1}{n}} \le ||T||.$$

Per l'arbitrarietà di n ne segue

$$\limsup_{m\to+\infty} ||T^m||^{\frac{1}{m}} \le \liminf_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \le ||T||,$$

ovvero esiste $\lim_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \le ||T||$. □

Ricordiamo anche quanto segue.

Proposizione 1.17. *Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se $\lambda \in \sigma(T)$ e $\mathrm{Rg}(\lambda - T)$ non è chiuso, allora esiste una successione $(x_n)_n \subset X$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - \lambda x_n\| = 0$.*

Dim. Se $\lambda \in \sigma_p(T)$, non si ha nulla da dimostrare. Supponiamo pertanto che $\ker(\lambda - T) = \{0\}$. Allora l'operatore $(\lambda - T)^{-1} \colon \mathrm{Rg}(\lambda - T) \to X$ esiste e, per il Teorema del grafico chiuso, non è limitato dato che $\mathrm{Rg}(\lambda - T)$ non è chiuso. Ne segue che esiste una successione $(y_n)_n \subset \mathrm{Rg}(\lambda - T)$ tale che

$$\|(\lambda - T)^{-1} y_n\| \ge n\|y_n\| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Per linearità possiamo supporre che $y_n = (\lambda - T)x_n$ con $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ottenendo

$$\|x_n\| = \|(\lambda - T)^{-1} y_n\| \ge n\|(\lambda - T)x_n\| \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ovvero la tesi. □

Osservazione 1.18. Il risultato precedente continua a essere vero nel caso in cui $T\colon D(T) \to X$ è un operatore chiuso.

Motivata dalla precedente proposizione si dà la seguente definizione.

Definizione 1.19. *Siano* $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio di Banach su* $\mathbb{C}$*,* $T \in \mathcal{L}(X)$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Se* $\lambda \in \sigma(T)$*,* $\lambda - T$ *non è iniettivo o* $\mathrm{Rg}(\lambda - T)$ *non è chiuso, allora* λ *è detto autovalore approssimato.*

1.4. Un esempio fondamentale: gli operatori di moltiplicazione

Siano (Ω, μ) uno spazio di misura, μ σ-finita e $m : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione μ-misurabile. Il rango essenziale di m è così definito:

$$m_{\mathrm{ess}}(\Omega) = \{\, \omega \in \mathbb{C} \mid \forall\, \varepsilon > 0\ \mu(\{x \in \Omega \mid |m(x) - \omega| < \varepsilon\}) > 0 \,\}.$$

Sia $1 \leq p < \infty$. L'operatore di moltiplicazione associato a m su $L^p(\Omega, \mu)$ è così definito:

$$\begin{aligned} &D(M_m) = \{\, f \in L^p(\Omega, \mu) \mid mf \in L^p(\Omega, \mu) \,\} \\ &M_m(f) = mf. \end{aligned}$$

Proposizione 1.20. *Sotto le ipotesi precedenti si ha:*

(1) $(M_m, D(M_m))$ *è densamente definito e chiuso.*
(2) $D(M_m) = L^p(\Omega, \mu)$ *e* M_m *è limitato se e solo se* $m \in L^\infty(\Omega, \mu)$*. In tal caso,*
$$||M_m|| = ||m||_\infty.$$
(3) M_m *ha inversa limitata se e solo se* $0 \notin m_{\mathrm{ess}}(\Omega)$*.*
(4) $\sigma(M_m) = m_{\mathrm{ess}}(\Omega)$*.*

Dim. (1) Sia $(f_n)_n \subseteq D(M_m)$ tale che esistono $f_n \to f$ e $mf_n \to g$ in $L^p(\Omega, \mu)$. Allora esiste una sottosuccessione $(f_{k_n})_n$ tale che $\lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x) = f(x)$ q.o. in Ω. Quindi $\lim_{n\to\infty} m(x) f_{k_n}(x) = m(x) f(x)$ q.o. in Ω e pertanto $g = mf$. Abbiamo così dimostrato che $(M_m, D(M_m))$ è chiuso.
Per dimostrare che $D(M_m)$ è denso in $L^p(\Omega, \mu)$, supponiamo dapprima che μ sia finita e consideriamo la successione di insiemi $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$E_n := \{\, x \in \Omega \mid |m(x)| < n \,\}.$$

Chiaramente $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega$ e $\lim_{n\to\infty} \mu(\Omega \setminus E_n) = 0$. Sia $u_n = u\chi_{E_n}$, dove χ_{E_n} è la funzione caratteristica di E_n. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D(M_m)$. Per l'assoluta continuità dell'integrale, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se

$\mu(E) < \delta$, allora $\int_E |u|^p d\mu < \varepsilon$. Sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(\Omega \setminus E_n) < \delta$ per ogni $n > \nu$. Allora, se $n > \nu$:

$$\int_\Omega |u - u_n|^p d\mu = \int_{\Omega \setminus E_n} |u|^p d\mu < \varepsilon.$$

Se $\mu(\Omega) = \infty$, esistono $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di misura finita tali che $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i = \Omega$. Ripetendo il ragionamento precedente per ogni i e passando al limite si ottiene la tesi.
(2) È immediato verificare che se $m \in L^\infty(\Omega,\mu)$, allora M_m è limitato con $D(M_m) = L^p(\Omega,\mu)$. Viceversa, supponiamo che $m \notin L^\infty(\Omega,\mu)$. Allora, posto $Q_n = \{\, x \in \Omega \mid |m(x)| > n \,\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $\mu(Q_n) > 0$. Sia $u_n \in L^p(\Omega,\mu)$ tale che $||u_n||_p = 1$ e $u_n = 0$ in $\Omega \backslash Q_n$. Si ha che $u_n \in D(M_m)$ e

$$||M_m u_n||_p > n||u_n||_p = n,$$

pertanto M_m non è limitato.
Se $m \in L^\infty(\Omega,\mu)$, è immediato verificare che $||M_m|| \le ||m||_\infty$. Per provare la disuguaglianza inversa poniamo, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$Q_\varepsilon = \{\, x \in \Omega \mid |m(x)| > ||m||_\infty - \varepsilon \,\}.$$

Si ha che $\mu(Q_\varepsilon) > 0$. Scegliamo $u_\varepsilon \in L^p(\Omega,\mu)$ tale che $||u||_p = 1$ e $u = 0$ su $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Allora

$$||M_m u_\varepsilon||_p^p = \int_{\Omega_\varepsilon} |m u_\varepsilon|^p d\mu \ge (||m||_\infty - \varepsilon) \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon|^p d\mu = (||m||_\infty - \varepsilon).$$

Pertanto $||M_m|| \ge ||m||_\infty - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ e dunque $||M_m|| \ge ||m||_\infty$.
(3) Se $0 \notin m_{\text{ess}}(\Omega)$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|m(x)| > \varepsilon$ q.o.. Allora $\frac{1}{m} \in L^\infty(\Omega,\mu)$ e, per la proprietà (2), $M_{\frac{1}{m}}$ è un operatore limitato su $L^p(\Omega,\mu)$. É immediato verificare che $M_{\frac{1}{m}} = M_m^{-1}$. Viceversa, sia $C = ||M_m^{-1}|| > 0$. Se $0 \in m_{\text{ess}}(\Omega)$, allora $\mu(\{\, x \in \Omega \mid |m(x)| < \frac{1}{C} \,\}) > 0$ e dunque esisterebbe $\delta \in]0, \frac{1}{C}[$ tale che l'insieme $E = \{\, x \in \Omega \mid \delta < |m(x)| < \frac{1}{C} \,\}$ abbia misura nulla. Ponendo $u(x) = \frac{1}{m(x)\mu(E)^{\frac{1}{p}}} \chi_E$ e $v = M_m u$, si avrebbe $||v|| = 1$ e

$$||M_m^{-1}|| \ge ||M_m^{-1} v||_p = ||u||_p = \left(\int_E \frac{1}{m(x)^p \mu(E)} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} > C,$$

assurdo.
(4) Per definizione $\lambda \in \sigma(M_m)$ se e solo se $\lambda - M_m = M_{\lambda - m}$ non è invertibile. Per la proprietà (3) ciò equivale a dire che $0 \notin (\lambda - m)_{\text{ess}}(\Omega)$, i.e. $\lambda \notin m_{\text{ess}}(\Omega)$. □

1.5. Operatori normali e autoaggiunti

In questo paragrafo, sia $(H, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare di H. Se $T \in \mathcal{L}(H)$, allora per ogni $y \in H$ l'operatore

$x \mapsto \langle Tx, y \rangle$ è lineare e continuo. Per il teorema di Riesz–Fréchet, esiste ed è unico $T^*y \in H$ tale che

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \quad x,\ y \in H.$$

Si prova facilmente che $T^* \in \mathcal{L}(H)$ e che $||T^*|| = ||T||$. T^* è detto *operatore aggiunto* di T.

Lemma 1.21. *Siano $T, S \in \mathcal{L}(H)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) $T^{**} = T$.
(2) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.
(3) $(T + S)^* = T^* + S^*$.
(4) $(TS)^* = S^* T^*$.
(5) *Se T è invertibile, allora T^* è invertibile e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*
(6) $||T^*T|| = ||T||^2$.

Dim. Le affermazioni (1)–(5) seguono facilmente dalla definizione. Per dimostrare la proprietà (6), basta osservare che $||T^*T|| \leq ||T|| \cdot ||T^*|| = ||T||^2$ e che, per ogni $x \in H$, $||x|| = 1$:

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*(Tx) \rangle \leq \|x\| \|T^*(Tx)\| \leq \|T^*T\|. \quad \square$$

Definizione 1.22. *Un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ si dice autoaggiunto se $T = T^*$, mentre si dice normale se $TT^* = T^*T$.*

Esempio 1.23. Sia (Ω, μ) uno spazio di misura con μ σ-finita e sia $m \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Si consideri l'operatore di moltiplicazione M_m su $L^2(\Omega, \mu)$ definito nel paragrafo 1.4. Allora $M_m^* = M_{\overline{m}}$. Infatti, se $f \in L^2(\Omega, \mu)$, si ha

$$\forall h \in L^2(\Omega, \mu) \quad \langle mh, f \rangle = \int_\Omega mh\overline{f} d\mu = \int_\Omega h\overline{(\overline{m}f)} d\mu = \langle h, \overline{m}f \rangle .$$

Ne segue immediatamente che M_m è un operatore normale e che M_m è autoaggiunto se e solo se m è a valori reali.

Proposizione 1.24. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) *$||Tx|| = ||T^*x||$ per ogni $x \in H$.*
(2) *Se $Tx = \lambda x$ per $x \in H$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, allora $T^*x = \overline{\lambda} x$.*
(3) $||T^2|| = ||T||^2$.
(4) $r(T) = ||T||$.

Dim. (1) Fissato $x \in H$, basta osservare che

$$||T^*x||^2 = \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = ||Tx||^2.$$

(2) Osserviamo che $(T-\lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I$ e che $T-\lambda I$ è normale. Possiamo così applicare la proprietà (1) all'operatore $T^* - \overline{\lambda} I$, ottenendo che

$$||T^* x - \overline{\lambda} x|| = ||Tx - \lambda x|| = 0,$$

da cui la tesi.
(3) Applicando la proprietà (1), otteniamo che $||T^2 x|| = ||TT^* x||$ per ogni $x \in H$. Ne segue, per il Lemma 1.21, che $||T^2|| = ||TT^*|| = ||T||^2$.
(4) Procedendo induttivamente, da (3) segue che $\|T\|^{2^m} = \|T^{2^m}\|$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Infatti, basta osservare che $T^{2^{m-1}}$ è normale e procedere come nella dimostrazione di (3). Quindi $\|T\| = \|T^{2^m}\|^{2^{-m}}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Facendo tendere $m \to \infty$ e ricordando che $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$, otteniamo che $r(T) = \|T\|$. □

La seguente proposizione ci dice che lo spettro di un operatore normale è costituito interamente da autovalori approssimati (cfr. Definizione 1.19).

Proposizione 1.25. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale. Allora $\lambda \in \sigma(T)$ se e solo se esiste una successione $(x_n)_n$ in H, con $||x_n|| = 1$, tale che $\lim_{n\to\infty} ||Tx_n - \lambda x_n|| = 0$.*

Dim. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e sia $(x_n)_n$ una successione in H, con $||x_n|| = 1$, tale che $\lim_{n\to\infty} ||Tx_n - \lambda x_n|| = 0$. Allora chiaramente $\lambda - T$ non ha inverso continuo e dunque $\lambda \in \sigma(T)$. Viceversa, supponiamo che $\lambda \in \sigma(T)$ e che non esista una successione $(x_n)_n$ come nell'enunciato. Allora esiste $\delta > 0$ tale che

$$||Tx - \lambda x|| \geq \delta ||x|| \tag{1.12}$$

per ogni $x \in H$; quindi $\lambda - T$ è iniettivo. $\lambda - T$ è anche normale e

$$(\lambda - T)^* = \overline{\lambda} - T^*,$$

quindi

$$||\overline{\lambda} x - T^* x|| = ||\lambda x - Tx|| \geq \delta ||x||$$

per ogni $x \in H$. Pertanto anche $\overline{\lambda} - T^*$ è iniettivo. Proviamo che $\mathrm{Rg}(\lambda - T)$ è denso in H: sia $y \in H$ tale che $\langle \lambda x - Tx, y \rangle = 0$ per ogni $x \in H$. Allora $\langle x, \overline{\lambda} y - T^* y \rangle = 0$ per ogni $x \in H$, cioè $\overline{\lambda} y - T^* y = 0$. Per l'iniettività di $\overline{\lambda} - T^*$, sarà $y = 0$ e dunque il rango di $\lambda - T$ è denso in H. Dalla densità del rango e da (1.12) segue che $\lambda \in \rho(T)$. □

Nel caso degli operatori autoaggiunti, possiamo aggiungere un'altra informazione importante sullo spettro.

Lemma 1.26. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Allora $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Dim. Sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Allora per ogni $x \in H$, $x \neq 0$, si ha

$$0 < |\lambda - \overline{\lambda}| \cdot ||x||^2 = |\langle Tx - \lambda x, x\rangle - \langle Tx - \overline{\lambda} x, x\rangle| =$$
$$|\langle Tx - \lambda x, x\rangle - \langle x, Tx - \lambda x\rangle| \leq 2||Tx - \lambda x|| \cdot ||x||.$$

Dunque, se $(x_n)_n$ è una successione in H con $||x_n|| = 1$, allora

$$||Tx_n - \lambda x_n|| > |\lambda - \overline{\lambda}| > 0.$$

Pertanto λ non può essere un autovalore approssimato e, per la Proposizione 1.25, $\lambda \notin \sigma(T)$. □

Concludiamo con una sottoclasse importante degli operatori normali.

Definizione 1.27. *Un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ si dice unitario se $T^*T = TT^* = I$.*

Proposizione 1.28. *Valgono le seguenti proprietà.*

(1) *Ogni operatore unitario su H è normale.*
(2) *Un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ è unitario se e solo se è invertibile e $T^{-1} = T^*$.*
(3) *Se $T \in \mathcal{L}(H)$ è un operatore unitario, allora T^{-1} e T^* sono operatori unitari.*
(4) *Se $T \in \mathcal{L}(H)$ è un operatore unitario, allora T è una isometria.*

Dim. La proprietà (1) segue direttamente dalla definizione.
(2) Supponiamo che T sia invertibile con $T^{-1} = T^*$. Allora

$$T^*T = T^{-1}T = I \;\text{ e }\; TT^* = TT^{-1} = I\,.$$

Quindi T è in operatore unitario. Per dimostrare l'implicazione inversa basta procedere in modo analogo.
(3) Se T è un operatore unitario, allora

$$(T^{-1})^*T^{-1} = T^{**}T^{-1} = TT^{-1} = I\,.$$

In modo analogo, si prova che $T^{-1}(T^{-1})^* = I$, e quindi T^{-1} è un operatore unitario. Poiché $T^* = T^{-1}$ in virtù della proprietà (2), T^* è anche un operatore unitario.
(4) Poiché T è un operatore unitario, allora $T^*T = I$ così che

$$\|Tx\| = \sqrt{\langle Tx, Tx\rangle} = \sqrt{\langle x, T^*Tx\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|\,.$$

□

Ricordiamo che, grazie all'identità di polarizzazione

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle + i\langle x+iy, x+iy\rangle - \langle x-iy, x-iy\rangle, \quad (1.13)$$

si prova che una isometria T preserva il prodotto scalare, cioè $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ per ogni $x, y \in H$.

Esempi 1.29. (1) Sia $\ell^2(\mathbb{Z})$ lo spazio di Hilbert di tutte le successioni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a valori complessi tali che $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty$. Consideriamo l'operatore $T\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ così definito

$$T(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} := (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})\,.$$

Allora T è un operatore unitario. Infatti, T è chiaramente invertibile e

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-1}\overline{y}_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\overline{y}_{n+1} = \langle x, T^{-1}y\rangle, \quad x\, y \in \ell^2(\mathbb{Z})\,,$$

che implica che $T^* = T^{-1}$.

(2) Sia $H = L^2([0,1])$. Consideriamo su H l'operatore T così definito

$$(Tf)(x) := f(1-x), \quad \text{q.o.},\ f \in L^2[0,1]\,.$$

L'operatore T è chiaramente iniettivo e suriettivo. Inoltre, $T = T^* = T^{-1}$. Quindi, T è un operatore unitario.