Università del Salento
Dipartimento di Matematica
"Ennio De Giorgi"

Angela A. Albanese
Elisabetta M. Mangino
Vincenzo B. Moscatelli
Dipartimento di Matematica "E. De Giorgi"
Università del Salento, Lecce

Elementi di analisi spettrale per operatori in spazi di Banach

Quaderno 1/2009

Università del Salento - Coordinamento SIBA

Quaderni di Matematica

Una pubblicazione a cura del

Dipartimento di Matematica

"Ennio De Giorgi"

Università del Salento

Comitato di Redazione

Giuseppe De Cecco (Direttore)

Lorenzo Barone

Wenchang Chu (Segretario)

I Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università del Salento documentano gli aspetti di rilievo dell'attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

(1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
(2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
(3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all'approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

Quaderno 1/2009

©2009 Università del Salento - Coordinamento SIBA

ISBN: 978-88-8305-067-1 (print version)

Il volume è pubblicato anche in versione elettronica
http://siba2.unile.it/ese
ISBN 978-88-8305-068-8 (e-version)

ELEMENTI DI ANALISI SPETTRALE PER OPERATORI IN SPAZI DI BANACH

Angela A. Albanese

Elisabetta M. Mangino

Vincenzo B. Moscatelli

Dipartimento di Matematica "E. De Giorgi"

Università del Salento

Lecce

Prefazione

Il presente quaderno è basato su alcune lezioni tenute da V.B. Moscatelli nel corso di *Teoria delle Funzioni* per il Corso di Laurea in Matematica durante l'anno accademico 1990-91 e sulle lezioni tenute da A. Albanese ed E. Mangino nell'ambito del Dottorato di Ricerca in Matematica, Università del Salento, durante l'anno accademico 2005-06.
Lo scopo del quaderno è fornire un'introduzione, per quanto possibile autosufficiente, alla teoria spettrale ed ai teoremi di rappresentazione spettrale per operatori lineari (limitati e non) definiti su spazi di Hilbert. Tali teoremi possono essere considerati come una generalizzazione per operatori in spazi infinito-dimensionali del classico risultato di algebra lineare che afferma che ogni matrice simmetrica reale è diagonalizzabile.
L'approccio adottato evita l'uso delle risoluzioni spettrali dell'identità (didatticamente più impegnativo e meno intuitivo), preferendo invece la forma moltiplicativa dei teoremi di rappresentazione spettrale. I prerequisiti necessari sono la teoria elementare degli spazi di Banach e di Hilbert e la teoria della misura, in particolare il teorema della rappresentazione di Riesz.
Passiamo ora ad illustrare i contenuti dei vari capitoli. Nel Capitolo I, dopo aver richiamato delle nozioni sulla dualità in spazi di Banach e sugli operatori lineari chiusi, si dimostrano i primi risultati di teoria spettrale su spettro, risolvente, raggio spettrale di un operatore e si migliorano tali risultati nel caso di operatori autoaggiunti e normali su uno spazio di Hilbert.
Nel Capitolo II, con un approccio (dovuto a V.B. Moscatelli) differente rispetto a quello usuale, viene esposta la teoria di Riesz-Schauder per operatori compatti in spazi di Banach, evidenziando come tali operatori abbiano comportamenti simili a quelli con immagine finito-dimensionale riguardo la dimensioni del nucleo e la codimensione dell'immagine. Viene inoltre dimostrato il teorema di rappresentazione spettrale per operatori compatti autoaggiunti su uno spazio di Hilbert separabile, che afferma che ogni operatore di questo tipo è simile ad un operatore diagonale sullo spazio ℓ^2 delle successioni a quadrato sommabile.
Nella prima parte del Capitolo III, dopo aver costruito un opportuno calcolo funzionale, si dimostra che ogni operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert è unitariamente equivalente ad un operatore di moltiplicazione definito su un opportuno spazio di tipo $L^2(\Omega, \mu)$. Analogo risultato viene

anche provato per gli operatori normali, utilizzando la dimostrazione alternativa proposta in [**16**] che, come accennato, evita il ricorso alle risoluzioni spettrali dell'identità.
Infine il Capitolo IV è dedicato agli operatori illimitati definiti su spazi di Hilbert. Anche in questo caso si può dimostrare un teorema di rappresentazione spettrale per operatori autoaggiunti. Come conseguenza, si dimostrano le formule di minimax per gli autovalori di un operatore autoaggiunto positivo con risolvente compatto.
Le due appendici sono dedicate rispettivamente ad una introduzione alle funzioni olomorfe a valori in uno spazio di Banach ed al Teorema di Stone-Weierstrass.

Nota. Durante la stesura del quaderno è venuto a mancare Bruno Moscatelli. Nostro relatore di tesi di laurea, ci introdusse alla bellezza dell'Analisi Funzionale. La sua intelligenza, la sua cultura e la sua ironia ci sono rimaste nel cuore e ci mancano molto.

Angela Albanese
Elisabetta Mangino

Lecce, maggio 2009

Indice

CAPITOLO 1

Alcuni richiami di teoria degli operatori

1.1. Richiami sulla dualità

Dato uno spazio di Banach $(X, ||\cdot||)$ su $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, indicheremo con $B_X := \{\, x \in X \mid ||x|| \leq 1\}$ la palla unitaria chiusa di X.
Se X e Y sono due spazi di Banach, indicheremo con $\mathcal{L}(X,Y)$ lo spazio degli operatori $T : X \to Y$ lineari e continui. Ricordiamo che vale il seguente risultato.

Proposizione 1.1. *Siano X ed Y due spazi di Banach su $\mathbb{K}$. Sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Allora sono equivalenti le seguenti proprietà:*

(i) *T è continuo in X.*
(ii) *T è continuo in 0.*
(iii) *T è un operatore limitato (i.e., $T(B_X)$ è limitato in Y).*

Per ogni $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, si può pertanto definire la *norma operatoriale* di T ponendo
$$\|T\| := \sup_{x\in B_X} \|Tx\|_Y .$$
Chiaramente, $\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$ per ogni $x \in X$. Inoltre, lo spazio $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ è ancora uno spazio di Banach.
Nel caso in cui $X = Y$, si pone $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,Y)$ e si indica con $I : X \to X$ l'operatore identità. Infine, se $Y = \mathbb{K}$, lo spazio di Banach $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ è detto *duale topologico* di X e si indica con X'. In tal caso, si preferisce denotare la norma operatoriale semplicemente con $\|\cdot\|'$.
Se Z è un altro spazio di Banach, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, è facile dimostrare che l'operatore composto $ST := S \circ T \in \mathcal{L}(X,Z)$ e che
$$\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \ . \tag{1.1}$$
Se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, si può definire l'operatore $T' : Y' \to X'$ ponendo
$$\forall y' \in Y' \ \forall x \in X \quad (T'y')(x) := y'(Tx).$$
L'operatore T' così definito è detto *operatore duale di* T e $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$. Infatti, è immediato provare che T' è lineare. Inoltre, fissato $y' \in Y'$, vale

la diseguaglianza

$$|(T'y')(x)| = |y'(Tx)| \leq \|y'\|'_{Y'} \cdot \|Tx\|_Y \leq \|y'\|'_{Y'} \cdot \|T\| \cdot \|x\|_X, \quad x \in X.$$

Questo assicura che $T'y' \in X'$ con

$$\|T'y'\|'_{X'} = \sup_{x \in B_X} |T'y'(x)| \leq \|T\| \|y'\|'_{Y'}.$$

Per l'arbitrarietà di y', possiamo concludere che $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ e che vale la diseguaglianza

$$\|T'\| = \sup_{y' \in B_{Y'}} \|T'y'\|'_{X'} \leq \|T\|. \tag{1.2}$$

In verità vale l'uguaglianza

$$\|T\| = \|T'\|. \tag{1.3}$$

Per dimostrare la diseguaglianza inversa procediamo come segue. Fissato $x_0 \in X$, per il Teorema di Hahn–Banach esiste $y'_0 \in Y'$ tale che $\|y'_0\|'_{Y'} = 1$ e $y'_0(Tx_0) = \|Tx_0\|_Y$. Quindi $x'_0 := T'y'_0$ soddisfa $x'_0(x_0) = \|Tx_0\|_Y$ così che

$$\|Tx_0\|_Y = (T'y'_0)(x_0) \leq \|T'\| \cdot \|y'_0\|'_{Y'} \cdot \|x_0\|_X = \|T'\| \cdot \|x_0\|_X,$$

cioé $\|T\| \leq \|T'\|$.

Se M è un sottospazio di X e N è un sottospazio di X', si definiscono

$$M^\perp := \{\, y \in X' \mid y'(x) = 0 \text{ per ogni } x \in M \,\},$$

$$^\perp N := \{\, x \in X \mid y'(x) = 0 \text{ per ogni } y' \in N \,\}.$$

Si verifica immediatamente che per ogni $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ valgono:

$$\ker(T') = T(X)^\perp, \qquad \ker(T) =^\perp T'(X'). \tag{1.4}$$

Ricordiamo la definizione di spazio quoziente. Per le dimostrazioni rinviamo a [**13**], 1.40-42 e 4.8-9. Sia M un sottospazio chiuso di X e sia $\phi : X \to X/M$ l'applicazione canonica, definita da

$$\phi(x) = x + M.$$

Lo spazio X induce su X/M la norma

$$||\phi(x)||_{X/M} = \inf\{\, ||x + y|| \mid y \in M \,\}.$$

Rispetto a tale norma, X/M è uno spazio di Banach e l'applicazione ϕ è continua ed aperta. Ricordiamo che $\dim(X/M)$ è detta codimensione di M. Se codim$M$ è finita, allora M è un sottospazio complementato in X, cioè esiste un sottospazio chiuso in X tale che

$$X = M + N, \qquad M \cap N = \{\, 0 \,\}.$$

Si prova che $(X/M, || \cdot ||_{X/M})'$ è isometrico a $(M^\perp, || \cdot ||')$, e dunque, grazie alla prima uguaglianza in (1.4), si ottiene il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1.2. *Sia* $T \in \mathcal{L}(X)$ *tale che* $T(X)$ *è chiuso. Allora* $(X/T(X))'$ *è isometrico a* $\ker(T')$.

1.2. Operatori chiusi

Dato un operatore lineare $T : D(T) \to X$, con dominio un sottospazio vettoriale $D(T)$ di X e con rango $\mathrm{Rg}(T)$, si dice che T è *densamente definito* se $D(T)$ è denso in X e che T è *chiuso* se il suo grafico $\mathcal{G}(T) := \{\,(x, Tx) \mid x \in D(T)\,\}$ è un sottospazio chiuso dello spazio di Banach prodotto $X \times X$.

PROPOSIZIONE 1.3. *Sia* $T : D(T) \subseteq X \to X$ *un operatore lineare su* X. *Allora le seguenti proprietà sono equivalenti.*

(i) T *è un operatore chiuso.*
(ii) *Per ogni successione* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ *tale che esistono* $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ *e* $\lim_{n\to+\infty} Tx_n = y$, *si ha* $x \in D(T)$ *e* $y = Tx$.
(iii) *Lo spazio* $D(T)$ *dotato della norma del grafico*
$$\|x\|_T = \|x\| + \|Tx\|\,, \qquad x \in D(T),$$
è uno spazio di Banach.

Chiaramente ogni operatore $T \in \mathcal{L}(X)$ è chiuso. Se il dominio di T è l'intero spazio X, vale anche il viceversa per il teorema del grafico chiuso, per la cui dimostrazione rimandiamo a [**13**], sezione 2.13.

TEOREMA 1.4 (TEOREMA DEL GRAFICO CHIUSO). *Sia* $T : X \to X$ *un operatore chiuso. Allora* T *è continuo.*

Dati due operatori lineari $S : D(S) \subseteq X \to X$ e $T : D(T) \subseteq X \to X$, si dice che T un'estensione di S, e si scrive $S \subset T$, se $D(S) \subseteq D(T)$ e $Sx = Tx$ per ogni $x \in D(S)$.

DEFINIZIONE 1.5. *Un operatore* $T : D(T) \subset X \to X$ *si dice chiudibile se ammette un'estensione chiusa.*

Il prossimo risultato è di facile verifica.

PROPOSIZIONE 1.6. *Un operatore* $T : D(T) \subset X \to X$ *è chiudibile se e solo se per ogni successione* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ *tale che* $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ *e* $\lim_{n\to+\infty} Tx_n = y$ *si ha* $y = 0$.

ESEMPIO 1.7. Sia $T : C^1[0,1] \subset L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ l'operatore così definito $Tf := f'(0)\mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ indica la funzione costante 1. Allora T non è chiudibile. Infatti, se si considera la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1[0,1]$ con

$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$, allora $\lim_{n\to+\infty} f_n = 0$ in $L^2([0,1])$, ma $Tf_n = \mathbf{1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ così che $\lim_{n\to+\infty} Tf_n \neq 0$.

PROPOSIZIONE 1.8. *Se $T : D(T) \subset X \to X$ è un operatore chiudibile, allora esiste la più piccola estensione chiusa di T che è indicata con $\overline{T}$ ed è detta chiusura di T. Inoltre la seguente identità è soddisfatta*

$$\overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(\overline{T}).$$

DIM. Sia $G = \overline{\mathcal{G}(T)}$. Poiché T è chiudibile, $G \subseteq \mathcal{G}(S)$ per ogni estensione chiusa S di T. Posto

$$D := \{\, x \in X \mid \exists y \in X \;\text{ tale che } (x,y) \in G \,\},$$

se $x \in D$, esiste un unico $y \in X$ tale che $(x,y) \in G$. Infatti, se $(x,y_1) \in G$ e $(x,y_2) \in G$, allora $(0, y_1 - y_2) \in G \subseteq \mathcal{G}(S)$, dove S è un'estensione chiusa di T. Ne segue che $y_1 - y_2 = S(0) = 0$. Allora l'applicazione $\overline{T}\colon D \to X$ che associa ad ogni elemento $x \in D$ l'unico elemento $y \in X$ tale che $(x,y) \in G$ è ben definita e chiaramente è lineare. Inoltre $\mathcal{G}(\overline{T}) = G$ e questo implica che $\overline{T}$ è un operatore chuso. Infine, se S è una qualsiasi estensione chiusa di T, per quanto già osservato $\mathcal{G}(\overline{T}) \subseteq \mathcal{G}(S)$ così che S è anche un'estensione di $\overline{T}$. $\square$

1.3. Risolvente e spettro

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$. Nel seguito, se T è un operatore lineare su X con dominio $D(T)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, indicheremo con $\lambda \pm T$ l'operatore $\lambda I \pm T$ con dominio $D(T)$.

DEFINIZIONE 1.9. *Sia $T : D(T) \subseteq X \to X$ un operatore lineare. L'insieme*

$$\rho(T) := \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - T : D(T) \to X \;\textit{è biiettivo e}\; (\lambda - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \,\}$$

è detto insieme risolvente di T. Se $\rho(T) \neq \emptyset$ e $\lambda \in \rho(T)$, si dice risolvente di T in λ l'operatore

$$R(\lambda, T) := (\lambda - T)^{-1}.$$

L'insieme $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ è detto spettro di T. In particolare, l'insieme $\sigma_p(T) := \{\, \lambda \in \sigma(T) \mid \ker(\lambda - T) \neq \{0\}\}$ è detto spettro puntuale di T. Inoltre, ogni elemento $\lambda \in \sigma_p(T)$ è detto autovalore di T, e ogni $0 \neq x \in X$ tale che $(\lambda - T)x = 0$ è detto autovettore di T, corrispondente all'autovalore λ.

PROPOSIZIONE 1.10. *Se $T : D(T) \subset X \to X$ è un operatore chiuso e $\lambda - T$ è biiettivo, allora $(\lambda - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.*

Dim. Per ipotesi $\mathcal{G}(\lambda - T)$ è chiuso. Pertanto anche
$$\mathcal{G}((\lambda - T)^{-1}) = \{\, (\lambda x - Tx, x) \mid x \in D(T) \,\}$$
è chiuso. La tesi segue dal teorema del grafico chiuso. □

Lemma 1.11. *Sia*
$$\mathcal{I}(X) := \{\, S \in \mathcal{L}(X) \mid S \text{ biiettivo e } S^{-1} \in \mathcal{L}(X) \,\}.$$
Allora valgono le seguenti proprietà.

(1) *Se $S \in \mathcal{L}(X)$, $||S|| < 1$, allora $I - S \in \mathcal{I}(X)$ e*
$$(I - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n.$$
(2) *Se $\rho \in \mathbb{C}$, $S \in \mathcal{L}(X)$, $||S|| < |\rho|$, allora $\rho \pm S \in \mathcal{I}(X)$.*
(3) *Se $T \in \mathcal{I}(X)$ e $S \in \mathcal{L}(X)$, allora $T + S \in \mathcal{I}(X)$ se e solo se $I + T^{-1}S \in \mathcal{I}(X)$.*
(4) *$\mathcal{I}(X)$ è aperto in $\mathcal{L}(X)$.*

Dim. (1) Consideriamo la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} S^n \tag{1.5}$$
nello spazio di Banach $\mathcal{L}(X)$.
Poiché $||S^n|| \leq ||S||^n$ e $||S|| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} ||S^n||$ converge. Questo implica che la serie (1.5) converge (totalmente) in $\mathcal{L}(X)$. Ora, osserviamo che
$$(I - S)\sum_{n=0}^{\infty} S^n = \sum_{n=0}^{\infty} S^n - \sum_{n=0}^{\infty} S^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n - \sum_{n=1}^{\infty} S^n = I.$$
In modo analogo, possiamo dimostrare che
$$(\sum_{n=0}^{\infty} S^n)(I - S) = I.$$
Tali identità assicurano che l'operatore $I - S$ è invertibile con operatore inverso dato da
$$(I - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n.$$
(2) Dato che $||\rho^{-1}S|| < 1$, per la proprietà (1) possiamo concludere che $I \pm \rho^{-1}S \in \mathcal{I}(X)$. Pertanto, anche $\rho \pm S = \rho(I \pm \rho^{-1}S) \in \mathcal{I}(X)$.
(3) Poiché T è invertibile, possiamo scrivere $T + S = T(I + T^{-1}S)$. Da questa identità segue banalmente la tesi.
(4) Siano $T \in \mathcal{I}(X)$ e $S \in \mathcal{L}(X)$ con $||S|| < ||T^{-1}||^{-1}$. Allora
$$||T^{-1}S|| \leq ||T^{-1}|| \cdot ||S|| < 1.$$

Combinando la proprietà (1) con la proprietà (3) possiamo così concludere che $I + T^{-1}S \in \mathcal{I}(X)$ e quindi $T + S \in \mathcal{I}(X)$. Questo significa che la palla aperta di centro T e raggio $||T^{-1}||^{-1}$ è contenuta in $\mathcal{I}(X)$. Per l'arbitrarietà di $T \in \mathcal{I}(X)$, ne segue che $\mathcal{I}(X)$ è un sottoinsieme aperto di $\mathcal{L}(X)$. $\square$

Proposizione 1.12. *Sia $T : D(T) \subseteq X \to X$ un operatore lineare. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) *Sia $\lambda_0 \in \rho(T)$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda - \lambda_0| < ||R(\lambda_0, T)||^{-1}$, allora $\lambda \in \rho(T)$ e*
$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, T)^{n+1}; \tag{1.6}$$
la serie in (1.6) converge in norma operatoriale.
(2) *$\rho(T)$ è aperto.*
(3) *Se $\rho(T) \neq \emptyset$, la funzione $R(\cdot, T) : \rho(T) \to \mathcal{L}(X)$ è analitica.*
(4) (Equazione del risolvente) *Per ogni $\lambda, \mu \in \rho(T)$*
$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T).$$
In particolare, $R(\lambda, T)$ e $R(\mu, T)$ commutano.
(5) *Sia $(\lambda_n)_n \subseteq \rho(T)$ tale che $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$. Allora $\lambda_0 \in \sigma(T)$ se e solo se $\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, T)\| = \infty$.*

Dim. (1) Osserviamo che
$$\lambda - T = (\lambda - \lambda_0 + \lambda_0 - T) = [I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, T)](\lambda_0 - T), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.7}$$
Se $|\lambda - \lambda_0| < ||R(\lambda_0, T)||^{-1}$, ovvero se $||(\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, T)|| < 1$, possiamo applicare il Lemma 1.11(1) per concludere che $I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, T) \in \mathcal{I}(X)$. Questo fatto insieme con l'identità (1.7) assicura che l'operatore $\lambda - T$ è biiettivo con operatore inverso limitato dato da
$$\begin{aligned} R(\lambda, T) &= R(\lambda_0, T)[I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, T)]^{-1} \\ &= R(\lambda_0, T) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, T)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, T)^{n+1}. \end{aligned}$$
Le proprietà (2) e (3) seguono applicando la proprietà (1). In particolare, dalla rappresentazione in serie del risolvente data in (1.6) segue che la funzione $R(\cdot, T)$ è analitica sull'insieme aperto $\rho(T)$ nel caso in cui $\rho(T) \neq \emptyset$.
(4) Siano $\lambda, \mu \in \rho(T)$. Allora possiamo scrivere
$$\begin{aligned} R(\lambda, T) &= R(\lambda, T)(\mu - T)R(\mu, T) = R(\lambda, T)[(\mu - \lambda) + (\lambda - T)]R(\mu, T) \\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T) + R(\mu, T), \end{aligned}$$
da cui
$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T).$$

(5) Supponiamo che $\lambda_0 \in \sigma(T)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che se $n > \nu$, allora $|\lambda_n - \lambda_0| < \varepsilon$. Per la (1) avremo

$$\varepsilon > |\lambda_n - \lambda_0| > \frac{1}{||R(\lambda_n, T)||}$$

per ogni $n > \nu$. Dunque $\lim_{n\to\infty} ||R(\lambda_n, T)|| = +\infty$.
Viceversa, assumiamo che $\lambda_0 \in \rho(T)$. Allora la funzione $R(\cdot, T)$ è chiaramente limitata sull'insieme compatto $\{ \lambda_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \rho(T)$. Questo contraddice l'ipotesi che $\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, T)\| = \infty$. □

Dalla Proposizione 1.12(2) segue che $\sigma(T)$ è chiuso. In generale, non si può dire di più sullo spettro e sul risolvente come dimostrano i seguenti esempi.

Esempio 1.13. Sia $X = C([0, 1], \mathbb{C})$ lo spazio delle funzioni continue su $[0, 1]$ e a valori complessi dotato della norma del sup. Allora gli operatori $T_i f = f'$, $i = 1, 2$, con domini $D(T_1) = C^1([0, 1], \mathbb{C})$ e $D(T_2) = \{ f \in C^1([0, 1], \mathbb{C}) \mid f(0) = 0\}$, sono chiusi in $C([0, 1], \mathbb{C})$ come si verifica facilmente applicando i classici risultati di passaggio al limite per le derivate.
Fissato $\lambda \in \mathbb{C}$, consideriamo la funzione f_λ definita da $f_\lambda(x) := e^{\lambda x}$, $x \in [0, 1]$. Allora $f_\lambda \in D(T_1)$ e

$$(\lambda - T_1)(f_\lambda) = \lambda f_\lambda - \lambda f_\lambda = 0;$$

questo significa che $\lambda - T_1$ non è iniettivo. Per l'arbitrarietà di λ possiamo così concludere che $\sigma(T_1) = \mathbb{C}$ e $\rho(T_1) = \emptyset$.
Fissato $\lambda \in \mathbb{C}$, consideriamo ora l'operatore S_λ definito da

$$S_\lambda g(x) = \int_0^x e^{\lambda(x-s)} g(s)ds, \qquad 0 \le x \le 1, \ g \in C([0, 1], \mathbb{C}).$$

Chiaramente, $S_\lambda \in \mathcal{L}(X)$. Inoltre, per ogni $g \in C([0, 1], \mathbb{C})$ l'elemento $S_\lambda g$ è la soluzione del problema di Cauchy $\lambda f - f' = g$, $f(0) = 0$. Ne segue che $(\lambda - T_2)S_\lambda = S_\lambda(\lambda - T_2) = I$, cioè $\lambda \in \rho(T_2)$. Per l'arbitrarietà di λ possiamo così concludere che $\rho(T_2) = \mathbb{C}$ e $\sigma(T_2) = \emptyset$.
Questo esempio dimostra quanto spettro e risolvente siano sensibili al dominio dell'operatore.

Se l'operatore T è limitato, lo spettro e la funzione risolvente soddisfano ulteriori interessanti proprietà.

Proposizione 1.14. *Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora valgono le sequenti proprietà.*

(1) *Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è tale che $|\lambda| > ||T||$, allora $\lambda \in \rho(T)$ e*

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}; \tag{1.8}$$

in particolare, $\rho(T) \neq \emptyset$.

(2) $\sigma(T) \neq \emptyset$.
(3) $\sigma(T) \subseteq \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq ||T|| \}$.
(4) $\sigma(T)$ *è un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{C}$.

Dim. (1) Fissiamo $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda| > ||T||$. Per il Lemma 1.11(2) possiamo allora concludere che $\lambda - T \in \mathcal{I}(X)$, cioè $\lambda \in \rho(T)$, e

$$R(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda}(I - \lambda^{-1}T) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.$$

(2) Supponiamo che $\sigma(T) = \emptyset$, ovvero che $\rho(T) = \mathbb{C}$. Allora la funzione risolvente di T è definita e analitica su tutto $\mathbb{C}$ e soddisfa la seguente diseguaglianza

$$||R(\lambda, T)|| \leq \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1 - \frac{||T||}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - ||T||}, \quad \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > \|T\|, \tag{1.9}$$

in virtù della rappresentazione in serie del risolvente data in (1.8). Da ciò segue che $||R(\lambda, T)|| \to 0$ per $|\lambda| \to +\infty$.
Fissati $x \in X$ e $f \in X'$, possiamo così definire su $\mathbb{C}$ una funzione intera ϕ come segue

$$\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \phi(\lambda) = (f \circ R(\lambda, T))x.$$

Per (1.9) la funzione ϕ soddisfa anche la seguente diseguaglianza

$$|\phi(\lambda)| \leq ||f||'||x||\frac{1}{|\lambda| - ||T||}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > ||T||.$$

Da questo segue che ϕ è anche funzione limitata in $\mathbb{C}$ e $\lim_{|\lambda|\to+\infty}\phi(\lambda) = 0$.
Applicando il teorema di Liouville a ϕ, otteniamo che $\phi = 0$ in $\mathbb{C}$.
Per l'arbitrarietà di f e x, possiamo così affermare che $R(\lambda, T) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, ottenendo un assurdo poichè $R(\lambda, T)$ è un operatore invertibile.
(3) Per la proprietà (1) possiamo affermare che $\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > ||T|| \} \subseteq \rho(T)$. Passando ai complementari, segue la tesi.
(4) Combinando la Proposizione 1.12(2) e la proprietà (3) otteniamo che $\sigma(T)$ è un insieme chiuso e limitato, cioè compatto. □

Definizione 1.15. *Siano* $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio di Banach su* $\mathbb{C}$ *e* $T \in \mathcal{L}(X)$. *Si definisce raggio spettrale di* T *il numero*

$$r(T) = \sup\{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T) \}.$$

Dato che $\sigma(T)$ è un insieme compatto per ogni $T \in \mathcal{L}(X)$, risulta

$$r(T) = \max\{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T) \}.$$

Questo significa che lo spettro di un operatore limitato T ha almeno un punto in comune con la frontiera del più piccolo disco chiuso centrato nell'origine che lo contiene. Inoltre, vale il seguente risultato.

TEOREMA 1.16. *Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora $r(T)$ è dato dalla seguente formula*

$$r(T) = \lim_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}.$$

e soddisfa $r(T) \leq ||T||$.

DIM. Posto $r := \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, osserviamo che la seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n T^n \qquad (\mu \in \mathbb{C})$$

converge in norma operatoriale se $|\mu| < r^{-1}$ e non converge in norma operatoriale se $|\mu| > r$. Ne segue che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} \qquad (0 \neq \lambda \in \mathbb{C})$$

converge in norma operatoriale se $|\lambda| > r$. Inoltre, la seguente identità è soddisfatta se $|\lambda| > r$

$$\frac{\lambda - T}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} \frac{\lambda - T}{\lambda} = I.$$

Questo implica che $\{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > r \,\} \subseteq \rho(T)$ e

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}, \qquad (\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > r). \tag{1.10}$$

Ne segue che $\sigma(T) \subseteq \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq r \,\}$. Per definizione di raggio spettrale, otteniamo così che $r(T) \leq r$.
La serie in (1.10) converge uniformemente in norma operatoriale sulle circonferenze di centro l'origine e raggio $\rho > r$. Possiamo pertanto integrare per serie (cf. APPENDICE A), ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \lambda^n R(\lambda, T) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{|\lambda|=\rho} \lambda^{n-k-1} d\lambda \right) T^k \qquad (1.11) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} \rho^{n-k} e^{i(n-k)t} dt \right) T^k = T^n. \end{aligned}$$

Dato che la funzione $\lambda \mapsto \lambda^n R(\lambda, T)$ è analitica in $\{\, \lambda \in \mathbb{C}, |\ |\lambda| > r(T) \,\}$, l'integrale in (1.11) non cambia se si considera una circonferenza con raggio $\rho > r(T)$. Applicando pertanto (1.11), otteniamo che, per ogni $\rho > r(T)$,

$$\|T^n\| \leq \rho^{n+1} \max_{|\lambda|=\rho} ||R(\lambda, T)||,$$

dove il massimo esiste poiché la funzione $R(\cdot, T)$ è continua in $\rho(T)$. Da questo segue che

$$r = \limsup_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq \rho \qquad (\rho > r(T))$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ρ, che

$$r = \limsup_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq r(T).$$

Proviamo ora che

$$\limsup_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}.$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$, sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $m > n$. Allora esistono e sono unici $k, h \in \mathbb{N}$ tali che $m = kn + h$ con $0 \leq h < n$. Di conseguenza possiamo scrivere

$$||T^m||^{\frac{1}{m}} = ||T^{h+kn}||^{\frac{1}{m}} \leq ||T||^{\frac{h}{m}} \cdot ||T^n||^{\frac{k}{m}} = ||T||^{\frac{h}{m}} \left(||T^n||^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{kn}{m}}.$$

Poiché

$$0 \leq \frac{h}{m} < \frac{n}{m}, \qquad \frac{m-n}{m} < \frac{kn}{m} \leq 1,$$

risulta che $h/m \to 0$ e $kn/m \to 1$ per $m \to +\infty$. Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{m\to+\infty} ||T^m||^{\frac{1}{m}} \leq ||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq ||T||.$$

Per l'arbitrarietà di n ne segue

$$\limsup_{m\to+\infty} ||T^m||^{\frac{1}{m}} \leq \liminf_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq ||T||,$$

ovvero esiste $\lim_{n\to+\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq ||T||$. □

Ricordiamo anche quanto segue.

Proposizione 1.17. *Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se $\lambda \in \sigma(T)$ e $\mathrm{Rg}(\lambda - T)$ non è chiuso, allora esiste una successione $(x_n)_n \subset X$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - \lambda x_n\| = 0$.*

Dim. Se $\lambda \in \sigma_p(T)$, non si ha nulla da dimostrare. Supponiamo pertanto che $\ker(\lambda - T) = \{0\}$. Allora l'operatore $(\lambda - T)^{-1} \colon \mathrm{Rg}(\lambda - T) \to X$ esiste e, per il Teorema del grafico chiuso, non è limitato dato che $\mathrm{Rg}(\lambda - T)$ non è chiuso. Ne segue che esiste una successione $(y_n)_n \subset \mathrm{Rg}(\lambda - T)$ tale che

$$\|(\lambda - T)^{-1} y_n\| \geq n\|y_n\| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Per linearità possiamo supporre che $y_n = (\lambda - T)x_n$ con $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ottenendo

$$\|x_n\| = \|(\lambda - T)^{-1} y_n\| \geq n\|(\lambda - T)x_n\| \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ovvero la tesi. □

Osservazione 1.18. Il risultato precedente continua a essere vero nel caso in cui $T\colon D(T) \to X$ è un operatore chiuso.

Motivata dalla precedente proposizione si dà la seguente definizione.

Definizione 1.19. *Siano* $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio di Banach su* $\mathbb{C}$*,* $T \in \mathcal{L}(X)$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Se* $\lambda \in \sigma(T)$*,* $\lambda - T$ *non è iniettivo o* $\mathrm{Rg}(\lambda - T)$ *non è chiuso, allora* λ *è detto autovalore approssimato.*

1.4. Un esempio fondamentale: gli operatori di moltiplicazione

Siano (Ω, μ) uno spazio di misura, μ σ-finita e $m : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione μ-misurabile. Il rango essenziale di m è così definito:

$$m_{\mathrm{ess}}(\Omega) = \{\, \omega \in \mathbb{C} \mid \forall\, \varepsilon > 0\ \mu(\{x \in \Omega \mid |m(x) - \omega| < \varepsilon\}) > 0 \,\}.$$

Sia $1 \leq p < \infty$. L'operatore di moltiplicazione associato a m su $L^p(\Omega, \mu)$ è così definito:

$$\begin{aligned} &D(M_m) = \{\, f \in L^p(\Omega, \mu) \mid mf \in L^p(\Omega, \mu) \,\} \\ &M_m(f) = mf. \end{aligned}$$

Proposizione 1.20. *Sotto le ipotesi precedenti si ha:*

(1) $(M_m, D(M_m))$ *è densamente definito e chiuso.*
(2) $D(M_m) = L^p(\Omega, \mu)$ *e* M_m *è limitato se e solo se* $m \in L^\infty(\Omega, \mu)$*. In tal caso,*
$$||M_m|| = ||m||_\infty.$$
(3) M_m *ha inversa limitata se e solo se* $0 \notin m_{\mathrm{ess}}(\Omega)$*.*
(4) $\sigma(M_m) = m_{\mathrm{ess}}(\Omega)$*.*

Dim. (1) Sia $(f_n)_n \subseteq D(M_m)$ tale che esistono $f_n \to f$ e $mf_n \to g$ in $L^p(\Omega, \mu)$. Allora esiste una sottosuccessione $(f_{k_n})_n$ tale che $\lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x) = f(x)$ q.o. in Ω. Quindi $\lim_{n\to\infty} m(x) f_{k_n}(x) = m(x) f(x)$ q.o. in Ω e pertanto $g = mf$. Abbiamo così dimostrato che $(M_m, D(M_m))$ è chiuso.
Per dimostrare che $D(M_m)$ è denso in $L^p(\Omega, \mu)$, supponiamo dapprima che μ sia finita e consideriamo la successione di insiemi $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$E_n := \{\, x \in \Omega \mid |m(x)| < n \,\}.$$

Chiaramente $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega$ e $\lim_{n\to\infty} \mu(\Omega \setminus E_n) = 0$. Sia $u_n = u\chi_{E_n}$, dove χ_{E_n} è la funzione caratteristica di E_n. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D(M_m)$. Per l'assoluta continuità dell'integrale, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se

$\mu(E) < \delta$, allora $\int_E |u|^p d\mu < \varepsilon$. Sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(\Omega \setminus E_n) < \delta$ per ogni $n > \nu$. Allora, se $n > \nu$:

$$\int_\Omega |u - u_n|^p d\mu = \int_{\Omega\setminus E_n} |u|^p d\mu < \varepsilon.$$

Se $\mu(\Omega) = \infty$, esistono $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di misura finita tali che $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i = \Omega$. Ripetendo il ragionamento precedente per ogni i e passando al limite si ottiene la tesi.
(2) È immediato verificare che se $m \in L^\infty(\Omega, \mu)$, allora M_m è limitato con $D(M_m) = L^p(\Omega, \mu)$. Viceversa, supponiamo che $m \notin L^\infty(\Omega, \mu)$. Allora, posto $Q_n = \{\, x \in \Omega \mid |m(x)| > n \,\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $\mu(Q_n) > 0$. Sia $u_n \in L^p(\Omega, \mu)$ tale che $||u_n||_p = 1$ e $u_n = 0$ in $\Omega\backslash Q_n$. Si ha che $u_n \in D(M_m)$ e

$$||M_m u_n||_p > n||u_n||_p = n,$$

pertanto M_m non è limitato.
Se $m \in L^\infty(\Omega, \mu)$, è immediato verificare che $||M_m|| \leq ||m||_\infty$. Per provare la disuguaglianza inversa poniamo, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$Q_\varepsilon = \{\, x \in \Omega \mid |m(x)| > ||m||_\infty - \varepsilon \,\}.$$

Si ha che $\mu(Q_\varepsilon) > 0$. Scegliamo $u_\varepsilon \in L^p(\Omega, \mu)$ tale che $||u||_p = 1$ e $u = 0$ su $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Allora

$$||M_m u_\varepsilon||_p^p = \int_{\Omega_\varepsilon} |mu_\varepsilon|^p d\mu \geq (||m||_\infty - \varepsilon) \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon|^p d\mu = (||m||_\infty - \varepsilon).$$

Pertanto $||M_m|| \geq ||m||_\infty - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ e dunque $||M_m|| \geq ||m||_\infty$.
(3) Se $0 \notin m_{\text{ess}}(\Omega)$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|m(x)| > \varepsilon$ q.o.. Allora $\frac{1}{m} \in L^\infty(\Omega, \mu)$ e, per la proprietà (2), $M_{\frac{1}{m}}$ è un operatore limitato su $L^p(\Omega, \mu)$. É immediato verificare che $M_{\frac{1}{m}} = M_m^{-1}$. Viceversa, sia $C = ||M_m^{-1}|| > 0$. Se $0 \in m_{\text{ess}}(\Omega)$, allora $\mu(\{\, x \in \Omega \mid |m(x)| < \frac{1}{C} \,\}) > 0$ e dunque esisterebbe $\delta \in]0, \frac{1}{C}[$ tale che l'insieme $E = \{\, x \in \Omega \mid \delta < |m(x)| < \frac{1}{C} \,\}$ abbia misura nulla. Ponendo $u(x) = \frac{1}{m(x)\mu(E)^{\frac{1}{p}}} \chi_E$ e $v = M_m u$, si avrebbe $||v|| = 1$ e

$$||M_m^{-1}|| \geq ||M_m^{-1} v||_p = ||u||_p = \left(\int_E \frac{1}{m(x)^p \mu(E)} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} > C,$$

assurdo.
(4) Per definizione $\lambda \in \sigma(M_m)$ se e solo se $\lambda - M_m = M_{\lambda - m}$ non è invertibile. Per la proprietà (3) ciò equivale a dire che $0 \notin (\lambda - m)_{\text{ess}}(\Omega)$, i.e. $\lambda \notin m_{\text{ess}}(\Omega)$. □

1.5. Operatori normali e autoaggiunti

In questo paragrafo, sia $(H, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare di H. Se $T \in \mathcal{L}(H)$, allora per ogni $y \in H$ l'operatore

$x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ è lineare e continuo. Per il teorema di Riesz–Fréchet, esiste ed è unico $T^*y \in H$ tale che

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad x,\ y \in H.$$

Si prova facilmente che $T^* \in \mathcal{L}(H)$ e che $||T^*|| = ||T||$. T^* è detto *operatore aggiunto* di T.

LEMMA 1.21. *Siano $T, S \in \mathcal{L}(H)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) $T^{**} = T$.
(2) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.
(3) $(T + S)^* = T^* + S^*$.
(4) $(TS)^* = S^*T^*$.
(5) *Se T è invertibile, allora T^* è invertibile e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*
(6) $||T^*T|| = ||T||^2$.

DIM. Le affermazioni (1)–(5) seguono facilmente dalla definizione. Per dimostrare la proprietà (6), basta osservare che $||T^*T|| \leq ||T|| \cdot ||T^*|| = ||T||^2$ e che, per ogni $x \in H$, $||x|| = 1$:

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*(Tx)\rangle \leq \|x\|\|T^*(Tx)\| \leq \|T^*T\|. \quad \Box$$

DEFINIZIONE 1.22. *Un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ si dice autoaggiunto se $T = T^*$, mentre si dice normale se $TT^* = T^*T$.*

ESEMPIO 1.23. Sia (Ω, μ) uno spazio di misura con μ σ-finita e sia $m \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Si consideri l'operatore di moltiplicazione M_m su $L^2(\Omega, \mu)$ definito nel paragrafo 1.4. Allora $M_m^* = M_{\overline{m}}$. Infatti, se $f \in L^2(\Omega, \mu)$, si ha

$$\forall h \in L^2(\Omega, \mu) \quad \langle mh, f\rangle = \int_\Omega mh\overline{f} d\mu = \int_\Omega h\overline{(\overline{m}f)} d\mu = \langle h, \overline{m}f\rangle\,.$$

Ne segue immediatamente che M_m è un operatore normale e che M_m è autoaggiunto se e solo se m è a valori reali.

PROPOSIZIONE 1.24. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) $||Tx|| = ||T^*x||$ *per ogni* $x \in H$.
(2) *Se $Tx = \lambda x$ per $x \in H$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, allora $T^*x = \overline{\lambda}x$.*
(3) $||T^2|| = ||T||^2$.
(4) $r(T) = ||T||$.

DIM. (1) Fissato $x \in H$, basta osservare che

$$||T^*x||^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = ||Tx||^2.$$

(2) Osserviamo che $(T - \lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I$ e che $T - \lambda I$ è normale. Possiamo così applicare la proprietà (1) all'operatore $T^* - \overline{\lambda} I$, ottenendo che

$$||T^* x - \overline{\lambda} x|| = ||Tx - \lambda x|| = 0,$$

da cui la tesi.
(3) Applicando la proprietà (1), otteniamo che $||T^2 x|| = ||TT^* x||$ per ogni $x \in H$. Ne segue, per il Lemma 1.21, che $||T^2|| = ||TT^*|| = ||T||^2$.
(4) Procedendo induttivamente, da (3) segue che $\|T\|^{2^m} = \|T^{2^m}\|$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Infatti, basta osservare che $T^{2^{m-1}}$ è normale e procedere come nella dimostrazione di (3). Quindi $\|T\| = \|T^{2^m}\|^{2^{-m}}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Facendo tendere $m \to \infty$ e ricordando che $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$, otteniamo che $r(T) = \|T\|$. □

La seguente proposizione ci dice che lo spettro di un operatore normale è costituito interamente da autovalori approssimati (cfr. Definizione 1.19).

Proposizione 1.25. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale. Allora $\lambda \in \sigma(T)$ se e solo se esiste una successione $(x_n)_n$ in H, con $||x_n|| = 1$, tale che $\lim_{n\to\infty} ||Tx_n - \lambda x_n|| = 0$.*

Dim. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e sia $(x_n)_n$ una successione in H, con $||x_n|| = 1$, tale che $\lim_{n\to\infty} ||Tx_n - \lambda x_n|| = 0$. Allora chiaramente $\lambda - T$ non ha inverso continuo e dunque $\lambda \in \sigma(T)$. Viceversa, supponiamo che $\lambda \in \sigma(T)$ e che non esista una successione $(x_n)_n$ come nell'enunciato. Allora esiste $\delta > 0$ tale che

$$||Tx - \lambda x|| \geq \delta ||x|| \tag{1.12}$$

per ogni $x \in H$; quindi $\lambda - T$ è iniettivo. $\lambda - T$ è anche normale e

$$(\lambda - T)^* = \overline{\lambda} - T^*,$$

quindi

$$||\overline{\lambda} x - T^* x|| = ||\lambda x - Tx|| \geq \delta ||x||$$

per ogni $x \in H$. Pertanto anche $\overline{\lambda} - T^*$ è iniettivo. Proviamo che $\mathrm{Rg}(\lambda - T)$ è denso in H: sia $y \in H$ tale che $\langle \lambda x - Tx, y \rangle = 0$ per ogni $x \in H$. Allora $\langle x, \overline{\lambda} y - T^* y \rangle = 0$ per ogni $x \in H$, cioè $\overline{\lambda} y - T^* y = 0$. Per l'iniettività di $\overline{\lambda} - T^*$, sarà $y = 0$ e dunque il rango di $\lambda - T$ è denso in H. Dalla densità del rango e da (1.12) segue che $\lambda \in \rho(T)$. □

Nel caso degli operatori autoaggiunti, possiamo aggiungere un'altra informazione importante sullo spettro.

Lemma 1.26. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Allora $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Dim. Sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Allora per ogni $x \in H$, $x \neq 0$, si ha

$$0 < |\lambda - \overline{\lambda}| \cdot ||x||^2 = |\langle Tx - \lambda x, x\rangle - \langle Tx - \overline{\lambda} x, x\rangle| =$$
$$|\langle Tx - \lambda x, x\rangle - \langle x, Tx - \lambda x\rangle| \leq 2||Tx - \lambda x|| \cdot ||x||.$$

Dunque, se $(x_n)_n$ è una successione in H con $||x_n|| = 1$, allora

$$||Tx_n - \lambda x_n|| > |\lambda - \overline{\lambda}| > 0.$$

Pertanto λ non può essere un autovalore approssimato e, per la Proposizione 1.25, $\lambda \notin \sigma(T)$. □

Concludiamo con una sottoclasse importante degli operatori normali.

Definizione 1.27. *Un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ si dice unitario se $T^*T = TT^* = I$.*

Proposizione 1.28. *Valgono le seguenti proprietà.*

(1) *Ogni operatore unitario su H è normale.*
(2) *Un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ è unitario se e solo se è invertibile e $T^{-1} = T^*$.*
(3) *Se $T \in \mathcal{L}(H)$ è un operatore unitario, allora T^{-1} e T^* sono operatori unitari.*
(4) *Se $T \in \mathcal{L}(H)$ è un operatore unitario, allora T è una isometria.*

Dim. La proprietà (1) segue direttamente dalla definizione.
(2) Supponiamo che T sia invertibile con $T^{-1} = T^*$. Allora

$$T^*T = T^{-1}T = I \ \text{ e } \ TT^* = TT^{-1} = I\,.$$

Quindi T è in operatore unitario. Per dimostrare l'implicazione inversa basta procedere in modo analogo.
(3) Se T è un operatore unitario, allora

$$(T^{-1})^*T^{-1} = T^{**}T^{-1} = TT^{-1} = I\,.$$

In modo analogo, si prova che $T^{-1}(T^{-1})^* = I$, e quindi T^{-1} è un operatore unitario. Poiché $T^* = T^{-1}$ in virtù della proprietà (2), T^* è anche un operatore unitario.
(4) Poiché T è un operatore unitario, allora $T^*T = I$ così che

$$\|Tx\| = \sqrt{\langle Tx, Tx\rangle} = \sqrt{\langle x, T^*Tx\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|\,.$$

□

Ricordiamo che, grazie all'identità di polarizzazione

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle + i\langle x+iy, x+iy\rangle - \langle x-iy, x-iy\rangle, \quad (1.13)$$

si prova che una isometria T preserva il prodotto scalare, cioè $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ per ogni $x, y \in H$.

Esempi 1.29. (1) Sia $\ell^2(\mathbb{Z})$ lo spazio di Hilbert di tutte le successioni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a valori complessi tali che $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty$. Consideriamo l'operatore $T\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ così definito

$$T(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} := (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})\,.$$

Allora T è un operatore unitario. Infatti, T è chiaramente invertibile e

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-1}\overline{y}_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\overline{y}_{n+1} = \langle x, T^{-1}y\rangle, \quad x\, y \in \ell^2(\mathbb{Z})\,,$$

che implica che $T^* = T^{-1}$.

(2) Sia $H = L^2([0,1])$. Consideriamo su H l'operatore T così definito

$$(Tf)(x) := f(1-x), \qquad \text{q.o.,}\ \ f \in L^2[0,1]\,.$$

L'operatore T è chiaramente iniettivo e suriettivo. Inoltre, $T = T^* = T^{-1}$. Quindi, T è un operatore unitario.

CAPITOLO 2

Operatori compatti in spazi di Banach

2.1. Operatori compatti

DEFINIZIONE 2.1. *Siano* $(X, ||\cdot||_X)$ *e* $(Y, ||\cdot||_Y)$ *spazi di Banach e* $T\colon X \to Y$ *un operatore lineare. L'operatore* T *si dice compatto se* $T(B_X)$ *è un sottoinsieme relativamente compatto di* Y.

ESEMPIO 2.2. Si consideri un compatto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e una funzione $K : \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}$ continua. Sia $T : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ l'operatore integrale così definito:

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)dy, \qquad f \in L^p(\Omega),\ x \in \Omega.$$

Dal teorema della convergenza dominata segue facilmente che $T(L^p(\Omega)) \subseteq C(\Omega)$. Proviamo che T è compatto. Osserviamo che per ogni $f \in L^p(\Omega)$ con $\|f\|_p \le 1$, applicando la disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$\|Tf\|_\infty \le ||K||_{p'}\|f\|_p \le ||K||_\infty|\Omega|^{1/p'}.$$

Dunque l'insieme $T(B_{L^p(\Omega)})$ è equilimitato in $C(\Omega)$. Inoltre, per l'uniforme continuità di K, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x_1, x_2, y \in \Omega$:

$$||x_1 - x_2|| < \delta \ \Rightarrow\ |K(x_1,y) - K(x_2,y)| < \varepsilon|\Omega|^{-1/p'}.$$

Pertanto per ogni $f \in B_{L^p(\Omega)}$, se $||x_1 - x_2|| < \delta$, applicando nuovamente la disuguaglianza di Hölder si deduce:

$$|Tf(x_1) - Tf(x_2)| \le \int_\Omega |K(x_1,y) - K(x_2,y)||f(y)|dy \le \varepsilon.$$

Quindi $T(B_{L^p(\Omega)})$ è anche equiuniformemente continuo e dunque, per il teorema di Ascoli-Arzelà, è relativamente compatto in $C(\Omega)$. Per l'immersione continua di $C(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$, otteniamo che $T(B_{L^p(\Omega)})$ è relativamente compatto in $L^p(\Omega)$.

Poiché i sottoinsiemi relativamente compatti di uno spazio di Banach sono anche limitati, ogni operatore compatto T è anche continuo (cf. Proposizione 1.1). Inoltre, vale la seguente caratterizzazione.

Teorema 2.3 (Teorema di Schauder). *Siano* $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *due spazi di Banach e* $T : X \to Y$ *un operatore lineare. Allora* T *è compatto se e solo se il suo duale* T' *è compatto.*

Dim. Supponiamo che T sia compatto, cioè che $T(B_X)$ sia un sottoinsieme di Y relativamente compatto, e indichiamo con K la chiusura di $T(B_X)$ in Y. Poiché T è un operatore limitato, esiste $M > 0$ tale che $\|y\|_Y \leq M$ per ogni $y \in K$. Pertanto, per ogni $f \in B_{Y'}$ risulta

$$\|f\|_K := \sup\{|f(y)| \mid y \in K\} \leq M,$$

così che possiamo indentificare $B_{Y'}$ con un sottoinsieme limitato dello spazio di Banach $C(K)$ formato da tutte le funzioni continue sul compatto K e dotato della norma

$$\|g\|_K := \sup\{|g(y)| \mid y \in K\} \qquad (g \in C(K)). \tag{2.14}$$

Inoltre, per ogni $f \in B_{Y'}$ e y, $z \in K$ si ha

$$|f(y) - f(z)| \leq \|y - z\|_Y.$$

Questo implica che $B_{Y'}$ è un sottoinsieme equicontinuo di $C(K)$ e, essendo limitato, è relativamente compatto per il Teorema di Ascoli-Arzelà. Perciò, ogni successione $(f_n)_n \subset B_{Y'}$ contiene una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ che è una successione di Cauchy rispetto alla norma (2.14). Poiché

$$\begin{aligned} \|T'f_{n_k} - T'f_{n_j}\|'_Y &= \sup_{x \in B_X} |(T'f_{n_k} - T'f_{n_j})(x)| = \sup_{x \in B_X} |(f_{n_k} - f_{n_j})(Tx)| \\ &= \|f_{n_k} - f_{n_j}\|_K, \end{aligned}$$

$(T'f_{n_k})_k$ è allora una successione di Cauchy di X'. Quindi $(T'f_{n_k})_k$ converge a qualche elemento di X' poiché X' è completo. Abbiamo così dimostrato che $T'(B_{Y'})$ è un sottoinsieme relativamente compatto di X' e quindi l'operatore T' è compatto.
Supponiamo che T' sia compatto. Allora, procedendo come sopra, si dimostra che l'operatore $T''\colon X'' \to Y''$ è compatto. Dato che $T = T''_{|X}$, ne segue che anche T è compatto. $\square$

Osservazione 2.4. Se indichiamo con $\mathcal{L}$ la classe di tutti gli operatori lineari e continui tra spazi di Banach, allora $\mathcal{L}$ è un'algebra rispetto alla operazione di composizione dato che

$$\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$$

per ogni $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $S \in \mathcal{L}(Z, X)$. Indichiamo con $\mathcal{K}$ la classe di tutti gli operatori lineari e compatti tra spazi di Banach e con $\mathcal{F}$ la classe di tutti gli operatori lineari continui con rango finito dimensionale. Ricordando che ogni sottoinsieme limitato in uno spazio finito dimensionale è relativamente compatto, chiaramente la seguente inclusione è soddisfatta

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{L}.$$

Inoltre, $\mathcal{K}$ è un ideale di $\mathcal{L}$, cioè

$$SRT \in \mathcal{K}(X, W)$$

per ogni $S \in \mathcal{L}(Z, W)$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $R \in \mathcal{K}(Y, Z)$. Infatti, poiché $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $T(B_X)$ è un sottoinsieme limitato di Y e quindi esiste $\lambda > 0$ tale che $T(B_X) \subset \lambda B_Y$. Ne segue che $R(T(B_X)) \subset \lambda R(B_Y)$, dove $R(B_Y)$ è un sottoisieme relativamente compatto di Z dato che $R \in \mathcal{K}(Y, Z)$. Poiché $S \in \mathcal{L}(Z, W)$, possiamo concludere che $S(R(T(B_X)))$ è un sottoisieme relativamente compatto di W.

Proposizione 2.5. *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach. Allora $\mathcal{K}(X, Y)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Dim. Sia $(T_n)_n \subset \mathcal{K}(X, Y)$ tale che $T_n \overset{n}{\to} T$ in $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|)$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste allora $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$,

$$\|T_n - T\| < \varepsilon\,,$$

o equivalentemente,

$$T(B_X) \subset (T - T_n)(B_X) + T_n(B_X) \subset \varepsilon B_Y + T_n(B_X)\,. \tag{2.15}$$

Preso $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$, $T_n(B_X)$ è un sottoinsieme relativamente compatto di Y poiché $T_n \in \mathcal{K}(X, Y)$, e quindi $T_n(B_X)$ è totalmente limitato. In corrispondenza di ε, possiamo allora trovare un numero finito di elementi di B_Y, diciamo $y_1, y_2, \ldots, y_k$, tali che

$$T_n(B_X) \subset \cup_{i=1}^{k}(y_i + \varepsilon B_Y)\,. \tag{2.16}$$

Ponendo $y_{k+1} = 0$, per (2.15) e (2.16) otteniamo che

$$T(B_X) \subset \cup_{i=1}^{k+1}(y_i + \varepsilon B_Y).$$

Per l'arbitrarietà di ε, questo significa che $T(B_X)$ è un sottoinsieme totalmente limitato e quindi relativamente compatto di Y. $\square$

Osservazione 2.6. Dalla Proposizione 2.5 segue che se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono due spazi di Banach, $(T_n)_n$ una successione di operatori di rango finito da X in Y e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tali che $\lim_{n\to\infty} ||T_n - T||_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0$, allora T è compatto. La questione se ogni operatore compatto tra spazi di Banach è sempre il limite in norma di una opportuna successione di operatori di rango finito rimase un problema aperto per molto tempo, noto in letteratura come il "problema dell'approssimazione". Questo problema fu risolto in negativo da Enflo nel 1972. Ma è bene ricordare che se Y è uno spazio di Hilbert (o, più in generale, se possiede una base di Schauder), allora la chiusura dello spazio $\mathcal{F}(X, Y)$ è proprio $\mathcal{K}(X, Y)$ (cfr., per esempio, [**4**]).

Osservazione 2.7. Se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach infinito dimensionale e $T \in \mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X, X)$, allora $0 \in \sigma(T)$. Altrimenti T sarebbe un isomorfismo topologico da X su X e quindi $T(B_X)$ un intorno di 0 relativamente compatto. Ne seguirebbe che X è localmente compatto e perciò finito dimensionale.

2.2. La teoria di Riesz–Schauder

Nel seguito con $(X, \|\cdot\|)$ indicheremo uno spazio di Banach infinito dimensionale su $\mathbb{C}$ e, dato $T \in \mathcal{L}(X)$, con T_λ l'operatore $\lambda - T$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Se T_λ non è iniettivo per qualche $\lambda \neq 0$, cioè se $\lambda \in \sigma_p(T)$ è un *autovalore* di T, indicheremo con $N(T_\lambda) := \ker T_\lambda$ l'*autospazio* relativo all'autovalore λ. In generale, lo spazio $N(T_\lambda)$ è infinito dimensionale. Invece, se T è compatto, risulta

Proposizione 2.8. *Sia $T \in \mathcal{K}(X)$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$,*

$$\dim N(T_\lambda^n) < \infty\,.$$

Dim. Sia $n = 1$. Posto $B := B_X \cap N(T_\lambda)$, $T_\lambda(B) = \{0\}$, quindi $\lambda B = T(B)$. Poiché $T(B)$ è un sottoinsieme relativamente compatto di X, anche B è un sottoinsieme relativamente compatto di X e dunque in $N(T_\lambda)$. Pertanto $N(T_\lambda)$ è finito dimensionale.
Per $n > 1$ la dimostrazione è analoga dato che

$$\begin{aligned} T_\lambda^n &= (\lambda - T)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \lambda^{n-k}(-1)^k T^k \\ &= \lambda^n - \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^{k+1}\lambda^{n-k}T^k\,, \end{aligned}$$

dove $\sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^{k+1}\lambda^{n-k}T^k \in \mathcal{K}(X)$. □

Proposizione 2.9. *Sia $T \in \mathcal{K}(X)$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, $T_\lambda^n(X)$ è un sottospazio chiuso di X.*

Dim. Sia $n = 1$. Per la Proposizione 2.8 $\dim N(T_\lambda) < \infty$. Questo garantisce che $N(T_\lambda)$ è un sottospazio complementato di X, cioè esiste un operatore lineare continuo $P\colon X \to X$ tale che $P(X) = N(T_\lambda)$ e $P^2 = P$. Posto $Y := \ker P$, possiamo rappresentare X come segue

$$X = N(T_\lambda) \oplus Y \tag{2.17}$$

così che $T_\lambda(X) = T_\lambda(Y)$. Fissato $z \in \overline{T_\lambda(X)}$, esiste una successione $(y_n)_n \subset Y$ tale che $T_\lambda(y_n) \overset{n}{\to} z$ in X. Supponiamo che la successione $(y_n)_n$ non sia limitata. Allora esiste una sottosuccessione $(y_{n_k})_k$ di $(y_n)_n$ tale che $\|y_{n_k}\| \overset{k}{\to} \infty$. Posto $v_k := \frac{y_{n_k}}{\|y_{n_k}\|} \in Y$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, ne segue che $\|v_k\| = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, cioè $(v_k)_k$ è una successione limitata, $T_\lambda(v_k) = \frac{1}{\|y_{n_k}\|}T(y_{n_k}) \overset{k}{\to} 0$. Inoltre, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k = \lambda^{-1}(T_\lambda(v_k) + T(v_k))\,. \tag{2.18}$$

Poiché la successione $(v_k)_k$ è limitata e T è un operatore compatto, esiste una sottosuccessione di $(T(v_k))_k$ convergente. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che la successione $(T(v_k))_k$ stessa sia convergente, diciamo a $v' \in X$. Per l'identità (2.18) ne segue che $v_k \xrightarrow{k} \lambda^{-1}v' := v \in X$ così che $\|v\| = 1$. Inoltre, per la continuità di T e l'unicità del limite, $T_\lambda(v_k) \xrightarrow{k} T_\lambda(v) = 0$. Questo implica che $v \in N(T_\lambda)$ e quindi $v = P(v) = \lim_{k\to\infty} P(v_k) = 0$. Abbiamo così ottenuto un assurdo dato che $\|v\| = 1$. Pertanto la successione $(y_n)_n$ è limitata. Ragionando come per la successione $(v_k)_k$, possiamo concludere che (eventualmente passando ad una sottosuccessione) $y_n \xrightarrow{n} y \in X$. Per la continuità di T_λ e l'unicità del limite, $T_\lambda(y_n) \to T_\lambda(y) = z$. Quindi $z \in T_\lambda(X)$.
In modo analogo si dimostra che $T_\lambda^n(X)$ è un sottospazio chiuso di X se $n > 1$. □

COROLLARIO 2.10. *Sia $T \in \mathcal{K}(X)$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$,*

$$\operatorname{codim} T_\lambda^n(X) < \infty\,.$$

DIM. Sia $n = 1$. Poiché $T'_\lambda = \lambda - T'$ e $T' \in \mathcal{K}(X')$ per il Teorema 2.3, possiamo applicare la Proposizione 2.8 per concludere che $\dim N(T'_\lambda) < \infty$. D'altra parte, per la Proposizione 2.9 il rango $T_\lambda(X)$ è un sottospazio chiuso di X e quindi lo spazio quoziente $\frac{X}{T_\lambda(X)}$, dotato della topologia indotta, è uno spazio di Banach. In particolare, per la Proposizione 1.2, il suo duale topologico è isomorfo a $N(T'_\lambda)$. Ne segue che il duale di $\frac{X}{T_\lambda(X)}$, e quindi $\frac{X}{T_\lambda(X)}$ stesso, è finito dimensionale, cioè $\operatorname{codim} T_\lambda(X) < \infty$.
Se $n > 1$, si procede in maniera analoga. □

LEMMA 2.11 (LEMMA DI RIESZ). *Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach ed M un sottospazio chiuso di X. Allora, per ogni $\delta \in]0,1[$ esiste $x \in X$ tale che $\|x\| = 1$ e $d(x,M) > \delta$.dove*

$$d(x,M) = \inf\{\|x-y\| \ \mid\ y \in M\} \leq \|x\|\,.$$

DIM. Poiché M è un sottospazio chiuso di X, per il Teorema di Hahn–Banach esiste un iperpiano chiuso H tale che $M \subset H$. Supponiamo che $H = \{y \in X \ \mid\ f(y) = 0\}$ per qualche $f \in X'$ con $\|f\|' = 1$.
Fissato $\delta \in]0,1[$, esiste $x \in X$ tale che $\|x\| = 1$ e $|f(x)| > \delta$. Di conseguenza, per ogni $y \in H$,

$$\delta < |f(x)| = |f(x-y)| \leq \|f\|' \cdot \|x-y\| = \|x-y\|$$

così che

$$\delta < |f(x)| \leq \inf\{\ \|x-y\| \ \mid\ y \in H\} = d(x,H) \leq d(x,M)\,. \qquad (2.19)$$

□

Osservazione 2.12. Sia H un iperpiano chiuso di X, cioè $H = \{ y \in X \mid f(y) = 0\} = \ker f$ per qualche $f \in X'$ con $\|f\|' = 1$. Sia $x \in X$ con $\|x\| = 1$. Allora $d(x, H) = 1$ se, e solo se, $|f(x)| = 1$. Infatti, se $|f(x)| = 1$, allora per (2.19) otteniamo che

$$1 \leq d(x, H) \leq \|x\| = 1 \,.$$

Viceversa, supponiamo che $d(x, H) = 1$. In tal caso, fissato $z \in X \setminus H$ con $\|z\| = 1$, poniamo $y := x - \frac{f(x)}{f(z)} z$. Allora, $f(y) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)} f(z) = 0$, cioè $y \in H$, e

$$1 = d(x, H) \leq \|x - y\| = \left| \frac{f(x)}{f(z)} \right| \,.$$

Ne segue che $|f(z)| \leq |f(x)|$. Per l'arbitrarietà di z, con $\|z\| = 1$, otteniamo che $1 = \|f\|' \leq |f(x)| \leq \|f\|'\|x\| = 1$.
Questo significa che, se il funzionale f non assume la norma sulla sfera unitaria di X, allora $d(x, H) \neq 1$ per ogni $x \in X$ con $\|x\| = 1$. $\square$

Esempi 2.13. (1) Siano $X = c_0$ e $f \in \ell^1 = (c_0, \|\cdot\|_\infty)'$ definito da $f(y_n)_n := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} y_n$ per ogni $(y_n)_n \in c_0$. Allora, per ogni $y = (y_n)_n \in c_0$,

$$|f(y)| \leq \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} |y_n| \leq \|y\|_\infty \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} = \|y\|_\infty \,.$$

Questo implica che $\|f\|' \leq 1$. D'altra parte, per ogni $k \in \mathbb{N}$ la successione $y_k := (y_{nk})_n$, con $y_{nk} = 1$ se $n \leq k$ e $y_{nk} = 0$ se $n > k$, appartiene a c_0 e

$$0 \leq f(y_k) = \sum_{n=1}^k 2^{-n} \leq \|f\|' \|y_k\|_\infty = \|f\|' \,,$$

da cui, passando al limite per $k \to \infty$, si ottiene che

$$1 = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \leq \|f\|'.$$

Di conseguenza, $\|f\|' = 1$.
Supponiamo ora che esista $x = (x_n)_n \in c_0$ con $\|x\| = 1$ tale che $|f(x)| = 1$. Poiché $x \in c_0$, esiste $k \in N$ tale che $|x_k| < 1/2$. Ne segue che

$$\begin{aligned} 1 = |f(x)| = \left| \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} x_n \right| &\leq \sum_{n=1}^{k-1} 2^{-n} |x_n| + 2^{-k} |x_k| + \sum_{n>k} 2^{-n} |x_n| \\ &\leq \sum_{n=1}^{k-1} 2^{-n} + \frac{1}{2} \left(2^{-k} + \sum_{n>k} 2^{-n} \right) < 1 \,, \end{aligned}$$

e otteniamo una contraddizione.
(2) Siano $X = C[0,1]$ e $f \in (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)'$ definito da $f(x) = \int_0^{1/2} x(t) dt - \int_{1/2}^0 x(t) dt$ per ogni $x \in C[0,1]$. Procedendo in modo analogo, si dimostra che non esiste $x \in C[0,1]$ con $\|x\|_\infty = 1$ tale $|f(x)| = 1$.

Osservazione 2.14. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach riflessivo e $f \in X'$ con $\|f\|' = 1$. Allora esiste $x \in X$ con $\|x\| = 1$ tale che $|f(x)| = 1$. Infatti, dato che $\|f\|' = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = 1$, possiamo determinare una successione $(x_n)_n \subset X$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $f(x_n) \xrightarrow{n} 1$. Poiché la sfera unitaria di X è debolmente compatta, $x_n \xrightarrow{n} x_0$ debolmente per qualche $x_0 \in X$ (eventualmente passando ad una sottosuccessione), il che implica che $f(x_n) \xrightarrow{n} f(x_0) = 1$.

In verità, la proprietà appena dimostrata caratterizza la riflessività nell'ambito della classe degli spazi di Banach.

Teorema 2.15 (Teorema di James). *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach. Allora X è riflessivo se, e solo se, per ogni $f \in X'$ con $\|f\|' = 1$ esiste $x \in X$ tale che $\|x\| = 1$ e $|f(x)| = 1$.*

Per la dimostrazione del Teorema di James rinviamo a [**8**], p.84.

Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach infinito dimensionale e $S \in \mathcal{L}(X)$. Allora è facile verificare che

$$\{0\} = N(S^0) \subseteq N(S) \subseteq N(S^2) \subseteq \ldots \subseteq N(S^k) \subseteq \ldots,$$

dove $S^0 = I$.

Definizione 2.16. Se esiste $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tale che $N(S^k) = N(S^{k+1})$, allora

$$a(S) := \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \mid \ N(S^k) = N(S^{k+1})\}$$

si dice *indice di ascesa* di S.

Analogamente, risulta

$$X = S^0(X) \supseteq S(X) \supseteq S^2(X) \supseteq \ldots \supseteq S^n(X) \supseteq \ldots.$$

Definizione 2.17. Se esiste $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tale che $S^k(X) = S^{k+1}(X)$, allora

$$d(S) := \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \mid \ S^k(X) = S^{k+1}(X)\}$$

si dice *indice di discesa* di S.

Osservazione 2.18. (1) Se $a(S) = k_0$, allora $N(S^k) = N(S^{k+1})$ per ogni $k \geq k_0$. Infatti, se $k \geq k_0$ e $x \in N(S^{k+1})$, allora $0 = S^{k+1}(x) = S^{k_0+1}(S^{k-k_0}(x))$ così che $S^{k-k_0}(x) \in N(S^{k_0+1}) = N(S^{k_0})$. Di conseguenza, $S^k(x) = S^{k_0}(S^{k-k_0}(x)) = 0$, cioè $x \in N(S^k)$.
(2) Se $d(S) = k_0$, allora $S^k(X) = S^{k+1}(X)$ per ogni $k \geq k_0$. Infatti, se $k \geq k_0$ e $y \in S^k(X)$, allora esiste $x \in X$ tale che $y = S^k(x) = S^{k-k_0}(S^{k_0}(x))$, dove $S^{k_0}(x) \in S^{k_0}(X) = S^{k_0+1}(X)$. Di conseguenza, per qualche $x' \in X$, risulta $S^{k_0}(x) = S^{k_0+1}(x')$, il che implica che $y = S^k(x) = S^{k-k_0}(S^{k_0+1}(x')) = S^{k+1}(x') \in S^{k+1}(X)$.

Proposizione 2.19. *Sia $S \in \mathcal{L}(X)$ con $S(X)$ sottospazio chiuso di X. Se $a := a(S) < \infty$ e $d := d(S) < \infty$, allora $a = d$.*

Dim. Sia $m := \max\{a, d\} \in \mathbb{N}$. Allora, per l'Osservazione 2.18 risulta

$$S^m(X) = S^d(X) \qquad \text{e} \qquad N(S^m) = N(S^a)\,,$$
$$S^k(X) = S^m(X) \qquad \text{e} \qquad N(S^k) = N(S^m)$$

per ogni $k \geq m$. Inoltre, $N(S^m) \cap S^m(X) = \{0\}$. Infatti, se $x \in N(S^m) \cap S^m(X)$, allora $S^m(x) = 0$ e $x = S^m(y)$ per qualche $y \in X$. Ne segue che $S^{2m}(y) = S^m(S^m(y)) = S^m(x) = 0$, cioè $y \in N(S^{2m})$. Poiché $m \geq d$, y è un elemento di $N(S^m)$, così che $x = S^m(y) = 0$.
Pertanto $S^m_{|S^m(X)}$ è una applicazione lineare, continua e iniettiva da $S^m(X)$ su $S^m(X)$. Inoltre, $S^m_{|S^m(X)}$ è una applicazione aperta dato che $S(X)$ è un sottospazio chiuso di X e quindi S è una applicazione aperta. Questo implica che $S^m(X)$ è un sottospazio chiuso di X.
Posto $R := \left(S^m_{|S^m(X)}\right)^{-1} \in \mathcal{L}(S^m(X))$, l'applicazione composta $RS^m \colon X \to S^m(X)$ soddisfa

$$(RS^m)^2 = RS^m RS^m = RS^m\,,$$

cioè RS^m è una proiezione continua su $S^m(X)$. Allora lo spazio di Banach X si rappresenta come segue

$$X = N(RS^m) \oplus (RS^m)(X) = N(S^m) \oplus S^m(X) = N(S^a) \oplus S^d(X)\,, \tag{2.20}$$

dove $N(RS^m) = N(S^m)$ per l'iniettività di R. Per (2.20) otteniamo che

$$S^a(X) = S^{a+d}(X) = S^d(X)\,,$$

il che implica che $a \geq d$ così che $N(S^d) \subseteq N(S^a)$.
Dimostriamo ora l'inclusione inversa. Sia $x \in N(S^a)$. Se $S^d(x) \neq 0$, allora $x = (x - S^d(x)) + S^d(x)$, dove $x - S^d(x) \in N(S^a)$ e $S^d(x) \in S^d(X)$ per (2.20). Pertanto, $0 = S^a(x - S^d(x)) = S^a(x) - S^a(S^d(x)) = -S^a(S^d(x))$, cioè $S^d(x) \in N(S^a)$. Poichè $S^d(x) \in N(S^a) \cap S^d(X)$, risulta $S^d(x) = 0$, e otteniamo così una contraddizione.
Questo significa che $a \leq d$. Quindi, $a = d$. □

Come conseguenza di (2.20), otteniamo che se $a(S) < \infty$ e $d(S) < \infty$, allora $a(S) = d(S)$ e lo spazio di Banach X si decompone come segue

$$X = N(S^m) \oplus S^m(X)\,, \tag{2.21}$$

dove $m = a(S) = d(S)$.

Proposizione 2.20. *Sia $T \in \mathcal{K}(X)$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a(T_\lambda) = d(T_\lambda) < \infty$.*

Dim. Fissato $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, per le Proposizioni 2.9 e 2.19 è sufficiente provare che $a(T_\lambda) < \infty$ e $d(T_\lambda) < \infty$.

Supponiamo che $N(T_\lambda^{n-1})$ sia un sottospazio proprio di $N(T_\lambda^n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ($N(T_\lambda^0) = N(I) = \{0\}$). Allora, applicando il Lemma di Riesz, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in N(T_\lambda^n)$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $d(x, N(T_\lambda^{n-1})) > \frac{1}{2}$.
Ora, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$, risulta

$$\begin{aligned} |\lambda|^{-1}\|T(x_n) - T(x_m)\| &= |\lambda|^{-1}\|\lambda x_n - T_\lambda(x_n) + T_\lambda(x_m) - \lambda x_m\| \\ &= \|x_n - (\lambda^{-1}T_\lambda(x_n) - \lambda^{-1}T_\lambda(x_m) + x_m)\| \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

poiché $\lambda^{-1}T_\lambda(x_n) - \lambda^{-1}T_\lambda(x_m) + x_m \in N(T_\lambda^{n-1})$. Questo implica che la successione $(T(x_n))_n$ non ammette alcuna successione estratta convergente, e otteneniamo così una contraddizione dato che $T \in \mathcal{K}(X)$ e $(x_n)_n$ è una successione limitata. Possiamo allora concludere che $a(T_\lambda) < \infty$.
In modo analogo, si prova che $d(T_\lambda) < \infty$. □

Proposizione 2.21. *Sia $T \in \mathcal{K}(X)$. Allora lo spettro $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$, è al più numerabile ed ha come punto limite al più lo zero.*

Dim. Sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Allora $N(T_\lambda) = \{0\}$ così che $N(T_\lambda^k) = \{0\}$ per ogni $k \geq 0$, cioè $a(T_\lambda) = 0$. D'altra parte, per la Proposizione 2.20 si ha $d(T_\lambda) < \infty$. Possiamo pertanto applicare la Proposizione 2.19 per concludere che $d(T_\lambda) = a(T_\lambda) = 0$. Da ciò segue che $T_\lambda(X) = X$. Di conseguenza, per il Teorema dell'applicazione aperta, T_λ è un isomorfismo topologico da X su X, cioè $\lambda \in \rho(T)$.
Adesso proveremo contemporaneamente che $\sigma_p(T)$ è al più numerabile e ha 0 come unico punto limite, dimostrando che per ogni $\delta > 0$ l'insieme $\{\lambda \in \sigma_p(T) \mid |\lambda| \geq \delta\}$ è di cardinalità finita.
Supponiamo per assurdo che l'insieme $\{\lambda \in \sigma_p(T) \mid |\lambda| \geq \delta\}$ sia di cardinalità infinita per qualche $\delta > 0$. Allora esiste $(\lambda_n)_n \subset \sigma_p(T)$ tale che $\lambda_n \neq \lambda_m$ e $|\lambda_n| \geq \delta$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $x_n \in N(T_{\lambda_n})$ con $\|x_n\| = 1$.
Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ gli elementi $x_1, \ldots, x_n$ sono linearmente indipendenti. Altrimenti, se $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ con $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, allora potremmo sempre supporre che $x_1 = \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$ (eventualmente riordinando gli elementi e supponendo $\alpha_1 \neq 0$) così che

$$\lambda_1 x_1 = T(x_1) = T(\beta_2 x_2 + \ldots \beta_n x_n) = \beta_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \beta_n \lambda_n x_n\,.$$

Ne seguirebbe che

$$\beta_2(\lambda_2 - 1)x_2 + \ldots + \beta_n(\lambda_n - 1)x_n = 0\,.$$

Iterando questo procedimento ed eventualmente riordinando gli elementi, dedurremmo che $x_{n-1} = \gamma x_n$ con $\gamma \neq 0$ così che

$$\lambda_{n-1}x_{n-1} = T(x_{n-1}) = \gamma\lambda_n x_n = \lambda_n x_{n-1}\,,$$

da cui $\lambda_{n-1} = \lambda_n$ poiché $x_{n-1} \neq 0$, e otterremmo una contraddizione.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo $M_n = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Allora M_{n-1} è un

sottospazio chiuso proprio di M_n e quindi, per il Lemma di Riesz, esiste $y_n \in M_n$ tale che $\|y_n\| = 1$ e $d(y_n, M_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$; di conseguenza, $\|y_n - y_{n-1}\| \geq \frac{1}{2}$ per ogni n. Ora osserviamo che, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$, risulta

$$\begin{aligned} \|T(y_n) - T(y_m)\| &= \|T(y_n) + \lambda_n y_n - \lambda_n y_n + T(y_m)\| \\ &= \|\lambda_n y_n - (T_{\lambda_n}(y_n) + T(y_m))\| \,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Poiché $y_n \in M_n$, $y_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ così che $T(y_n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k T(x_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k x_k \in M_n$. Inoltre, $T_{\lambda_n}(y_n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k T_{\lambda_n}(x_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(\lambda_n - \lambda_k)x_k \in M_n$. Per l'uguaglianza (2.22) otteniamo che

$$\|T(y_n) - T(y_m)\| = |\lambda_n| \|y_n - \lambda_n^{-1}(T_{\lambda_n}(y_n) + T(y_m))\| \geq \frac{\delta}{2} \,.$$

Abbiamo così provato che $(T(y_n))_n$ non ammette alcuna sottosuccessione convergente. Questo è in contraddizione con $T \in \mathcal{K}(X)$. □

Osservazione 2.22. Siano X e Y due spazi di Banach di dimensione finita, rispettivamente m ed n. Supponiamo che $\{x_1, \ldots, x_m\}$ sia una base di X, con $\|x_k\|_X = 1$ per ogni $k = 1, \ldots, m$, $\{f_1, \ldots, f_m\}$ sia la base duale di $\{x_1, \ldots, x_m\}$, e che $\{y_1, \ldots, y_n\}$ sia una base di Y. Consideriamo l'operatore lineare $L \colon X \to Y$ così definito

$$L(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x) y_k, \quad x \in X,$$

dove se $m > n$ poniamo $y_j = 0$ per ogni $j = n+1, \ldots, m$. Allora, $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ dato che

$$\|L(x)\|_Y \leq \|x\|_X \cdot \sum_{k=1}^m \|f_k\|'_X \|y_k\|_Y$$

per ogni $x \in X$. Inoltre, se $m \leq n$ allora L è iniettivo, mentre se $m \geq n$ allora L è suriettivo.

Proposizione 2.23. *Sia $T \in \mathcal{K}(X)$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,*

$$\dim N(T_\lambda) = \operatorname{codim} T_\lambda(X) < \infty \,.$$

Dim. Per la Proposizione 2.8, $\dim N(T_\lambda) < \infty$. Questo assicura che esiste una proiezione lineare continua $P \colon X \to X$ tale che $P(X) = N(T_\lambda)$ così che possiamo rappresentare X come segue

$$X = N(T_\lambda) \oplus Y \,, \tag{2.23}$$

dove $Y = \ker P$. D'altra parte, per le Proposizioni 2.9 e 2.10, $T_\lambda(X)$ è un sottospazio chiuso di X di codimensione finita. Pertanto esiste una proiezione lineare continua $Q \colon X \to X$ tale che $Q(X) = T_\lambda(X)$ così che possiamo rappresentare X anche come

$$X = Z \oplus T_\lambda(X) \,, \tag{2.24}$$

dove $Z = \ker Q$ è un sottospazio chiuso di X con $\dim Z = \operatorname{codim} T_\lambda(X)$.
Consideriamo ora un operatore $L\colon N(T_\lambda) \to Z$ definito come nell'Osservazione 2.22. Poichè lo spazio Z è finito dimensionale, l'operatore L è compatto come pure $S = LP$.
Posto $A := T + S$, si ha $A \in \mathcal{K}(X)$ e $A_\lambda = \lambda - (T + S) = T_\lambda - S$. In particolare, per la decomposizione (2.23) $A_\lambda(y) = T_\lambda(y) - S(y) = T_\lambda(y) - L(P(y)) = T_\lambda(y) - L(0) = T_\lambda(y)$ per ogni $y \in Y$, il che implica che $(A_\lambda)_{|Y} = (T_\lambda)_{|Y}\colon Y \to T_\lambda(X)$ è un isomorfismo suriettivo. Inoltre, sempre per la decomposizione (2.23) $A_\lambda(x) = T_\lambda(x) - S(x) = -S(P(x)) = -L(x)$ per ogni $x \in N(T_\lambda)$ così che $(A_\lambda)_{|N(T_\lambda)} = -L\colon N(T_\lambda) \to Z$. Osserviamo anche che $N(A_\lambda) \subset N(L) \cap N(T_\lambda)$. Infatti, se $x \in N(A_\lambda)$ allora $T_\lambda(x) = S(x) = L(P(x)) \in Z \cap T_\lambda(X)$. Applicando la decomposizione (2.24) otteniamo che $T_\lambda(x) = 0 = S(x)$, cioè $x \in N(T_\lambda)$ e $P(x) \in N(L)$. Quindi, $x = P(x) \in N(L) \cap N(T_\lambda)$.
Per l'Osservazione 2.22 possiamo affermare che l'operatore L è iniettivo o suriettivo.
Supponiamo che L sia iniettivo. Allora, anche A_λ è iniettivo dato che $N(A_\lambda) \subset N(L) \cap N(T_\lambda)$. Poiché $A \in \mathcal{K}(X)$, ne segue che $d(A_\lambda) = a(A_\lambda) = 0$, pertanto A_λ è suriettivo. Questo implica che $(A_\lambda)_{|N(T_\lambda)} = -L$ è un isomorfismo da $N(T_\lambda)$ su Z. Quindi, gli spazi $N(T_\lambda)$ e Z hanno la stessa dimensione.
Supponiamo ora che L sia suriettivo. Allora, anche A_λ è suriettivo dato che $A_\lambda(X) = T_\lambda(X)$ e $A_\lambda(N(T_\lambda)) = L(N(T_\lambda)) = Z$. Poiché $A \in \mathcal{K}(X)$, ne segue che $a(A_\lambda) = N(A_\lambda) = \{0\}$, pertanto A_λ è iniettivo. Questo implica che $(A_\lambda)_{|N(T_\lambda)} = -L$ è iniettivo e dunque un isomorfismo da $N(T_\lambda)$ su Z. Quindi, gli spazi $N(T_\lambda)$ e Z hanno la stessa dimensione. □

Corollario 2.24. *Sia $T \in \mathcal{K}(X)$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$,*

$$\operatorname{codim} T^n_\lambda(X) = \dim N((T^n)'_\lambda) = \operatorname{codim} (T^n)'_\lambda(X) = \dim N(T^n_\lambda)\,.$$

Dim. Per $n = 1$, basta osservare che anche l'operatore duale T' è compatto per il Teorema di Schauder e che

$$\left(\frac{X}{T_\lambda(X)}\right)' = N(T'_\lambda)\,.$$

Poichè gli spazi coinvolti hanno dimensione finita, si deduce che:

$$\operatorname{codim} T_\lambda(X) = \dim \frac{X}{T_\lambda(X)} = \dim \left(\frac{X}{T_\lambda(X)}\right)' = \dim N(T'_\lambda)\,.$$

Le altre uguaglianze seguono dalla Proposizione 2.23. Se $n > 1$, osserviamo che $T^n_\lambda = \lambda^n - S$ con $S \in \mathcal{K}(X)$. □

Osservazione 2.25. La proposizione precedente dice che un operatore compatto verifica il principio dell'alternativa di Fredholm, cioè per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, l'equazione $\lambda u - Tu = 0$ ha solo la soluzione banale e, in tal caso, per ogni $f \in X$ l'equazione $\lambda u - Tu = f$ ha un'unica soluzione, oppure l'equazione $\lambda u - Tu = 0$ ha un numero finito di soluzioni linearmente indipendenti.

2.3. Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti

Studieremo ora il comportamento degli operatori compatti autoaggiunti in spazi di Hilbert. In questo paragrafo, sia $(H, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare di H. Iniziamo con un'osservazione importante.

Osservazione 2.26. Se $T \in \mathcal{L}(H)$ è un operatore autoaggiunto e compatto, allora $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ in virtù della Proposizione 2.21 e della Proposizione 1.26. Poichè $r(T) = \max\{\ |\lambda| \ \mid\ \lambda \in \sigma(T)\ \} = \|T\|$ e $\sigma(T) \cap \partial B_{r(T)} \neq \emptyset$, possiamo concludere che $\|T\| \in \sigma_p(T)$ o $-\|T\| \in \sigma_p(T)$.

Teorema 2.27 (Teorema di Rappresentazione Spettrale 1). *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto autoaggiunto. Allora esistono un sottospazio chiuso separabile H_0 di H, un sistema ortonormale completo $(x_n)_n$ in H_0 e una successione reale infinitesima $(\lambda_n)_n$ tali che*

$$Tx = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n & \textit{se } x \in H_0 \\ 0 & \textit{se } x \in H_0^{\perp}\,. \end{cases} \tag{2.25}$$

Dim. Poiché $T \in \mathcal{K}(H)$ ed è autoaggiunto, possiamo applicare la Proposizione 2.21 e l'Osservazione 2.26 per concludere che $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ e $\sigma_p(T) = (\lambda_n)_n$ con $(\lambda_n)_n \in c_0$.

Posto $H_n = N(T_{\lambda_n})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, osserviamo che, per $x \in H_n$ e $y \in H_m$ con $n \neq m$, $\langle x, y \rangle = 0$ poiché

$$\lambda_n \langle x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \lambda_m \langle x, y \rangle\,,$$

e $\lambda_n \neq \lambda_m$. Inoltre, $H_n \neq \{0\}$ e quindi possiamo scegliere $x_n \in H_n$ con $\|x_n\| = 1$. Di conseguenza, la successione $(x_n)_n$ è un sistema ortonormale completo di $H_0 := \overline{\operatorname{span}(x_n)_n}$.

Ora, osserviamo che $T(H_0^{\perp}) \subset H_0^{\perp}$. Infatti, se $x \in H_0^{\perp}$, allora $\langle x_n, Tx \rangle = \langle Tx_n, x \rangle = \langle \lambda_n x_n, x \rangle = \lambda_n \langle x_n, x \rangle = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo implica che $Tx \in H_0^{\perp}$. Pertanto, $T_{|H_0^{\perp}}$ è un operatore compatto autoaggiunto da $H_0^{\perp}$ in $H_0^{\perp}$. Invero, $T_{|H_0^{\perp}} = 0$. Infatti, se $T_{|H_0^{\perp}} \neq 0$, per l'Osservazione 2.26 esiste $x_0 \in H_0^{\perp}$ tale che $Tx = \lambda x$ con $|\lambda| = \|T_{|H_0^{\perp}}\|$. Otteniamo così un assurdo perché tutti gli autovettori di T appartengono a H_0.

Infine, se $x \in H_0$, allora $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$ così che

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle T(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n\,.$$

□

Se H è separabile, il Teorema di Rappresentazione Spettrale 2.27 può essere riformulato come segue.

Teorema 2.28. *Siano H uno spazio di Hilbert separabile su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto autoaggiunto. Allora esistono un sistema ortonormale completo $(x_n)_n$ in H e una successione reale infinitesima $(\lambda_n)_n$ tali che*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n \tag{2.26}$$

per ogni $x \in X$.

Osservazione 2.29. (1) Dall'identità (2.25) segue subito che $\sigma_p(T) = (\lambda_n)_n$ e che $x_n \in N(T_{\lambda_n})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(2) Nel caso in cui H sia separabile, l'operatore T è equivalente ad un operatore diagonale sullo spazio ℓ^2. Infatti, se indichiamo con U la seguente applicazione

$$U \colon H \to \ell^2, \quad x \mapsto (\langle x, x_n \rangle)_n ,$$

allora $T = U^{-1}MU$, dove M è l'operatore diagonale su ℓ^2 così definito $M(\xi) = (\lambda_n \xi_n)_n$ per ogni $\xi = (\xi_n)_n \in \ell^2$.

Teorema 2.30 (Teorema di Rappresentazione Spettrale 2). *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto. Allora esistono un sottospazio chiuso separabile H_0 di H, un sistema ortonormale completo $(x_n)_n$ in H_0, un sistema ortonormale $(y_n)_n$ in H e una successione reale infinitesima $(\lambda_n)_n$ tali che*

$$Tx = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n & \textit{se } x \in H_0 \\ 0 & \textit{se } x \in H_0^{\perp} . \end{cases} \tag{2.27}$$

Dim. Osserviamo che l'operatore T^*T è compatto e autoaggiunto. Pertanto, per il Teorema di Rappresentazione Spettrale 2.27 esistono un sottospazio chiuso separabile H_0 di H, un sistema ortonormale completo $(x_n)_n$ in H_0 e una successione infinitesima $(\mu_n)_n \in c_0$ tali che

$$T^*Tx = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, x_n \rangle x_n & \text{se } x \in H_0 \\ 0 & \text{se } x \in H_0^{\perp} , \end{cases} \tag{2.28}$$

dove $\sigma_p(T^*T) = (\mu_n)_n$ e $x_n \in N((T^*T)_{\mu_n})$.
Ne segue che $T_{|H_0^{\perp}} = 0$. Infatti, applicando l'identità (2.28), otteniamo che, per ogni $x \in H_0^{\perp}$, $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$, cioè $Tx = 0$. Osserviamo ora che, se $x \in N((T^*T)_{\mu_n})$, allora

$$\mu_n \|x\|^2 = \langle \mu_n x, x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = \|Tx\|^2 ,$$

da cui $\mu_n \geq 0$. Possiamo così definire $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}$. Ovviamente, $(\lambda_n)_n \in c_0$. Se $x \in H_0$, allora $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$ e quindi

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle Tx_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n$$

avendo posto $y_n = \lambda_n^{-1} T x_n$ se $\lambda_n \neq 0$ e $y_n = 0$ se $\lambda_n = 0$. Per concludere, rimane da provare che $(y_n)_n$ è un sistema ortonormale. Per questo basta osservare che, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\langle y_n, y_m \rangle &= \lambda_n^{-1} \lambda_m^{-1} \langle T x_n, T x_m \rangle = \lambda_n^{-1} \lambda_m^{-1} \langle T^* T x_n, x_m \rangle \\ &= \mu_n \lambda_n^{-1} \lambda_m^{-1} \langle x_n, x_m \rangle = \lambda_n \lambda_m^{-1} \langle x_n, x_m \rangle = \delta_{nm} \,.\end{aligned}$$

□

CAPITOLO 3

Teorema di rappresentazione spettrale per operatori limitati

3.1. Teorema di rappresentazione spettrale per operatori limitati e autoaggiunti

Per dimostrare il Teorema di Rappresentazione Spettrale nel caso degli operatori limitati e autoaggiunti è necessario introdurre un opportuno calcolo funzionale ai fini di definire cosa si debba intendere per $f(T)$ se $T \in \mathcal{L}$ ed f è una funzione.

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ è un polinomio a coefficienti complessi, allora è naturale definire $f(T) := \sum_{n=0}^{N} a_n T^n$.

Lemma 3.1 (Teorema dell'applicazione spettrale). *Siano* $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio di Banach su* $\mathbb{C}$*,* $T \in \mathcal{L}(X)$ *e* $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ *un polinomio a coefficienti complessi. Allora*

$$\sigma(P(T)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\} = P(\sigma(T)) . \tag{3.29}$$

Dim. Sia $\lambda \in \sigma(T)$. Allora λ è una radice del polinomio $P(x)-P(\lambda)$ e quindi, per il Teorema fondamentale dell'Algebra, $P(x) - P(\lambda) = (x - \lambda)Q(x) = Q(x)(x-\lambda)$ o, equivalentemente, $P(\lambda)-P(x) = (\lambda-x)Q(x) = Q(x)(\lambda-x)$, con Q un opportuno polinomio. Passando agli operatori, otteniamo $P(\lambda) - P(T) = (\lambda - T)Q(T) = Q(T)(\lambda - T)$. Siccome $\lambda - T$ non è invertibile, non può esserlo neppure $P(\lambda) - P(T)$, cioè $P(\lambda) \in \sigma(P(T))$.
Viceversa, sia $\mu \in \sigma(P(T))$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le radici del polinomio $P(x) - \mu$. Allora possiamo scrivere $P(x) - \mu = a(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$. Ora, se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \notin \sigma(T)$, allora

$$(P(T) - \mu)^{-1} = a^{-1}(T - \lambda_n)^{-1} \dots (T - \lambda_1)^{-1},$$

il che contraddice l'ipotesi che $\mu \in \sigma(P(T))$. Pertanto, $\lambda_i \in \sigma(T)$ per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$, cioè $\mu = P(\lambda_i)$ e quindi $\mu \in P(\sigma(T))$. $\square$

Nel seguito, H indicherà sempre uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma $\| \cdot \|$.

Lemma 3.2. *Siano $T \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunto e $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ un polinomio a coefficienti complessi. Allora*

$$\|P(T)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)| .$$

Dim. Poichè T è autoaggiunto, l'operatore $P(T)$ è normale. Pertanto, per la Proposizione 1.24, $\|P(T)\| = r(P(T))$ e dal Lemma 3.1 segue che

$$\begin{aligned} \|P(T)\| &= r(P(T)) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(P(T))\} \\ &= \sup\{|P(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(T)\} \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)| . \qquad \square \end{aligned}$$

Il lemma appena provato consente di estendere il calcolo funzionale dai polinomi allo spazio $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ delle funzioni continue sullo spettro di T a valori complessi. Ricordiamo che un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ si dice positivo se $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in H$.

Teorema 3.3. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Allora esiste una e una sola applicazione lineare*

$$\Phi \colon C(\sigma(T), \mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$$

con le seguenti proprietà: per ogni $f,\ g \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

(1) $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$, $\Phi(\lambda f) = \lambda \Phi(f)$,
(2) $\Phi(1) = I$, $\Phi(\underline{f}) = \Phi(f)^*$,
(3) $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$,
(4) *se $f = id_{\sigma(T)}$, allora $\Phi(f) = T$,*
(5) $\sigma(\Phi(f)) = \{f(\lambda);\ \lambda \in \sigma(T)\}$,
(6) *se $f \geq 0$, allora $\Phi(T) \geq 0$.*
(7) *se $B \in \mathcal{L}(H)$ commuta con T, allora B commuta con $\Phi(f)$.*

Dim. Per ogni polinomio P, definiamo $\Phi(P) := P(T)$. Per il Lemma 3.1 sappiamo che $\|P(T)\| = \|P\|_{C(\sigma(T),\mathbb{C})}$ e quindi Φ è una applicazione lineare isometrica dallo spazio dei polinomi $(\mathcal{P}_{|\sigma(T)}, \| \cdot \|_\infty)$ in $(\mathcal{L}(H), \| \cdot \|)$. Allora Φ si estende in modo unico ad una applicazione lineare e continua $\tilde{\Phi}$ dal completamento di $(\mathcal{P}_{|\sigma(T)}, \| \cdot \|_\infty)$ a valori in $(\mathcal{L}(H), \| \cdot \|)$. Per il teorema di approssimazione di Weierstrass (vedi Teorema B.13, ricordando che $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, il completamento di $(\mathcal{P}_{|\sigma(T)}, \|\cdot\|_\infty)$ è proprio lo spazio $(C(\sigma(T), \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$. Se, per semplicità di notazione, indichiamo tale estensione ancora con Φ, abbiamo così definito una applicazione lineare $\Phi\colon C(\sigma(T),\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$ tale che, per ogni $f \in C(\sigma(T),\mathbb{C})$,

$$\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty \,.$$

Le proprietà (1), (2) e (3) sono chiaramente soddisfatte se f e g sono polinomi e quindi si estendono facilmente al caso in cui f e g sono funzioni continue su $C(\sigma(T),\mathbb{C})$ con un argomento di densità.
Dimostriamo il punto (5) che generalizza il Lemma 3.2. Sia $\mu \in f(\sigma(T))$. Allora $\mu = f(\lambda)$ per qualche $\lambda \in \sigma(T)$, e la seguente uguaglianza è soddisfatta

$$\mu - \Phi(f) = \Phi(f(\lambda)) - \Phi(f) = \Phi(f(\lambda) - f)\,.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo una funzione $g_\varepsilon \in C(\sigma(T),\mathbb{C})$ tale che $g_\varepsilon(\lambda) = 1$, $\|g_\varepsilon\|_\infty = 1$ e

$$|[f(\eta) - f(\lambda)]g_\varepsilon(\eta)| < \varepsilon$$

per ogni $\eta \in \sigma(T)$. Dato che $\|\Phi(g_\varepsilon)\| = \|g_\varepsilon\|_\infty = 1$, esiste $x_\varepsilon \in H$ tale che $\|\Phi(g_\varepsilon)(x_\varepsilon)\| \geq 1/2$. Posto $y_\varepsilon = \Phi(g_\varepsilon)(x_\varepsilon)$, ne segue che $\|y_\varepsilon\| \geq 1/2$ e

$$\|[\Phi(f(\lambda)) - \Phi(f)](y_\varepsilon)\| = \|[\Phi(f(\lambda)) - \Phi(f)](\Phi(g_\varepsilon)(x_\varepsilon))\| < \varepsilon\,.$$

Questo significa che $f(\lambda) - \Phi(f)$ non è invertibile con continuità così che $f(\lambda) \in \sigma(\Phi(T))$. Viceversa, sia $\mu \notin f(\sigma(T))$. Allora la funzione $h(x) := (\mu - f(x))^{-1}$ è continua su $\sigma(T)$ e per le proprietà (1) e (2) risulta

$$\begin{aligned}
(\mu - \Phi(f))\Phi(h) &= \Phi(\mu - f)\Phi(h) = \Phi(h)\Phi(\mu - f)\\
&= \Phi(h)(\mu - \Phi(f))\\
&= \Phi(h(\mu - f)) = \Phi(1) = I\,,
\end{aligned}$$

cioè $\mu \notin \sigma(\Phi(T))$.
Per provare la proprietà (6), osserviamo che se $f \geq 0$ su $\sigma(T)$, allora $f = g^2$ per qualche funzione $g \in C(\sigma(T),\mathbb{C})$ a valori reali. Per le proprietà (1) e (2), ne segue che $\Phi(f) = \Phi(g^2) = \Phi(g)^2$ con $\Phi(g)$ operatore autoaggiunto. Pertanto, per ogni $x \in H$,

$$\langle \Phi(f)(x), x\rangle = \langle \Phi(g)^2(x), x\rangle = \langle \Phi(g)(x), \Phi(g)(x)\rangle = \|\Phi(g)(x)\|^2 \geq 0\,,$$

cioè $\Phi(f) \geq 0$.
Infine, se B commuta con T, allora chiaramente B commuta con $P(T)$ per ogni polinomio P. Per densità segue che B commuta con $\Phi(f)$.
Rimane da provare l'unicità di Φ. Per questo basta osservare che se dovesse esistere un'applicazione lineare $\Psi\colon C(\sigma(T),\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$ con le proprietà (1), (2), (3) e (4), allora $\Psi(f) = \Phi(f)$ per ogni polinomio f, e dunque $\Psi \equiv \Phi$ per densità. □

Nel seguito scriveremo $f(T)$ al posto di $\Phi(f)$ per mettere in evidenza la dipendenza da T e per semplicità di notazione.

Ricordiamo ora l'enunciato del Teorema di rappresentazione di Riesz, che sarà l'altro ingrediente essenziale per la dimostrazione del teorema di rappresentazione spettrale. Per maggiori dettagli e per la dimostrazione facciamo riferimento al libro [**14**], cap.2.

Teorema 3.4 (Teorema di rappresentazione di Riesz). *Sia K uno spazio topologico compatto di Hausdorff e sia Λ un funzionale positivo lineare su $C(K,\mathbb{C})$. Allora esiste ed è unica una misura di Borel regolare finita positiva μ tale che*

$$\Lambda f = \int_K f d\mu,$$

per ogni $f \in C(K,\mathbb{C})$.

Proposizione 3.5. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto e sia $\psi \in H$. Allora esiste un'unica misura positiva μ_ψ sul compatto $\sigma(T)$ tale che, per ogni $f \in C(\sigma(T),\mathbb{C})$,*

$$\langle f(T)(\psi), \psi\rangle = \int_{\sigma(T)} f d\mu_\psi \,.$$

Tale misura μ_ψ è detta misura spettrale *associata a ψ.*

Dim. Consideriamo il funzionale L su $C(\sigma(T),\mathbb{C})$ così definito

$$C(\sigma(T),\mathbb{C}) \ni f \mapsto L(f) := \langle f(T)(\psi), \psi\rangle \,.$$

Tale funzionale è lineare e continuo dato che, per ogni $f \in C(\sigma(T),\mathbb{C})$,

$$|L(f)| = |\langle f(T)(\psi), \psi\rangle| \le \|f(T)(\psi)\|\|\psi\| \le \|f\|_\infty \|\psi\|^2 \,.$$

Inoltre, L è anche un funzionale positivo. Infatti, se $f \in C(\sigma(T),\mathbb{C})$ è positiva, allora per il Teorema 3.3–(6) $f(T) \ge 0$, cioè $\langle f(T)(x), x\rangle \ge 0$ per ogni $x \in H$ e quindi anche per $x = \psi$.
Per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste un'unica misura positiva μ_ψ sul compatto $\sigma(T)$ tale che, per ogni $f \in C(\sigma(T),\mathbb{C})$,

$$L(f) = \langle f(T)(\psi), \psi\rangle = \int_{\sigma(T)} f d\mu_\psi \,. \quad \square$$

Osservazione 3.6. L'introduzione di questa misura permette di estendere il calcolo funzionale anche alla classe delle funzioni boreliane e limitate su $\sigma(T)$. Infatti, se g è una funzione boreliana e limitata su $\sigma(T)$, si può definire $g(T)$ nel seguente modo. Per ogni $\psi \in H$, poniamo

$$\langle g(T)(\psi), \psi\rangle := \int_{\sigma(T)} g d\mu_\psi \,.$$

L'identita di polarizzazione (1.13) consente poi di definire $\langle g(T)(\phi), \psi\rangle$ per ogni $\phi, \psi \in H$. Infine, il teorema di Riesz—Fréchet permette di costruire

$g(T)$. Infatti, per un fissato $\phi \in H$, $\langle g(T)(\phi), \cdot\rangle$ è un funzionale antilineare e continuo su H così che esiste ed è unico $\xi \in H$ tale che, per ogni $\psi \in H$,

$$\langle g(T)(\phi), \psi\rangle = \langle \xi, \psi\rangle \, .$$

Questo implica che $g(T)(\phi) = \xi$. Il calcolo funzionale appena definito continua a soddisfare le stesse proprietà enunciate nel Teorema 3.3.

Definizione 3.7. Sia $T \in \mathcal{L}(H)$. Un vettore $\psi \in H$ è detto *vettore ciclico* per T se $\overline{\text{span}}\{T^n(\psi);\ n \in \mathbb{N}\} = H$.

Lemma 3.8. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Se esiste un vettore ciclico ψ per T, allora esiste un operatore unitario $U\colon H \to L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$ tale che*

$$(UTU^{-1})(f)(\lambda) = \lambda f(\lambda) \quad \mu_\psi - q.o.$$

per ogni $f \in L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$.

Dim. Per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$ poniamo

$$U\Phi(f)(\psi) := f \, ,$$

dove Φ è l'applicazione costruita nel Teorema 3.3. Allora U è ben definito sullo spazio $\{\Phi(f)(\psi);\ f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})\}$. Infatti, se $f, g \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$ sono due funzioni per cui $\Phi(f)(\psi) = \Phi(g)(\psi)$, ne segue che

$$\begin{aligned} \Phi(f)T^n(\psi) &= \Phi(f)\Phi(x^n)(\psi) = \Phi(x^n)\Phi(f)(\psi) \\ &= \Phi(x^n)\Phi(g)(\psi) = \Phi(g)T^n(\psi) \, , \end{aligned}$$

cioè $\Phi(f) = \Phi(g)$ su un sottospazio denso di H. Per la continuità di $\Phi(f)$ e di $\Phi(g)$ deduciamo che $\Phi(f) = \Phi(g)$ su tutto H. Di conseguenza, si ha

$$0 = \|\Phi(f - g)\| = \|f - g\|_\infty \, ,$$

cioè $f \equiv g$. Inoltre, per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(f)(\psi)\|^2 &= \langle \psi, \Phi(f)^*\Phi(f)(\psi)\rangle = \langle \psi, \Phi(\overline{f}f)(\psi)\rangle \\ &= \langle \Phi(\overline{f}f)(\psi), \psi\rangle = \int_{\sigma(T)} |f|^2 d\mu_\psi \, . \end{aligned}$$

Questo significa che U è una isometria da $(\{\Phi(f)(\psi);\ f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})\}, \|\cdot\|)$ in $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$.
Dato che lo spazio $\{\Phi(f)(\psi);\ f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})\}$ è denso in H, possiamo estendere U ad una isometria da H in $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$. D'altro canto, il fatto che $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ è un sottospazio denso di $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$ assicura che U è anche suriettivo. A questo punto, osserviamo che

$$(UTU^{-1})(f)(\lambda) = (UT\Phi(f)(\psi))(\lambda) = (U\Phi(xf)(\psi))(\lambda) = \lambda f(\lambda)$$

per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$. Questa identità continua a valere per ogni $f \in L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$ dato che $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ è un sottospazio denso di $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$.
□

Per estendere questo risultato ad un operatore limitato autoaggiunto qualsiasi, è necessario il seguente lemma.

Lemma 3.9. *Siano H uno spazio di Hilbert separabile su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Allora esiste una famiglia di sottospazi $\{H_n\}_{n\in J}$, con $J \subseteq N$ finito o infinito, tali che*

(1) $H = \oplus_{n\in J} H_n$,
(2) *se* $\psi \in H_n$, *allora* $T(\psi) \in H_n$,
(3) *per ogni* $n \in J$ $T_{|H_n}$ *ammette un vettore ciclico* $\phi_n \in H_n$.

Dim. Sia $\{e_n\}_n$ un sistema ortonormale completo di H. Poniamo $\phi_1 := e_1$ e $H_1 := \overline{\text{span}}\{\phi_1, T(\phi_1), T^2(\phi_1), \ldots,\}$. Allora H_1 è invariante rispetto a T e ϕ_1 è un vettore ciclico per $T_{|H_1}$.
Se $e_n \in H$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $H_1 = H$. In tal caso, la dimostrazione è conclusa. Altrimenti, sia n_1 il primo indice per cui $e_{n_1} \notin H_1$; questo significa che $e_n \in H_1$ per ogni $n < n_1$. Indichiamo con $P_{H_1^\perp}$ la proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso $H_1^\perp$ e poniamo $\phi_2 := P_{H_1^\perp}(e_{n_1})$. Osserviamo che $\phi_2 \neq 0$ dato che $e_{n_1} \notin H_1$. Inoltre, poiché T è autoaggiunto e T trasforma H_1 in sé, T trasforma anche $H_1^\perp$ in sé. Infatti, fissato $h \in H_1^\perp$, risulta che $\langle T(h), k\rangle = \langle h, T(k)\rangle = 0$ per ogni $k \in H_1$, e ciò implica che $T(h) \in H_1^\perp$. Posto $H_1 := \overline{\text{span}}\{\phi_2, T(\phi_2), T^2(\phi_2), \ldots,\}$, ne segue che $H_2 \subset H_1^\perp$. In particolare, H_2 è invariante rispetto a T e ϕ_2 è un vettore ciclico di $T_{|H_2}$.
Se $H = H_1 \oplus H_2$, allora la dimostrazione è conclusa. Altrimenti, sia n_2 il primo indice per cui $e_{n_2} \notin H_1 \oplus H_2$. Indicato con $P_{(H_1\oplus H_2)^\perp}$ la proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso $(H_1 \oplus H_2)^\perp$, poniamo $\phi_3 := P_{(H_1\oplus H_2)^\perp}(e_{n_2})$ e procediamo come prima.
Dopo un numero finito di N passi, potremmo ottenere che $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots H_N$, dove per ogni $i = 1, \ldots, N$ H_i è invariante rispetto a T e $T_{|H_i}$ ammette un vettore ciclico. Altrimenti, avremo una famiglia di sottospazi chiusi $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ mutuamente ortogonali e T–invarianti tale che ogni $T_{|H_i}$ ammette un vettore ciclico ϕ_i. In ogni caso, per costruzione, $e_n \in H_1$ per ogni $n < n_1$, $e_n \in H_1 \oplus H_2$ per ogni $n \leq n < n_2$, e così via. Questo assicura che $\{e_n\}_n \subset \oplus_{i\in\mathbb{N}} H_i$ da cui segue $H = \oplus_{i\in\mathbb{N}} H_i$. □

Grazie ai lemmi precedenti, possiamo ora dimostrare il seguente risultato.

Teorema 3.10. *Siano H uno spazio di Hilbert separabile su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Allora esistono una famiglia di misure $\{\mu_n\}_{n\in J}$, con $J \subseteq \mathbb{N}$ finito o infinito, su $\sigma(T)$ e un operatore unitario*

$$U : H \to \oplus_{n\in J} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$$

tale che

$$(UTU^{-1}(\psi))_n(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda) \quad \mu_n - q.o.$$

per ogni $\psi = (\psi_n)_{n\in J} \in \oplus_{n\in J} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$ *e per ogni* $n \in J$.

Dim. Il risultato segue applicando prima il Lemma 3.9 per trovare la decomposizione e poi il Lemma 3.8 su ogni componente. Si ottiene così che l'n–esima misura μ_n non è altro che la misura spettrale associata all'n–esimo vettore ciclico. □

A questo punto possiamo dimostrare il teorema spettrale nella sua formulazione classica.

Teorema 3.11 (Teorema spettrale per operatori limitati e autoaggiunti). *Siano H uno spazio di Hilbert separabile su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto. Allora esistono una spazio di misura finita (M, μ), una funzione limitata e misurabile $m\colon M \to \mathbb{R}$ e un operatore unitario $U\colon H \to L^2(M, d\mu)$ tali che*

$$(UTU^{-1}(f))(\lambda) = m(\lambda)f(\lambda) \quad \mu - q.o.$$

per ogni $f \in L^2(M, d\mu)$.

Dim. Per il Lemma 3.9 possiamo scrivere $H = \oplus_{n\in J} H_n$ con $J \subseteq \mathbb{N}$ finito o infinito, dove $\{H_n\}_{n\in J}$ è una famiglia di sottospazi chiusi di H mutuamente ortogonali tali che H_n è T–invariante e $T_{|H_n}$ ammette un vettore ciclico ϕ_n per ogni $n \in J$. Possiamo sempre supporre che $\|\phi_n\| = 2^{-n}$. Indichiamo ora con μ_n la misura spettrale su $\sigma(T)$ associata a ϕ_n. In verità, μ_n è una misura su $\sigma(T_{|H_n})$, ma possiamo estenderla su tutto $\sigma(T)$ ponendo $\mu_n \equiv 0$ su $\sigma(T) \setminus \sigma(T_{|H_n})$. D'altro canto, per il Lemma 3.8, per ogni $n \in J$, esiste un operatore unitario $U_n\colon H_n \to L^2(\sigma(T), \mu_n)$ tale che

$$(U_n T U_n^{-1}(\psi_n))(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda) \quad \mu_n - \text{q.o.}$$

per ogni $\psi_n \in L^2(\sigma(T), \mu_n)$.
Posto $M := J \times \sigma(T)$, diciamo che $E \subset M$ è μ–misurabile se, per ogni n, $E_n = \{\lambda \in \sigma(T);\ (n, \lambda) \in E\}$ è μ_n–misurabile. In tal caso, definiamo $\mu(E) := \sum_{n\in J} \mu_n(E_n)$. Osserviamo che $\mu(M) = \sum_{n\in J} \mu_n(\sigma(T)) = \sum_{n\in J} \|\phi_n\|^2 = \sum_{n\in J} 2^{-n} < \infty$. Questo implica che la misura μ appena costruita è finita. Inoltre, se $f \in L^2(\sigma(T), \mu)$ allora

$$\int_M |f|^2 d\mu = \sum_{n\in J} \int_{\sigma(T)} |f(n, \lambda)|^2 d\mu_n(\lambda)\,.$$

Ora, consideriamo l'operatore

$$U\colon H = \oplus_{n\in J} H_n \to L^2(M, d\mu)$$

così definito

$$g = \sum_{n\in J} g_n \mapsto U(g)(n, \lambda) := U_n(g_n)(\lambda)\,.$$

Allora U è unitario e risulta

$$(UTU^{-1}(f))(n, \lambda) = \lambda f(n, \lambda)$$

per ogni $f \in L^2(\sigma(T), d\mu)$, cioè $m(n, \lambda) = \lambda$. □

Esempio 3.12. Sia $H = \ell^2(\mathbb{Z})$ lo spazio di Hilbert di tutte le successioni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a valori complessi tali che $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty$. Indichiamo con $L\colon H \to H$ l'operatore di traslazione a sinistra, definito da $(L(x))_n := x_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e con $R\colon H \to H$ l'operatore di traslazione a destra, definito da $(R(x))_n := x_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ (l'operatore R è stato considerato nell'Esempio 1.29-(1)). E' facile verificare che $L^* = R$ e $R^* = L$ così che l'operatore $T := L + R$ è autoaggiunto.
Ora, definiamo un operatore $U\colon H \to L^2[0,1]$ ponendo

$$U(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{2\pi i n x}, \qquad x \in \ell^2(\mathbb{Z})\,.$$

La successione di funzioni $\{e^{2\pi i n x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ costituisce un sistema ortonormale completo di $L^2[0,1]$. Questo implica la suriettività di U e il fatto che U conserva la norma. Di conseguenza, U è un operatore unitario.
Infine, osserviamo che ULU^{-1} e URU^{-1} sono gli operatori di moltiplicazione per le funzioni $e^{-2\pi i x}$ e $e^{2\pi i x}$ rispettivamente. Ne segue che UTU^{-1} è l'operatore di moltiplicazione per la funzione $2\cos(2\pi x)$. $\square$

3.2. Teorema di rappresentazione spettrale per operatori limitati normali

Per ottenere il teorema di rappresentazione spettrale per operatori normali, è necessario definire il calcolo funzionale non solo per funzioni di variabile reale, ma più in generale di variabile complessa, poiché lo spettro di un operatore normale non è in generale costituito solo da numeri reali. Osserviamo che i polinomi non sono densi nello spazio delle funzioni complesse continue, definite su un compatto di $\mathbb{C}$. Quindi, per applicare il teorema di Stone-Weierstrass nella formulazione complessa, si rende necessario considerare non solo i polinomi ma anche i loro coniugati per ottenere un insieme denso. Anche in questo paragrafo H sarà uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ con prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e norma , $\|\cdot\|$.

Definizione 3.13. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ e sia $P(x,y) = \sum a_{nm}x^n y^m$ un polinomio in due variabili a coefficienti complessi. Allora*

$$P(T,T^*) := \sum a_{nm}T^n(T^*)^m.$$

Per proseguire nella costruzione del calcolo funzionale, un passo fondamentale è stabilire che se T è un operatore normale, allora

$$||P(T,T^*)|| = \sup\{|P(\lambda,\overline{\lambda})| \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$

A tal fine dimostriamo il seguente lemma.

Lemma 3.14. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale tale che $0 \in \sigma(T)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottospazio chiuso $M \neq \{0\}$ di H con le seguenti proprietà.*

(1) *Per ogni operatore $B \in \mathcal{L}(H)$ che commuta con TT^*, M è invariante per B e B^*.*
(2) *$T_{|M} \in \mathcal{L}(M)$ e $||T_{|M}|| \leq \varepsilon$.*

Dim. Poniamo $A := TT^*$. Poiché $0 \in \sigma(T)$, possiamo applicare la Proposizione 1.17 per concludere che esiste una successione $(x_n)_n \subset H$, con $||x_n|| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, tale che $Tx_n \to 0$. Questo implica che $Ax_n \to 0$ e che $0 \in \sigma(A)$. Fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo ora la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ 2(1 - |t/\varepsilon|) & \frac{\varepsilon}{2} \leq |t| \leq \varepsilon, \\ 0 & |t| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Tale funzione f è chiaramente continua su tutto $\mathbb{R}$ e $\sup_{t\in\mathbb{R}} |tf(t)| \leq \varepsilon$. Poiché A è autoaggiunto, possiamo così definire l'operatore $f(A)$.
Sia $M := \{x \mid f(A)x = x\}$. Allora M è chiaramente un sottospazio chiuso di H. Inoltre, se $B \in \mathcal{L}(H)$ è un operatore che commuta con A, allora B commuta anche con $f(A)$ per il Teorema 3.3. Pertanto, per ogni $x \in M$,

$$Bx = Bf(A)x = f(A)Bx,$$

cioè $Bx \in M$. Questo significa che M è invariante per B. D'altro canto,

$$B^*A = B^*TT^* = T(B^*T)^* = TT^*B,$$

da cui segue che B^* commuta con A e quindi M è invariante anche per B^*. Abbiamo così provato la proprietà (1).
Osserviamo che, per ogni $x \in M$ con $||x|| = 1$, si ha

$$||Ax|| = ||Af(A)x|| \leq ||Af(A)|| = \sup\{|\lambda f(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(A)\} \leq \varepsilon.$$

Da questo deduciamo che $||Tx||^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle Ax, x\rangle \leq \varepsilon$ per ogni $x \in M$ con $||x|| = 1$. Pertanto, $||T_{|M}|| \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Abbiamo così provato anche la proprietà (2).
Rimane da provare che $M \neq \{0\}$. A tal fine, osserviamo che

$$||(I - f(A))f(2A)|| = \sup\{|(1 - f(\lambda))f(2\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(A)\} = 0,$$

perché se $f(2\lambda) \neq 0$, allora $f(\lambda) = 1$. Quindi, $\mathrm{Rg}f(2A) \subseteq M$ e $\mathrm{Rg}f(2A) \neq \{0\}$ poiché

$$||f(2A)|| = \sup\{|f(2\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(A)\} \geq |f(0)| = 1. \qquad \square$$

Lemma 3.15 (Teorema dell'applicazione spettrale per operatori normali). *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale e $P(x, y) = \sum a_{n,m}x^n y^m$ un polinomio in due variabili a coefficienti complessi. Allora*

$$\sigma(P(T, T^*)) = \{P(\lambda, \overline{\lambda}) \mid \lambda \in \sigma(T)\}. \tag{3.30}$$

Dim. Sia $\lambda \in \sigma(T)$. Allora, esiste una successione $(x_j)_j$ in H, con $||x_j|| = 1$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, tale che $(\lambda - T)x_j \to 0$ (cfr. Proposizione 1.25). Dato che T è normale, possiamo applicare il Lemma 1.24 per concludere che $||(\overline{\lambda} - T^*)x_j|| = ||(\lambda - T)x_j||$ e quindi anche $||(\overline{\lambda} - T^*)x_j|| \to 0$. Poiché vale la seguente uguaglianza

$$\begin{aligned}
(P(T,T^*) - P(\lambda,\overline{\lambda}))x_j &= \sum_{n,m} a_{nm}(T^nT^{*m} - \lambda^n\overline{\lambda}^m)x_j \\
&= \sum_{n,m} a_{nm}(T^n(T^{*m} - \overline{\lambda}^m)x_j + \overline{\lambda}^m(T^n - \lambda^n)x_j) \\
&= \sum_{n,m} a_{nm}[T^n(T^{*(m-1)} + \cdots + \overline{\lambda}^{m-1})(T^* - \overline{\lambda})x_j \\
&\quad + \overline{\lambda}^m(T^{n-1} + \cdots + \lambda^{n-1})(T - \lambda)x_j],
\end{aligned}$$

concludiamo che $(P(T,T^*) - P(\lambda,\overline{\lambda}))x_j \to 0$. Quindi $P(\lambda,\overline{\lambda}) \in \sigma(P(T,T^*))$.
Sia ora $\mu \in \sigma(P(T,T^*))$. Allora l'operatore $B := P(T,T^*) - \mu I$ è normale e $0 \in \sigma(B)$. Possiamo così applicare il Lemma 3.14 per concludere che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un sottospazio chiuso $M_n \neq \{0\}$ invariante per B e B^*, con $||B_{|M_n}|| \leq 1/n$ e che M_n è invariante anche per T e T^* poiché T commuta con BB^*. Dunque l'operatore restrizione $T_{|M_n}$ è chiaramente normale. In virtù della Proposizione 1.14, $\sigma(T_{|M_n}) \neq \emptyset$.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\lambda_n \in \sigma(T_{|M_n})$. Allora esiste $y_n \in M_n$ con $||y_n|| = 1$ tale che $||(\lambda_n - T)y_n|| \leq 1/n$ per la Proposizione 1.25. La successione $(\lambda_n)_n$ è limitata da $||T||$. Pertanto, esiste una sua sottosuccessione, che per semplicità indichiamo ancora con $(\lambda_n)_n$, che converge a un certo λ. Ora $\lambda \in \sigma(T)$ poiché, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$||(\lambda - T)y_n|| \leq |\lambda - \lambda_n| + ||(\lambda_n - T)y_n|| \leq |\lambda - \lambda_n| + \frac{1}{n},$$

il che implica che $(\lambda - T)y_n \to 0$. Procedendo come nella prima parte della dimostrazione, si prova che $(P(T,T^*) - P(\lambda,\overline{\lambda}))y_n \to 0$. D'altro canto, $y_n \in M_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ così che

$$||(P(T,T^*) - \mu)y_n|| = ||By_n|| \leq ||B_{|M_n}|| \cdot ||y_n|| \leq \frac{1}{n}.$$

Ne segue che $(P(T,T^*) - \mu)y_n \to 0$, per cui $\mu = P(\lambda,\overline{\lambda})$. □

Teorema 3.16. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale. Allora esiste una e una sola applicazione lineare*

$$\Phi \colon C(\sigma(T),\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$$

con le seguenti proprietà: per ogni $f,\ g \in C(\sigma(T),\mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

(1) $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g),\ \ \Phi(\lambda f) = \lambda\Phi(f)$,
(2) $\Phi(1) = I,\ \Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$,
(3) $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$,

(4) *se* $f = id_{\sigma(T)}$*, allora* $\Phi(f) = T$*,*
(5) $\sigma(\Phi(f)) = \{f(\lambda);\ \lambda \in \sigma(T)\}$*,*
(6) *se* $S \in \mathcal{L}(H)$ *commuta con* T *e* T^**, allora* S *commuta con* $\Phi(f)$ *per ogni* $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$*.*

Dim. Per ogni polinomio $P(x, y) = \sum_{n,m} a_{n,m} x^n y^m$, definiamo $\Phi(P) = P(T, T^*)$. Per il Lemma 3.15, $\|\Phi(P)\| = \sup\{P(\lambda, \overline{\lambda}) \mid \lambda \in \sigma(T)\}$, quindi Φ è una applicazione lineare isometrica dallo spazio $\mathcal{A}$ delle funzioni del tipo $P(\lambda, \overline{\lambda})$, con $\lambda \in \sigma(T)$, in $(\mathcal{L}(H), \| \cdot \|)$. Allora Φ si estende in modo unico ad una applicazione lineare e continua $\tilde{\Phi}$ dal completamento di $\mathcal{A}$ in $(C(\sigma(T), \mathbb{C})|| \cdot ||_\infty)$ a valori in $(\mathcal{L}(H), \| \cdot \|)$. D'altro canto, il completamento di $\mathcal{A}$ è proprio lo spazio $(C(\sigma(T), \mathbb{C}), \| \cdot \|_\infty)$, per il teorema di Stone-Weierstrass B.12,
Se, per semplicità di notazione, indichiamo l'estensione $\tilde{\Phi}$ ancora con Φ, abbiamo così definito una applicazione lineare $\Phi\colon C(\sigma(T), \mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$ tale che, per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$,

$$\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty \,.$$

Le proprietà (1), (2) e (3) sono chiaramente soddisfatte se f e g sono funzioni in $\mathcal{A}$ e quindi si estendono facilmente al caso in cui f e g sono funzioni continue su $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ con un argomento di densità. La proprietà (4) segue dalla definizione.
Proviamo la proprietà (5). Sia $\mu \in \sigma(T)$. Sia $(p_n)_n$ una successione di polinomi in due variabili tali che $p_n(\lambda, \overline{\lambda}) \to f(\lambda)$ uniformly on $\sigma(T)$. Allora la successione $(p_n(\mu, \overline{\mu})I - p_n(T, T^*))_n$ converge a $f(\mu)I - \Phi(f)$ in $(\mathcal{L}(H), \| \cdot \|)$. D'altro canto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $p_n(\mu, \overline{\mu}) \in \sigma(p_n(T, T^*))$ così che $p_n(\mu, \overline{\mu})I - p_n(T, T^*)$ non è invertibile. Questo implica che $f(\mu)I - f(T)$ non è invertibile (altrimenti in un suo intorno cadrebbero operatori invertibili) e quindi $f(\mu) \in \sigma(f(T))$. Viceversa, sia $\lambda \in \mathbb{C} \setminus f(\sigma(T))$. Allora $\lambda - f(\mu) \neq 0$ per ogni $\mu \in \sigma(T)$ così che la funzione $g = 1/(\lambda - f) \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$. Dalle proprietà (1) e (4) segue che

$$\Phi(g)(\lambda I - \Phi(f)) = (\lambda I - \Phi(f))\Phi(g) = I,$$

cioè $\lambda I - \Phi(f)$ è invertibile e quindi $\lambda \notin \sigma(\Phi(f))$.
La proprietà (6) si prova immediatamente se $f \in \mathcal{A}$. Il risultato segue poi per densità.
Per provare l'unicità di Φ basta osservare che se dovesse esistere un'applicazione lineare $\Psi\colon C(\sigma(T), \mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H)$ con le proprietà (1), (2), (3) e (4), allora $\Psi(f) = \Phi(f)$ per ogni funzione $f \in \mathcal{A}$, e quindi $\Psi \equiv \Phi$ per densità. □

Nel seguito scriveremo $f(T)$ al posto di $\Phi(f)$ per mettere in evidenza la dipendenza da T e per semplicità di notazione.

Osservazione 3.17. La proprietà (6) del Teorema 3.16 può essere migliorata grazie al Teorema di Fuglede che afferma che se un operatore S commuta con T, allora S commuta anche con T^*. Per la dimostrazione, facciamo riferimento a [**10**].

Siano $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale e $\psi \in H$. Consideriamo il funzionale L su $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ così definito

$$C(\sigma(T), \mathbb{C}) \ni f \mapsto L(f) := \langle f(T)(\psi), \psi \rangle .$$

Tale funzionale è lineare e positivo per il Teorema 3.16-(7).
Allora, per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste un'unica misura di Borel positiva μ_ψ definita sul compatto $\sigma(T)$ tale che, per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$,

$$L(f) = \langle f(T)(\psi), \psi \rangle = \int_{\sigma(T)} f d\mu_\psi .$$

Tale misura μ_ψ è detta *misura spettrale* associata a ψ.

Lemma 3.18. *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale. Se esiste $\psi \in H$ tale che $\overline{\mathrm{span}}\{T^n(T^*)^m(\psi) \mid n, m \in \mathbb{N}\} = H$, allora esiste un operatore unitario $U \colon H \to L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$ tale che*

$$(UTU^{-1})(f)(\lambda) = \lambda f(\lambda) \quad \mu_\psi - q.o.$$

per ogni $f \in L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$.

Dim. Per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$, poniamo

$$U\Phi(f)(\psi) := f ,$$

dove Φ è l'applicazione costruita nel Teorema 3.16. Allora U è ben definito sullo spazio $\{\Phi(f)(\psi) \mid f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})\}$. Infatti, se $f, g \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$ sono due funzioni per cui $\Phi(f)(\psi) = \Phi(g)(\psi)$, ne segue che, per ogni n, $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Phi(f)T^n(T^*)^m(\psi) &= \Phi(f)\Phi(z^n\overline{z}^m)(\psi) = \Phi(z^n\overline{z}^m)\Phi(f)(\psi) \\ &= \Phi(z^n\overline{z}^m)\Phi(g)(\psi) = \Phi(g)T^n(T^*)^m(\psi) , \end{aligned}$$

cioè $\Phi(f) = \Phi(g)$ su un sottospazio denso di H. Per la continuità di $\Phi(f)$ e di $\Phi(g)$ deduciamo che $\Phi(f) = \Phi(g)$ su tutto H così che

$$0 = \|\Phi(f-g)\| = \|f-g\|_\infty ,$$

cioè $f \equiv g$.
Inoltre, per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(f)(\psi)\|^2 &= \langle \psi, \Phi(f)^*\Phi(f)(\psi)\rangle = \langle \psi, \Phi(\overline{f}f)(\psi)\rangle \\ &= \langle \Phi(\overline{f}f)(\psi), \psi\rangle = \int_{\sigma(T)} |f|^2 d\mu_\psi . \end{aligned}$$

Questo significa che U è una isometria da $(\{\Phi(f)(\psi) \mid f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})\}, \|\cdot\|)$ in $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$.

Dato che lo spazio $\{\Phi(f)(\psi) \mid f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})\}$ è denso in H, possiamo estendere U ad una isometria da H in $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$. D'altro canto, il fatto che $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ è un sottospazio denso di $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$ assicura che U è anche suriettivo. A questo punto, osserviamo che

$$(UTU^{-1})(f)(\lambda) = (UT\Phi(f)(\psi))(\lambda) = (U\Phi(xf)(\psi))(\lambda) = \lambda f(\lambda)$$

per ogni $f \in C(\sigma(T), \mathbb{C})$. Questa identità continua a valere per ogni $f \in L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$ dato che $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ è un sottospazio denso di $L^2(\sigma(T), \mu_\psi)$. $\square$

Per estendere questo risultato ad un operatore limitato normale qualsiasi, analogamente a quanto fatto per gli operatori autoaggiunti, dimostriamo il seguente lemma.

Lemma 3.19. *Siano H uno spazio di Hilbert separabile su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale. Allora esiste una famiglia di sottospazi $\{H_n\}_{n\in J}$, con $J \subseteq \mathbb{N}$ finito o infinito, tali che*

(1) $H = \oplus_{n\in J} H_n$,
(2) H_n *è invariante per* T *e* T^*,
(3) *per ogni* $n \in J$ *esiste un vettore* $\phi_n \in H_n$ *tale che*
$$\overline{\operatorname{span}}\{T^n(T^*)^m(\phi_n) \mid n, m \in \mathbb{N}\} = H_n.$$

Dim. Sia $\{e_n\}_n$ un sistema ortonormale completo di H. Poniamo $\phi_1 := e_1$ e $H_1 := \overline{\operatorname{span}}\{T^n(T^*)^m(\phi_1) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Allora H_1 è invariante rispetto a T e T^* e quindi la proprietà (3) è verificata per definizione.
Se $e_n \in H_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $H_1 = H$. In tal caso, la dimostrazione è conclusa. Altrimenti, sia n_1 il primo indice per cui $e_{n_1} \notin H_1$; questo significa che $e_n \in H_1$ per ogni $n < n_1$. Indichiamo con $P_{H_1^\perp}$ la proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso $H_1^\perp$ e poniamo $\phi_2 := P_{H_1^\perp}(e_{n_1})$. Osserviamo che $\phi_2 \neq 0$ dato che $e_{n_1} \notin H_1$. Inoltre, poiché T è normale e T e T^* trasformano H_1 in sé, T e T^* trasformano anche $H_1^\perp$ in sé. Infatti, fissato $h \in H_1^\perp$, risulta che $\langle T(h), k\rangle = \langle h, T^*(k)\rangle = 0$ per ogni $k \in H_1$, implicando che $T(h) \in H_1^\perp$. Analogamente si prova che $T^*(h) \in H_1^\perp$. Posto $H_2 := \overline{\operatorname{span}}\{T^n(T^*)^m(\phi_2) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, ne segue che $H_2 \subset H_1^\perp$. In particolare, H_2 è invariante rispetto a T e T^* e la proprietà (3) è così verificata.
Se $H = H_1 \oplus H_2$, allora la dimostrazione è conclusa. Altrimenti, sia n_2 il primo indice per cui $e_{n_2} \notin H_1 \oplus H_2$. Indicato con $P_{(H_1\oplus H_2)^\perp}$ la proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso $(H_1 \oplus H_2)^\perp$, poniamo $\phi_3 := P_{(H_1\oplus H_2)^\perp}(e_{n_2})$ e procediamo come prima.
Dopo un numero finito di N passi, potremmo ottenere che $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots H_N$, dove per ogni $i = 1, \dots, N$ H_i è invariante rispetto a T e T^* e vale la proprietà (3). Altrimenti, potremmo avere una famiglia di sottospazi chiusi $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ mutuamente ortogonali, invarianti rispetto a T e T^*, tale

che valga la proprietà (3). In ogni caso, per costruzione, $e_n \in H_1$ per ogni $n < n_1$, $e_n \in H_1 \oplus H_2$ per ogni $n \leq n < n_2$, e così via. Questo assicura che $\{e_n\}_n \subset \oplus_{i\in\mathbb{N}} H_i$ da cui segue $H = \oplus_{i\in\mathbb{N}} H_i$. □

Teorema 3.20. *Siano H uno spazio di Hilbert separabile su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale. Allora esistono una famiglia di misure di Borel positive $\{\mu_n\}_{n\in J}$, con $J \subseteq \mathbb{N}$ finito o infinito, su $\sigma(T)$ e un operatore unitario*

$$U : H \to \oplus_{n\in J} L^2(\sigma(T), d\mu_n)$$

tale che

$$(UTU^{-1}(\psi))_n(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda) \quad \mu_n - q.o.$$

per ogni $\psi = (\psi_n)_{n\in J} \in \oplus_{n=1}^{N} L^2(\sigma(T), d\mu_n)$ e per ogni $n \in J$.

Dim. Il risultato segue applicando prima il Lemma 3.9 per trovare la decomposizione e poi il Lemma 3.8 su ogni componente, osservando che $T_{|H_n}$ è un operatore normale, poiché H_n è invariante rispetto a T e T^*. Si ottiene così che l'n–esima misura μ_n non è altro che la misura spettrale associata all'n–esimo vettore ϕ_n, definita su $\sigma(T_{|H_n})$. Estendendo tale misura a $\sigma(T)$ ponendo $\mu_n = 0$ su $\sigma(T) \setminus \sigma(T_{|H_n})$, si ottiene la tesi . □

Imitando la stessa dimostrazione del Teorema 3.11 possiamo dimostrare il teorema spettrale per operatori normali nella sua formulazione classica.

Teorema 3.21 (Teorema spettrale per operatori normali). *Siano H uno spazio di Hilbert separabile su $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore normale. Allora esistono una spazio di misura finita (M, μ), una funzione limitata e misurabile $m : M \to \mathbb{C}$ e un operatore unitario $U : H \to L^2(M, d\mu)$ tali che*

$$(UTU^{-1}(f))(\lambda) = m(\lambda)f(\lambda) \quad \mu - q.o.$$

per ogni $f \in L^2(M, d\mu)$.

CAPITOLO 4

Teorema di rappresentazione spettrale per operatori illimitati

Nel seguito, $(H, \|\cdot\|)$ indicherà sempre uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ con prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

4.1. Operatori simmetrici, autoaggiunti, dissipativi

DEFINIZIONE 4.1. *Dato $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito su H, si pone*

$$D(T^*) := \{\, y \in H \mid \exists y^* \in H \text{ tale che } \forall x \in D(T)\ \langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle \,\}. \tag{4.31}$$

Osserviamo che, fissato $y \in D(T^*)$, l'elemento y^* che compare in (4.31) è unico. Infatti, se esistessero $y_1^* \in H$ e $y_2^* \in H$ tali che

$$\forall x \in D(T)\ \langle x, y_1^*\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, y_2^*\rangle\,,$$

allora, per la densità di $D(T)$ in H, seguirebbe che

$$\forall x \in H\ \langle x, y_1^*\rangle = \langle x, y_2^*\rangle\,,$$

da cui $y_1^* = y_2^*$. Pertanto, è ben posta la seguente definizione.

DEFINIZIONE 4.2. *Dato $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito su H, si definisce l'operatore aggiunto $(T^*, D(T^*))$ di $(T, D(T))$ ponendo, per ogni $y \in D(T^*)$, $T^*y := y^*$ dove y^* è l'unico elemento di H tale che $\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$ per ogni $x \in D(T)$.*

Si verifica facilmente che $T^* : D(T^*) \to H$ è ancora un operatore lineare.

PROPOSIZIONE 4.3. *Se $T : D(T) \subseteq H \to H$ è un operatore lineare densamente definito su H, allora*

$$y \in D(T^*) \ \Leftrightarrow\ \exists c > 0\ \forall x \in D(T)\ |\langle Tx, y\rangle| \le c||x||\,.$$

DIM. $\Rightarrow$: Se $y \in D(T^*)$, allora per la definizione (4.31) esiste $y^* \in H$ tale che
$$\forall x \in D(T) \quad |\langle Tx, y\rangle| = |\langle x, y^*\rangle| \leq ||y^*||\,||x||.$$
$\Leftarrow$: Per densità di $D(T)$ in H, si ha che
$$\forall x \in H \quad |\langle Tx, y\rangle| \leq c||x||,$$
il che assicura che il funzionale lineare $x \in H \to \langle Tx, y\rangle$ è continuo. Pertanto, per il teorema di Riesz-Fréchet, esiste $y^* \in H$ tale che
$$\forall x \in H \ \langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle. \quad \Box$$

ESEMPIO 4.4. Siano (Ω, Σ, μ) uno spazio misurabile con misura μ σ-finita e $H = L^2(\Omega, \mu)$. Consideriamo l'operatore di moltiplicazione M_m associato ad una funzione misurabile $m : \Omega \to \mathbb{C}$, il cui dominio è dato da $D(M_m) = \{\, f \in L^2(\Omega, \mu) \mid mf \in L^2(\Omega, \mu)\}$. Allora $M_m^* = M_{\overline{m}}$.
Infatti, se $f \in D(M_{\overline{m}})$, allora
$$\forall h \in D(M_m) \quad \langle mh, f\rangle = \int_\Omega mh\overline{f}d\mu = \int_\Omega h\overline{(\overline{m}f)}d\mu = \langle h, \overline{m}f\rangle\,.$$
Abbiamo così provato che $D(M_{\overline{m}}) \subseteq D(M_m^*)$ e che $M_m^* f = M_{\overline{m}} f$ per ogni $f \in D(M_{\overline{m}})$.
Viceversa, se $f \in D(M_m^*)$, allora esiste $g \in H$ tale che
$$\forall h \in D(M_m) \quad \langle mh, f\rangle = \langle h, g\rangle\,,$$
da cui
$$\forall h \in D(M_m) \quad \langle h, \overline{m}f\rangle = \langle h, g\rangle\,.$$
Questo significa che $f \in D(M_{\overline{m}})$.

In generale, T^* non è densamente definito, come dimostra il prossimo esempio.

ESEMPIO 4.5. Sia $H = L^2(\mathbb{R})$. Siano $f_0 \in L^2(\mathbb{R})$ con $f_0 \neq 0$ ed $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ tale che $f \notin L^2(\mathbb{R})$. Consideriamo l'operatore lineare $(T, D(T))$ su $L^2(\mathbb{R})$ così definito
$$D(T) := \{\, g \in L^2(\mathbb{R}) \mid fg \in L^1(\mathbb{R})\,\}, \qquad Tg := \langle g, f\rangle \cdot f_0\,.$$
$D(T)$ è un sottospazio denso di $L^2(\mathbb{R})$, perché contiene lo spazio $C_c(\mathbb{R})$ delle funzioni continue a supporto compatto. Invece $D(T^*)$ non è un sottospazio denso di H. Infatti, se $h \in D(T^*)$, allora per ogni $g \in L^2(\mathbb{R})$
$$\begin{aligned}\langle g, T^*h\rangle &= \langle Tg, h\rangle = \langle\langle g, f\rangle \cdot f_0, h\rangle = \langle g, f\rangle \cdot \langle f_0, h\rangle \\ &= \langle g, \overline{\langle f_0, h\rangle} \cdot f\rangle = \langle g, \langle h, f_0\rangle \cdot f\rangle\,,\end{aligned}$$
da cui $T^*h = \langle f_0, h\rangle \cdot f$. Ora, dato che $f \notin L^2(\mathbb{R})$, $\langle f_0, h\rangle$ deve essere necessariamente uguale a 0 per ogni $h \in D(T^*)$. Pertanto, $D(T^*)$ non può essere denso, perché ciò implicherebbe $f_0 = 0$, contro l'ipotesi.

Proposizione 4.6. *Siano* $S : D(S) \subseteq H \to H$ *e* $T : D(T) \subseteq H \to H$ *due operatori lineari densamente definiti su* H. *Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) *Se* $S \subset T$, *allora* $T^* \subset S^*$.
(2) *Se* T^* *è densamente definito, allora* $T \subset T^{**} = (T^*)^*$.

Dim. (1) Sia $y \in D(T^*)$. Allora per ogni $x \in D(S) \subseteq D(T)$

$$\langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle\,.$$

Ne segue che $y \in D(S^*)$ e $S^*y = T^*y$.
(2) Sia $x \in D(T)$. Allora, per ogni $y \in D(T^*)$,

$$\langle T^*y, x\rangle = \overline{\langle x, T^*y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle\,.$$

Ne segue che $x \in D(T^{**})$ e $T^{**}x = Tx$. $\square$

Proposizione 4.7. *Sia* $T : D(T) \subseteq H \to H$ *un operatore lineare su* H *densamente definito, iniettivo e con* $\overline{\mathrm{Rg}(T)} = H$. *Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) T^* *è iniettivo.*
(2) $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Dim. (1) Sia $y \in D(T^*)$ tale che $T^*y = 0$. Allora per ogni $x \in D(T)$

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0\,,$$

Questo implica che per ogni $z \in \mathrm{Rg}(T)$

$$\langle z, y\rangle = 0\,.$$

Per la densità di $\mathrm{Rg}(T)$ in H, segue che $y = 0$. Dunque, T^* è iniettivo.
(2) Poichè $D(T^{-1}) = \mathrm{Rg}(T)$, $D(T^{-1})$ è un sottospazio denso di H, dunque l'operatore aggiunto $((T^{-1})^*, D((T^{-1})^*))$ è ben definito. Proviamo ora che $(T^*)^{-1} \subset (T^{-1})^*$ e che $(T^{-1})* \subset (T^*)^{-1}$.
Sia $y^* \in D((T^*)^{-1}) = \mathrm{Rg}(T^*)$. Allora esiste $y \in D(T^*)$ tale che $T^*y = y^*$.
Se $z \in D(T^{-1})$, allora $T^{-1}z \in D(T)$ e, quindi

$$\langle T^{-1}z, y^*\rangle = \langle T^{-1}z, T^*y\rangle = \langle TT^{-1}z, y\rangle = \langle z, y\rangle = \langle z, (T^*)^{-1}y^*\rangle\,.$$

Pertanto, $y^* \in D((T^{-1})^*)$ e $(T^{-1})^*y^* = (T^*)^{-1}y^*$.
Sia ora $y^* \in D((T^{-1})^*)$. Allora per ogni $x \in D(T^{-1}) = \mathrm{Rg}(T)$

$$\langle T^{-1}x, y^*\rangle = \langle x, (T^{-1})^*y^*\rangle\,.$$

Da questo segue che, per ogni $z \in D(T)$

$$\langle z, y^*\rangle = \langle T^{-1}Tz, y^*\rangle = \langle Tz, (T^{-1})^*y^*\rangle\,.$$

Dunque, $(T^{-1})^*y^* \in D(T^*)$ e $T^*((T^{-1})^*y^*) = y^*$. Di conseguenza, $y^* \in \mathrm{Rg}(T^*) = D((T^*)^{-1})$ e $(T^*)^{-1}y^* = (T^{-1})^*y^*$. $\square$

Definizione 4.8. *Dato $T : D(T) \subseteq H \to H$ operatore lineare densamente definito su H, si dice che T è simmetrico se $T \subset T^*$, cioè se*

$$\forall x, y \in D(T) \quad \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle\,.$$

Inoltre, si dice che T è autoaggiunto se $T = T^*$.

Esempio 4.9. Consideriamo l'operatore di moltiplicazione M_m (cfr. Esempio 4.4). Si verifica facilmente che M_m è simmetrico se e solo se $\mathrm{Im} m = 0$. In tal caso, $D(M_m) = D(M_m^*)$ così che l'operatore M_m è anche autoaggiunto.

Osservazione 4.10. Ogni operatore autoaggiunto è chiaramente simmetrico. Il viceversa non è vero in generale. Infatti, è sufficiente considerare il seguente esempio. Per le definizioni e le proprietà degli spazi di Sobolev $W^{1,2}([0,1])$ e $W_0^{1,2}([0,1])$, faremo riferimento al capitolo VIII del libro [**4**]. Siano $H = L^2([0,1])$ e $T : W_0^{1,2}([0,1]) \subseteq H \to H$ l'operatore così definito

$$\forall f \in W_0^{1,2}([0,1]) \quad Tf = if'\,.$$

Allora $D(T) = W_0^{1,2}([0,1])$ è un sottospazio denso di $L^2([0,1])$. Inoltre, per ogni $f \in W_0^{1,2}([0,1])$ e $g \in W^{1,2}([0,1])$, si ha

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^1 if'\overline{g}dx = -\int_0^1 if\overline{g'}dx = \int_0^1 f\overline{(ig')}dx.$$

Ne segue che T è simmetrico (considerando g anche in $W_0^{1,2}([0,1])$), che $W^{1,2}([0,1]) \subseteq D(T^*)$ e che $T^*g = ig'$ per ogni $g \in W^{1,2}([0,1])$.
D'altro canto, se $g \in D(T^*)$, allora per ogni $f \in D(T) = W_0^{1,2}([0,1])$ si ha

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle\,,$$

cioè

$$\int_0^1 if'\overline{g}dx = \int_0^1 fT^*gdx\,.$$

Pertanto, per ogni $f \in C_c^\infty([0,1])$, si ha

$$\int_0^1 f'(i\overline{g})dx = \int_0^1 fT^*gdx\,.$$

Ricordando la definizione di $W^{1,2}([0,1])$, ne deduciamo che $ig \in W^{1,2}([0,1])$. Dunque $D(T^*) \subseteq W^{1,2}([0,1])$. Avendo provato che $D(T^*) = W^{1,2}([0,1])$, T non può essere autoaggiunto. Osserviamo anche che T^* non è simmetrico.

Teorema 4.11 (Teorema di Hellinger-Toeplitz). *Se $T : H \to H$ è un operatore lineare simmetrico, allora $T \in \mathcal{L}(H)$. In particolare, T è anche autoaggiunto.*

Dim. Per il Teorema 1.4, è sufficiente provare che il grafico di T è chiuso. Sia allora $(x_n)_n \subseteq H$ una successione tale che esistono $\lim_n x_n = x$ e $\lim_n Tx_n = y$. Adesso, osserviamo che, per ogni $z \in H$, si ha

$$\langle z, y\rangle = \lim_n \langle z, Tx_n\rangle = \lim_n \langle Tz, x_n\rangle = \langle Tz, x\rangle = \langle z, Tx\rangle\,.$$

Di conseguenza, $Tx = y$. $\square$

PROPOSIZIONE 4.12. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito su H. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) *T^* è chiuso.*
(2) *T è chiudibile se e solo se $D(T^*)$ è denso in H. In tal caso, $\overline{T} = T^{**}$.*
(3) *Se T è chiudibile, allora $(\overline{T})^* = T^*$.*

DIM. Prima di procedere nella dimostrazione delle suddette proprietà, osserviamo che sullo spazio prodotto $H \times H$ si definisce in maniera naturale un prodotto scalare ponendo, per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H \times H$,

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{H\times H} := \langle x_1, x_2 \rangle_H + \langle y_1, y_2 \rangle_H \,.$$

Ora, è facile verificare che lo spazio $H \times H$, dotato del prodotto scalare sopra definito, è uno spazio di Hilbert. Inoltre, l'operatore lineare $V : H \times H \to H \times H$ così definito

$$\forall (x, y) \in H \times H \quad V(x, y) := (-y, x)\,,$$

preserva il prodotto scalare (i.e., è unitario), è suriettivo e $V^2 = -I$. In particolare, per ogni sottospazio $E \subseteq H \times H$ vale la seguente identità

$$V(E^\perp) = V(E)^\perp\,. \tag{4.32}$$

Se $S\colon D(S) \subseteq H \to H$ è un operatore lineare densamente definito su H, allora per ogni $x, y \in H$ si ha

$$\begin{aligned}
(x, y) \in [V(\mathcal{G}(S))]^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad \forall (x_1, y_1) \in \mathcal{G}(S) \ \ \langle (x, y), V(x_1, y_1) \rangle_{H\times H} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall z \in D(S) \ \ \langle (x, y), (-Sz, z) \rangle_{H\times H} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall z \in D(S) \ \ - \langle x, Sz \rangle + \langle y, z \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall z \in D(S) \ \ \langle x, Sz \rangle = \langle y, z \rangle \\
&\Leftrightarrow \quad x \in D(S^*) \ \text{ e } \ S^* x = y \\
&\Leftrightarrow \quad (x, y) \in \mathcal{G}(S^*).
\end{aligned}$$

Abbiamo così provato che

$$\mathcal{G}(S^*) = [V(\mathcal{G}(S))]^\perp. \tag{4.33}$$

(1) Poiché l'ortogonale di un sottospazio di uno spazio di Hilbert è sempre un sottospazio chiuso, l'identità (4.33) implica che $\mathcal{G}(T^*)$ è un sottospazio chiuso di $H \times H$ e, quindi $(T^*, D(T^*))$ è un operatore lineare chiuso.
(2) Per le ben note proprietà della operazione di ortogonalizzazione in spazi di Hilbert, si ha

$$\overline{\mathcal{G}(T)} = [\mathcal{G}(T)^\perp]^\perp.$$

Ricordando che l'operatore V sopra definito soddisfa le proprietà (4.32) e (4.33) e che $V^2 = -I$, ne segue

$$\overline{\mathcal{G}(T)} = V^2 \left[[\mathcal{G}(T)^{\perp}]^{\perp}\right] = \left[V[V(\mathcal{G}(T))]^{\perp}\right]^{\perp} = [V(\mathcal{G}(T^*))]^{\perp} . \tag{4.34}$$

Possiamo ora dimostrare la proprietà (2). Supponiamo che $\overline{D(T^*)} = H$. Allora, applicando prima l'uguaglianza (4.34) e poi l'uguaglianza (4.33), otteniamo che

$$\overline{\mathcal{G}(T)} = [V(\mathcal{G}(T^*))]^{\perp} = \mathcal{G}(T^{**}) .$$

Questo assicura che $(T^{**}, D(T^{**}))$ è un operatore lineare chiuso e dunque $(T, D(T))$ è un operatore lineare chiudibile tale che $\overline{T} = T^{**}$.
Viceversa, supponiamo che $(T, D(T))$ sia un operatore lineare chiudibile, ma che il dominio $D(T^*)$ di T^* non sia un sottospazio denso di H. Allora $D(T^*)^{\perp}$ è un sottospazio proprio di H e, quindi esiste $x \in D(T^*)^{\perp}$ tale che $x \neq 0$. Di conseguenza, per ogni $y \in D(T^*)$ si ha

$$\langle (x, 0), (y, T^*y) \rangle_{H \times H} = \langle x, y \rangle + \langle 0, T^*y \rangle = 0 ,$$

cioè $(x, 0) \in [\mathcal{G}(T^*)]^{\perp}$. Pertanto, $(0, x) \in V[\mathcal{G}(T^*)^{\perp}] = [V(\mathcal{G}(T^*))]^{\perp} = \overline{\mathcal{G}(T)}$. Ora, dato che $x \neq 0$ e $(0, x) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$, lo spazio $\overline{\mathcal{G}(T)}$ non può essere il grafico di un operatore lineare e quindi T non è chiudibile.
(3) Per la proprietà (1) l'operatore lineare $(T^*, D(T^*))$ è chiuso. Questo ci consente di applicare la proprietà (2) a T^* per concludere che

$$T^* = \overline{T^*} = (T^*)^{**} = (T^{**})^* = (\overline{T})^*. \qquad \square$$

Corollario 4.13. *Se $T : D(T) \subseteq H \to H$ è un operatore lineare densamente definito simmetrico, allora T è chiudibile.*

Dim. Basta osservare che $T \subset T^*$.

Osservazione 4.14. Se T è un operatore simmetrico densamente definito su H, allora $T \subset T^*$ e dunque $T^{**} = \overline{T} \subset T^*$. Se T è anche chiuso, allora

$$T = \overline{T} = T^{**} \subset T^*. \tag{4.35}$$

Di conseguenza, se T è un operatore chiuso e simmetrico, allora T è autoaggiunto se e solo se T^* è simmetrico.

Proposizione 4.15. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito su H. Allora T è simmetrico se e solo se $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in D(T)$.*

Dim. Supponiamo che T sia simmetrico. Allora per ogni $x \in D(T)$

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, T^*x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} ,$$

da cui segue che $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.
Viceversa, supponiamo che $\langle Tz, z\rangle \in \mathbb{R}$ per ogni $z \in D(T)$. Allora, per ogni $x, y \in D(T)$,

$$\langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle = -\langle T(x-y), x-y)\rangle + \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle \in \mathbb{R}\,.$$

Di conseguenza, $\mathrm{Im}\langle Tx, y\rangle = -\mathrm{Im}\langle Ty, x\rangle = \mathrm{Im}\langle x, Ty\rangle$. Analogamente, per ogni $x, y \in D(T)$, risulta

$$i\langle Ty, x\rangle - i\langle Tx, y\rangle = -\langle T(x-iy), x-iy)\rangle + \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle \in \mathbb{R}\,.$$

Pertanto, $\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle = \mathrm{Im}\, i\langle Tx, y\rangle = \mathrm{Im}\, i\langle Ty, x\rangle = \mathrm{Re}\langle Ty, x\rangle = \mathrm{Re}\langle x, Ty\rangle$.
Abbiamo così dimostrato che $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ per ogni x, $y \in D(T)$, cioè che T è simmetrico. □

TEOREMA 4.16. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito su H. Se T è simmetrico, allora le seguenti proprietà sono equivalenti.*

(i) *T è autoaggiunto.*
(ii) *T è chiuso e* $\ker(T^* \pm i) = \{0\}$.
(iii) $\mathrm{Rg}(T \pm i) = H$.

DIM. (i) $\Rightarrow$ (ii): Poiché $T = T^*$, per la Proposizione 4.12(i) possiamo concludere che T è chiuso. Ora, sia $x \in D(T^*) = D(T)$ tale che $T^*x = Tx = ix$. Allora, ricordando che T è simmetrico, risulta

$$i\langle x, x\rangle = \langle ix, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle x, ix\rangle = -i\langle x, x\rangle,$$

da cui $x = 0$. In modo analogo si dimostra che $\ker(T^* + i) = \{0\}$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Proviamo prima che $\mathrm{Rg}(T - i)$ è un sottospazio denso di H. Sia $y \in H$ tale che $\langle Tz - iz, y\rangle = 0$ per ogni $z \in D(T)$. Allora, per ogni $z \in D(T)$,

$$\langle Tz, y\rangle = \langle z, -iy\rangle\,.$$

Quindi, $y \in D(T^*)$ e $T^*y = -iy$. Per ipotesi, si ha che $y = 0$. Abbiamo così provato che $[\mathrm{Rg}(T-i)]^\perp = \{0\}$, il che implica che $\mathrm{Rg}(T-i)$ è un sottospazio denso di H.
Proviamo ora che $\mathrm{Rg}(T - i)$ è un sottospazio chiuso di H. Per questo osserviamo che, grazie alla Proposizione 4.15, per ogni $x \in D(T)$,

$$\begin{aligned} ||(T-i)x||^2 &= ||Tx||^2 + ||x||^2 + 2\mathrm{Re}\langle Tx, -ix\rangle \\ &= ||Tx||^2 + ||x||^2 + 2\mathrm{Re}[i\langle Tx, x\rangle] \\ &= ||Tx||^2 + ||x||^2. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Se $(x_n)_n \subseteq D(T)$ è una successione tale che $\lim_n(Tx_n - ix_n) = y_0 \in H$, allora $(Tx_n - ix_n)_n$ è una successione di Cauchy in H. D'altro canto, per l'uguaglianza (4.36) appena dimostrata, si ha per ogni $n, m \in \mathbb{N}$

$$||x_n - x_m||^2 + ||Tx_n - Tx_m||^2 = ||Tx_n - ix_n - Tx_m + ix_m||^2\,.$$

Di conseguenza, anche $(x_n)_n$ e $(Tx_n)_n$ sono successioni di Cauchy in H, e pertanto successioni convergenti di H. Siano $x_0 = \lim_n x_n$ e $z_0 = \lim_n Tx_n$. T è chiuso, quindi $x_0 \in D(T)$ e $z_0 = Tx_0$, cioè $y_0 = (T-i)x_0 \in \mathrm{Rg}(T-i)$. La dimostrazione è analoga per $\mathrm{Rg}(T+i)$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Osserviamo che $\ker(T^*-i) = \{0\}$. Infatti, se $T^*z = iz$ per qualche $z \in D(T^*)$, allora

$$\forall x \in D(T) \quad \langle Tx + ix, z\rangle = \langle x, T^*z - iz\rangle = 0\,.$$

Dato che $\mathrm{Rg}(T+i) = H$ per ipotesi, ne segue che $z = 0$.
Sia ora $y \in D(T^*)$. Per ipotesi, esiste $x \in D(T)$ tale che $(T-i)x = (T^*-i)y$. Poiché $D(T) \subset D(T^*)$ essendo T simmetrico, ne segue che $y - x \in D(T^*)$ e che $(T^*-i)(y-x) = 0$. Quindi, $y - x = 0$ così che $y \in D(T)$. Abbiamo così provato che $D(T) = D(T^*)$, cioè che T è autoaggiunto. □

Osservazione 4.17. L'ipotesi che $\ker(T \pm i) = \{0\}$ non può essere rimossa in (ii). Infatti, se consideriamo l'operatore lineare

$$T : W_0^{1,2}([0,1]) \subseteq L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), \qquad Tf = if'\,,$$

allora T è simmetrico e $D(T^*) = W^{1,2}([0,1])$ (cfr. Osservazione 4.10). Inoltre, $(T, D(T))$ è anche un operatore chiuso. Infatti, sia $(\psi_n)_n \in W_0^{1,2}([0,1])$ tale che $\lim_n \psi_n = \psi$ e $\lim_n T\psi_n = \phi$ in $L^2([0,1])$. Allora, per ogni $\xi \in C_c^\infty([0,1])$ risulta

$$\int_0^1 \psi\xi' dx = \lim_n \int_0^1 \psi_n \xi' dx = -\lim_n \int_0^1 \psi_n' \xi dx = i\int_0^1 \phi\xi dx.$$

Ciò assicura che esiste $\psi' \in L^2([0,1])$ tale che $\psi' = i\phi$. Quindi, possiamo concludere che $\psi_n \to \psi$ in $W^{1,2}([0,1])$. Poiché $(\psi_n)_n \subset W_0^{1,2}([0,1])$ e $W_0^{1,2}([0,1])$ è un sottospazio chiuso di $W^{1,2}([0,1])$, deduciamo anche che $\psi \in W_0^{1,2}([0,1])$. Questo completa la dimostrazione del fatto che T è chiuso. D'altro canto, le funzioni $f_\pm \in D(T^*)$ così definite $f_\pm(x) := e^{\pm x}$ sono tali che $T^* f_\pm = \pm i f_\pm$. Dunque, $\ker(T^* \pm i) \neq \{0\}$.

Definizione 4.18. *Un operatore lineare $T : D(T) \subseteq H \to H$ si dice dissipativo se*

$$\forall x \in D(T) \quad \mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle \leq 0.$$

Esempio 4.19. Consideriamo l'operatore lineare T su $L^2([0,1], \mathbb{C})$ definito ponendo

$$D(T) := \{f \in C^1([0,1], \mathbb{C}) \mid f(0) = f(1) = 0\}, \qquad Tf := f'\,.$$

Se $f \in D(T)$, allora

$$\langle Tf, f\rangle = \int_0^1 f'\overline{f} dx = -\int_0^1 f\overline{f'} dx\,.$$

Ciò implica che

$$\mathrm{Re}\langle Tf, f\rangle = -\int_0^1 [(\mathrm{Re}f)(\mathrm{Re}f)' + (\mathrm{Im}f)(\mathrm{Im}f)']dx = -\frac{1}{2}[|f(1)|^2 - |f(0)|^2] = 0\,.$$

Per l'arbitrarietà di $f \in D(T)$, possiamo concludere che T è dissipativo.

TEOREMA 4.20. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito su H. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti.*

(i) *T è simmetrico.*
(ii) *$\pm iT$ è dissipativo.*

DIM. (i) $\Rightarrow$ (ii): Per ogni $x \in D(T)$ si ha

$$\mathrm{Re}\langle \pm iTx, x\rangle = \pm\mathrm{Re}(i\langle Tx, x\rangle = 0\,.$$

Ciò implica che T è dissipativo.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Per ogni $x \in D(T)$ si ha

$$\mathrm{Im}\langle Tx, x\rangle = -\mathrm{Re}\langle iTx, x\rangle = \mathrm{Re}\langle -iTx, x\rangle\,.$$

Per la dissipatività di $\pm iT$, ne segue che $\mathrm{Im}\langle Tx, x\rangle = 0$ per ogni $x \in D(T)$. Quindi, $\langle Tx, x\rangle = \mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in D(T)$. □

OSSERVAZIONE 4.21. Dal teorema precedente segue che se T è dissipativo, allora iT è simmetrico e dunque chiudibile per il Corollario 4.13. Pertanto anche T è chiudibile.

PROPOSIZIONE 4.22. *Un operatore densamente definito $T : D(T) \subseteq H \to H$ è dissipativo se e solo se $||x - sTx|| \geq ||x||$ per ogni $x \in D(T)$ e $s > 0$.*

DIM. Se T è dissipativo, allora per ogni $x \in D(T)$ e $s > 0$ si ha

$$\begin{aligned} ||x - sTx|| \cdot ||x|| &\geq |(x - sTx, x)| \\ &\geq \mathrm{Re}\langle x - sTx, x\rangle \\ &= ||x||^2 - s\mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle \\ &\geq ||x||^2\,. \end{aligned}$$

Viceversa, se $x \in D(T)$, allora per ogni $s > 0$,

$$||x||^2 \leq ||x - sTx||^2 = ||x||^2 + s^2||Tx||^2 - 2\mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle\,.$$

Ciò implica che $s||Tx||^2 - 2\mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle \geq 0$ per ogni $s > 0$ così che $\mathrm{Re}(Tx, x) \leq 0$. □

COROLLARIO 4.23. *Se $T : D(T) \subseteq H \to H$ è un operatore dissipativo, allora $\lambda - T$ è iniettivo per ogni $\lambda > 0$. Inoltre, se T è anche chiuso, allora $\mathrm{Rg}(\lambda - T)$ è un sottospazio chiuso di H per ogni $\lambda > 0$.*

DIM. Fissato $\lambda > 0$, l'iniettività di $\lambda - T$ segue immediatamente dalla Proposizione 4.22.
Assumiamo ora che T sia chiuso e che $(x_n)_n \subset D(T)$ sia una successione

tale che esiste $\lim_n(\lambda x_n - Tx_n) = y \in H$. Dato che per la Proposizione 4.22 si ha

$$\forall n,\, m \in \mathbb{N} \ \ ||x_n - x_m|| \leq ||x_n - \frac{1}{\lambda}Tx_n - x_m + \frac{1}{\lambda}Tx_m||\,.$$

ne segue che $(x_n)_n$ è una successione di Cauchy in H e pertanto converge a qualche $x \in H$. Di conseguenza, $\lim_n Tx_n = \lambda x - y$. Poiché T è chiuso, possiamo così concludere che $x \in D(T)$ e $y = \lambda x - Tx$. Questo dimostra che $\mathrm{Rg}(\lambda - T)$ è un sottospazio chiuso di H. □

Teorema 4.24. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore dissipativo su H. Se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ tale che $(\lambda - T)(D(T)) = H$, allora $\lambda \in \rho(T)$. In particolare, $\mathbb{C}_+ = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\mu) > 0\} \subseteq \rho(T)$ e la seguente diseguaglianza è soddisfatta*

$$\forall \mu \in \mathbb{C}_+ \qquad ||R(\mu, T)|| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\mu)}\,. \tag{4.37}$$

Dim. Occorre provare solo che l'operatore $\lambda - T$ è iniettivo dato che $(\lambda - T)(D(T)) = H$ per ipotesi. Per questo osserviamo che per ogni $x \in D(T)$ e $y := \lambda x - Tx$ si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\lambda\, ||x||^2 &= \mathrm{Re}\lambda\, \langle x, x\rangle = \mathrm{Re}\langle \lambda x, x\rangle \\ &= \mathrm{Re}\langle y + Tx, x\rangle = \mathrm{Re}\langle y, x\rangle + \mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle \\ &\leq \mathrm{Re}\langle y, x\rangle \leq ||x|| \cdot ||y||\,. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Se $y = 0$, allora da (4.38) segue che anche $x = 0$. Quindi, l'operatore $\lambda - T$ è iniettivo. Inoltre, la diseguaglianza (4.38) implica anche che

$$||(\lambda - T)^{-1}y|| = ||x|| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}||y||.$$

Abbiamo così provato che $\lambda \in \rho(T)$ e che $||R(\lambda, T)|| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}$.
Se $\mu \in \mathbb{C}_+ \cap \rho(T)$ con $\mu \neq \lambda$, allora $||R(\mu, T)|| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\mu)}$ come segue ripetendo l'argomentazione precedente.
Per completare la dimostrazione, è sufficiente quindi provare che $\mathbb{C}_+ \cap \rho(T) = \mathbb{C}_+$. Per fare questo usiamo un argomento di connessione. Osserviamo che $\mathbb{C}_+ \cap \rho(T)$ è un sottoinsieme aperto e non vuoto di $\mathbb{C}_+$. Dimostriamo che è anche un sottoinsieme chiuso di C_+. Sia $(\mu_n)_n \subset \rho(T) \cap \mathbb{C}_+$ una successione convergente a qualche $\mu \in \mathbb{C}_+$. Possiamo allora supporre che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}\mu_n \geq c > 0$ e quindi $||R(\mu_n, T)|| \leq \frac{1}{c}$, in virtù di (4.37). Per la convergenza di $(\mu_n)_n$ a μ, esiste $\overline{n}$ tale che

$$|\mu - \mu_{\overline{n}}| \leq c \leq \frac{1}{||R(\mu_{\overline{n}}, T)||}\,.$$

Pertanto $\mu \in \rho(T)$ per la Proposizione 1.12(1). Dunque $\mathbb{C}_+ \cap \rho(T)$ è anche un sottoinsieme chiuso in $\mathbb{C}_+$. Poiché $\mathbb{C}_+ \cap \rho(T)$ è un sottoinsieme non vuoto sia aperto sia chiuso di $\mathbb{C}_+$ e $\mathbb{C}_+$ è un insieme connesso, possiamo concludere che $\mathbb{C}_+ \cap \rho(T) = \mathbb{C}_+$. □

Proposizione 4.25. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito su H. Se T è simmetrico, allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) *Se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Im\lambda > 0$ tale che $(\lambda - T)(D(T)) = H$, allora $\{\mu \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\mu > 0\} \subseteq \rho(T)$.*
(2) *Se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Im\lambda < 0$ tale che $(\lambda - T)(D(T)) = H$, allora $\{\mu \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\mu < 0\} \subseteq \rho(T)$.*

Dim. Osserviamo prima che, in virtù del Teorema 4.20, l'operatore $\pm iT$ è dissipativo poiché T è simmetrico.
(1) Posto $\mu := -i\lambda$, osserviamo ora che $\mathrm{Re}\mu = \mathrm{Im}\lambda > 0$ e che l'operatore $\mu + iT$ è suriettivo per ipotesi. Possiamo così applicare il teorema precedente a $-iT$ per concludere che $\mathbb{C}_+ \subseteq \rho(-iT)$, o equivalentemente che $i\mathbb{C}_+ \subseteq \rho(T)$. Tenuto conto che $i\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}z > 0\}$, la tesi segue.
(2) Si argomenta analogamente al caso (1) considerando però l'operatore iT. □

Osservazione 4.26. Dalla Proposizione 4.25 si può dedurre che se T è un operatore simmetrico, allora per lo spettro $\sigma(T)$ si può presentare solo una delle seguenti possibilità.

- $\sigma(T) \subseteq \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\mu \geq 0\}$.
- $\sigma(T) \subseteq \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\mu \leq 0\}$.
- $\sigma(T) = \mathbb{C}$.
- $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ (se esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(T)$ con $\mathrm{Im}\lambda_1 > 0$ e $\mathrm{Im}\lambda_2 < 0$).

Corollario 4.27. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito. Se T è autoaggiunto, allora $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.*

Dim. Poiché T è autoaggiunto, si ha che $\mathrm{Rg}(T \pm i) = H$ in virtù del Teorema 4.16. Quindi, per la Proposizione 4.25, $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}z \neq 0\} \subseteq \rho(T)$ così che $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. □

Proposizione 4.28. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare densamente definito simmetrico e dissipativo. Le sequenti affermazioni sono equivalenti.*

(i) *T è autoaggiunto*
(ii) $\sigma(T) \subseteq]-\infty, 0]$.
(iii) *(I-T)(D(T))=H.*

Dim. (i)$\Rightarrow$ (ii): Per il Corollario 4.27 è sufficiente provare che se $\lambda > 0$, allora $\lambda \in \rho(T)$.

Se $\lambda > 0$, allora l'operatore $\lambda - T$ è iniettivo ed ha rango chiuso in virtù del Corollario 4.23 e del Teorema 4.16. D'altro canto, poiché T è autoaggiunto,

$$\{0\} = \ker(\lambda - T) = [\mathrm{Rg}(\lambda - T)]^{\perp},$$

così che $(\lambda - T)(D(T))$ è un sottospazio denso di H. Pertanto $(\lambda - T)(D(T)) = H$, cioè $\lambda - T$ è anche un operatore suriettivo. Abbiamo così provato che $\lambda \in \rho(T)$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Per (ii), $\pm i \in \rho(T)$ e dunque T è autoaggiunto per il Teorema 4.16.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Per (ii), $1 \in \rho(T)$.
(iii) $\Rightarrow$ (ii): Per il Teorema 4.24, si ha che $\mathbb{C}_+ \subseteq \rho(T)$, dunque esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(T)$ con $\mathrm{Im}\lambda_1 > 0$ e $\mathrm{Im}\lambda_2 < 0$. Pertanto, per la Proposizione 4.25, $\pm i \in \rho(T)$ e dunque T è autoaggiunto per il Teorema 4.16. $\square$

Esempio 4.29. Consideriamo l'operatore $(A, D(A))$ su $L^2([0,1])$ definito da

$$D(A) = W_0^{1,2}([0,1]) \cap W^{2,2}([0,1]), \qquad Af = f''.$$

L'operatore $(A, D(A))$ è noto come Laplaciano con condizioni al bordo di Dirichlet. Proviamo che A è un operatore dissipativo autoaggiunto.
Siano $f, g \in D(A)$. Ricordando che $f(0) = f(1) = g(0) = g(1)$, si ha

$$\begin{aligned} \langle Af, g\rangle_{L^2([0,1])} &= \int_0^1 f''\overline{g}dx = f'\overline{g}|_0^1 - \int_0^1 f'\overline{g}'dx = -\int_0^1 f'\overline{g}'dx \\ &= -f\overline{g'}|_0^1 + \int_0^1 f\overline{g}''dx = \langle f, Ag\rangle_{L^2([0,1])}. \end{aligned}$$

Dunque A è simmetrico e poichè

$$\langle Af, f\rangle = -\int_0^1 |f'|^2 dx \leq 0$$

possiamo concludere che A è dissipativo. Dimostriamo ora che A è autoaggiunto provando che $(I - A)(D(A)) = L^2([0,1])$. Data $f \in L^2([0,1])$, consideriamo la forma lineare continua su $W_0^{1,2}([0,1])$

$$\Phi(g) = \int_a^b g\overline{f}dx, \qquad g \in W_0^{1,2}([0,1]).$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz-Fréchet esiste ed è unica $h \in W_0^{1,2}([0,1])$ tale che $\Phi(g) = \langle h, g\rangle_{W^{1,2}([0,1])}$ per ogni $g \in W_0^{1,2}([0,1])$, cioè

$$\int_0^1 g\overline{h}dx + \int_0^1 g'\overline{h}'dx = \int_0^1 g\overline{f}dx.$$

Considerando $\overline{g}$ invece di g, si ottiene

$$\int_0^1 \overline{g}\overline{h}dx + \int_0^1 \overline{g}'\overline{h}'dx = \int_0^1 \overline{g}\overline{f}dx,$$

e passando ai coniugati

$$\int_0^1 ghdx + \int_0^1 g'h'dx = \int_0^1 gfdx,$$

cioè

$$-\int_0^1 g'h'dx = \int_0^1 g(h-f)dx,$$

per ogni $g \in W_0^{1,2}([0,1])$. Ciò significa che $h - f$ è la derivata debole di h'. Dunque $h \in W^{2,2}([0,1])$ e $h'' = h - f$. Pertanto $h \in D(A)$ e $h - Ah = f$.

4.2. Teorema di rappresentazione spettrale per operatori illimitati

TEOREMA 4.30. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert separabile H. Allora esistono uno spazio dotato di misura finita (Y, μ), un operatore unitario $U : H \to L^2(Y, \mu)$ ed una funzione $q : Y \to \mathbb{R}$ μ–misurabile tale che*

(1) *$x \in D(T) \;\Leftrightarrow\; Ux \in D(M_q)$,*
(2) *$Tx = U^{-1}M_qUx$ per ogni $x \in D(T)$.*

DIM. In virtù del Teorema 4.16, gli operatori $(T + i)$ e $(T - i)$ con dominio $D(T)$ sono iniettivi e chiusi. Inoltre, $\mathrm{Rg}(T \pm i) = H$. Pertanto esistono gli operatori $(T + i)^{-1}$ e $(T - i)^{-1}$ e, in particolare, questi sono definiti e limitati su H e commutano per l'identità del risolvente.
Ora osserviamo che, per ogni x, $y \in D(T)$, si ha

$$\begin{aligned}\langle (T-i)x, (T+i)^{-1}(T+i)y\rangle &= \langle (T-i)x, y\rangle \\ &= \langle x, (T+i)y\rangle \\ &= \langle (T-i)^{-1}(T-i)x, (T+i)y\rangle .\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{Rg}(T \pm i) = H$, per ogni $z_1, z_2 \in H$, si ha

$$\langle z_1, (T+i)^{-1}z_2\rangle = \langle (T-i)^{-1}z_1, z_2\rangle .$$

Questo assicura che $((T + i)^{-1})^* = (T - i)^{-1}$, ovvero che $T + i$ è un operatore normale. Allora per il Teorema 3.21 esiste un spazio dotato di misura finita (Y, μ), un operatore unitario $U : H \to L^2(Y, \mu)$ ed una funzione μ–misurabile limitata $m : Y \to \mathbb{C}$ tale che $U(T + i)^{-1}U^{-1} = M_m$. Poichè $\ker(T + i)^{-1} = \{0\}$, necessariamente $m \neq 0$ μ-q.o. così che possiamo definire la funzione $q := m^{-1} - i$. Chiaramente, q è una funzione μ–misurabile.
Proviamo ora che le proprietà (1) e (2) sono soddisfatte.
Fissato $x \in D(T)$ e posto $y := (T + i)x$, si ha che $x = (T + i)^{-1}y = U^{-1}M_mUy$. Ne segue che $Ux = M_mUy$ così che $(U^{-1}M_{\frac{1}{m}}U)x = y =$

$Tx + ix$. Di conseguenza, $Tx = (U^{-1}M_{\frac{1}{m}}U)x - iU^{-1}Ux = U^{-1}M_qUx$. Ciò implica che $Ux \in D(M_q)$ e che la proprietà (2) è soddisfatta.
Viceversa, se $x \in U^{-1}(D(M_q))$, allora $Ux \in D(M_q)$ e

$$U^{-1}M_qUx = (U^{-1}M_{\frac{1}{m}}U)x - ix\,.$$

Posto $z := U^{-1}M_{\frac{1}{m}}$, si dimostra facilmente che $x = (T+i)^{-1}z$ così che $x \in D(T)$ e $U^{-1}M_qUx = Tx + ix - ix = Tx$.
Infine, ricordando che T è autoaggiunto, possiamo applicare il Corollario 4.27 per affermare $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Ora, tenuto conto che $\sigma(T) = q_{\text{ess}}(Y)$, ne segue che q deve essere a valori reali. $\square$

Definizione 4.31. *Si dice che un operatore $T\colon D(T) \subseteq H \to H$ ha risolvente compatto se $\rho(T) \neq \emptyset$ e $R(\lambda, T)$ è un operatore compatto per ogni $\lambda \in \rho(T)$.*

La seguente proposizione fornisce un'utile caratterizzazione degli operatori con risolvente compatto.

Proposizione 4.32. *Sia $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operatore lineare con $\rho(T) \neq \emptyset$. Allora T ha risolvente compatto se e solo se l'immersione canonica $\iota : (D(T), ||\cdot||_T) \hookrightarrow H$ è compatta, dove $||\cdot||_T$ indica la norma del grafico.*

Dim. Poniamo $H_1 = (D(T), ||\cdot||_T)$. Se T ha risolvente compatto, allora $\iota = (\lambda - A)R(\lambda, A)$ è un operatore compatto, poichè $\lambda - A : H_1 \to H$ è un operatore continuo e $R(\lambda, A) : H \to H_1$ è un operatore compatto. Viceversa, sia ι un operatore compatto. Osserviamo che $R(\lambda, A) : H \to H_1$ è un operatore continuo. Dunque $R(\lambda, A)$, come operatore da H in $D(A)$, è compatto perchè composizione di un operatore continuo con l'immersione compatta ι. $\square$

Proposizione 4.33 (Teorema dell'applicazione spettrale per i risolventi). *Sia $T : D(T) \subseteq X \to X$ un operatore lineare su X e sia $\lambda \in \rho(T)$. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) $\sigma(R(\lambda, T)) \setminus \{0\} = \{\frac{1}{\lambda - \mu} \mid \mu \in \sigma(T)\}$.
(2) $\sigma_p(R(\lambda, T)) \setminus \{0\} = \{\frac{1}{\lambda - \mu} \mid \mu \in \sigma_p(T)\}$.

Dim. Fissato $\mu \in \rho(T) \setminus \{\lambda\}$, osserviamo che l'operatore S così definito

$$S := (\lambda - \mu)(\lambda - T)R(\mu, T)$$

soddisfa

$$S = (\lambda - \mu)(\lambda - \mu)R(\mu, T) + (\lambda - \mu)I \in \mathcal{L}(X).$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\lambda-\mu}-R(\lambda,T)\right)S &= (\lambda-T)R(\mu,T)-(\lambda-\mu)R(\mu,T)\\
&= (\mu-T)R(\mu,T)=I,\\
S\left(\frac{1}{\lambda-\mu}-R(\lambda,T)\right) &= (\lambda-T)R(\mu,T)-(\lambda-\mu)R(\mu,T)\\
&= (\mu-T)R(\mu,T)=I.
\end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che esiste

$$\left(\frac{1}{\lambda-\mu}-R(\lambda,T)\right)^{-1}=S=(\lambda-\mu)(\lambda-T)R(\mu,T)\in\mathcal{L}(X), \tag{4.39}$$

dunque $\frac{1}{\lambda-\mu}\in\rho(R(\lambda,T))$.
Possiamo ora dimostrare la proprietà (1). Sia $\nu\in\sigma(R(\lambda,T))\setminus\{0\}$. Nel caso in cui $\nu\neq\frac{1}{\lambda-\mu}$ per ogni $\mu\in\sigma(T)$, il numero complesso $\lambda-\frac{1}{\nu}$ non può appartenere allo $\sigma(T)$. Pertanto $\lambda-\frac{1}{\nu}\in\rho(T)$. Dato che $\lambda-\frac{1}{\nu}\neq\lambda$, per quanto dimostrato sopra possiamo concludere che $\nu\in\rho(R(\lambda,T))$ e che, per l'identità (4.39),

$$(\nu-R(\lambda,T))^{-1}=\frac{1}{\nu}(\lambda-T)R\left(\lambda-\frac{1}{\nu},T\right).$$

Questo è un assurdo.
Viceversa, sia $\nu=\frac{1}{\lambda-\mu}$ con $\mu\in\sigma(T)$. Supponiamo che $\nu\in\rho(R(\lambda,T))$ e consideriamo l'operatore S_1 così definito $S_1:=\nu R(\lambda,T)(\nu-R(\lambda,T))^{-1}$. Allora

$$\begin{aligned}
(\mu-T)S_1 &= (\mu-T)\nu R(\lambda,T)(\nu-R(\lambda,T))^{-1}\\
&= (\mu-\lambda+\lambda-T)\nu R(\lambda,T)(\nu-R(\lambda,T))^{-1}\\
&= (-R(\lambda,T)+\nu)(\nu-R(\lambda,T))^{-1}=I\\
S_1(\mu-T) &= \nu R(\lambda,T)(\nu-R(\lambda,T))^{-1}(\mu-T)=I,
\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è utilizzato il fatto che $R(\lambda,T)$ e $(\nu-R(\lambda,T))^{-1}$ commutano. Questo significa che $\mu\in\rho(T)$, ottenendo così un assurdo.
Per la dimostrazione della proprietà (2) si procede in modo analogo utilizzando la definizione di spettro puntuale. □

Osservazione 4.34. Se $D(T)$ è denso in X, ma $D(T)\neq X$, allora

$$\sigma(R(\lambda,T))=\{0\}\cup\{\frac{1}{\lambda-\mu}\mid\mu\in\sigma(T)\}.$$

Infatti, poiché $\mathrm{Rg}(R(\lambda,T))=D(T)$ e $D(T)\neq X$, $R(\lambda,T)$ non può essere invertibile e dunque $0\in\sigma(R(\lambda,T))$.

Teorema 4.35. *Sia $T:D(T)\subseteq H\to H$ un operatore lineare su H con risolvente compatto. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(1) $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.
(2) $\sigma(T)$ *è finito oppure* $\sigma(T) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C}$ *con* $|\lambda_n| \to +\infty$.
(3) $\dim \ker(\lambda - T) = \infty$ *per ogni* $\lambda \in \sigma(T)$.

Dim. Basta applicare la Proposizione 4.33. □

Teorema 4.36. *Sia* $T : D(T) \subseteq H \to H$ *un operatore autoaggiunto con risolvente compatto su uno spazio di Hilbert separabile* H*. Allora esistono una successsione* $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}$ *ed un sistema ortonormale completo* $\{e_n\}_n$ *di* H*, con* $e_n \in D(T)$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, tali che*

(1) $Te_n = \lambda_n e_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$,
(2) $D(T) = \{x \in H \mid (\lambda_n \langle x, e_n \rangle) \in l^2\}$,
(3) $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$ *per ogni* $x \in D(T)$.

Dim. Per il Teorema 4.35 esiste certamente $\mu \in \mathbb{R}$ con $\mu > 0$ tale che $\mu \in \rho(T)$. L'operatore $R(\mu, T)$ è compatto, in quanto T è un operatore con risolvente compatto. Inoltre, $R(\mu, T)$ è un operatore autoaggiunto perché lo è T. Infatti, per ogni $y_1, y_2 \in H$, dato che per ogni $i = 1, 2$ esiste $x_i \in D(T)$ tale che $y_i = (\mu - T)x_i$, si ha

$$\langle R(\mu, T)y_1, y_2 \rangle = \langle x_1, (\mu - T)x_2 \rangle = \langle (\mu - T)x_1, x_2 \rangle = \langle y_1, R(\mu, T)y_2 \rangle \,.$$

Allora per il Teorema 2.28 esistono un sistema ortonormale completo $\{e_n\}_n$ di H ed una successione $(\alpha_n)_n$ di numeri reali tali che $R(\mu, T)e_n = \alpha_n e_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per cui

$$\forall x \in H \quad R(\mu, T)x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, e_n \rangle e_n \,.$$

Siccome $R(\mu, T)$ è iniettivo, ogni autovalore α_n è diverso da 0. Di conseguenza, $e_n \in D(T)$ e $Te_n = (\mu - \alpha_n^{-1})e_n$ con $\lambda_n := \mu - \alpha_n^{-1} \in \mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Abbiamo così provato la proprietà (1).
Ora, se $x \in D(T)$, per l'ortonormalità di $\{e_n\}_n$,

$$(\lambda_n \langle x, e_n \rangle)_n = (\langle x, Te_n \rangle)_n = (\langle Tx, e_n \rangle)_n \in l^2$$

e

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \,.$$

Da questo seguono la proprietà (3) e un'inclusione della proprietà (2). Per dimostrare l'inclusione inversa procediamo come segue.
Preso $x \in H$ tale che $(\lambda_n \langle x, e_n \rangle)_n \in l^2$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$x_k := \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{e} \quad y_k := \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \,.$$

Chiaramente, $x_k \in D(T)$ e $Tx_k = y_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Inoltre, $x_k \to x$ e $Tx_k \to \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$ in H. Poiché T è chiuso, deduciamo che necessariamente $x \in D(T)$ e $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

ESEMPIO 4.37. L'operatore di Laplace con condizioni di Dirichlet considerato nell'Esempio 4.29 ha risolvente compatto. Per dimostrarlo, osserviamo innanzitutto che l'immersione $(D(A), ||\cdot||_A) \hookrightarrow W^{1,2}([0,1])$ è continua. Infatti, se $(f_n)_n \subseteq D(A)$ converge a f rispetto a $||\cdot||_A$ e $\lim_n f_n = g$ in $W^{1,2}([0,1])$, allora $\lim_n f_n = f$ e $\lim_n f_n = g$ in $L^2([0,1])$. Pertanto $f = g$. Ricordando che $(D(A), ||\cdot||_A)$ è uno spazio di Banach, poichè A è chiuso, per il teorema del grafico chiuso si ottiene che l'immersione è continua. Inoltre l'immersione du $W^{1,2}([0,1]) \hookrightarrow L^2([0,1])$ è compatta, pertanto anche l'immersione $(D(A), ||\cdot||_A) \hookrightarrow L^2([0,1])$ è compatta. Per la Proposizione 4.32, $(A, D(A))$ ha risolvente compatto. Si dimostra poi facilmente che, per ogni $f \in L^2([0,1])$,

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2 \left(\int_0^1 f(x) e_n(x) dx \right) e_n$$

dove $e_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$.

4.3. Operatori positivi e teoremi di minimax per autovalori

DEFINIZIONE 4.38. *Sia $T : D(T) \subset H \to H$ un operatore simmetrico. T si dice positivo se*

$$\forall x \in D(T) \quad \langle Tx, x\rangle \geq 0.$$

Se S e T sono operatori simmetrici su H e $D(S) = D(T)$, allora si dice che $S \leq T$ se $T - S \geq 0$.

OSSERVAZIONE 4.39. Se $c \in \mathbb{R}$, allora

$$T \geq cI \iff \forall x \in D(T) \ \ \langle Tx, x\rangle \geq c||x||^2 .$$

In particolare, se T è un operatore simmetrico e positivo, allora $-T$ è un operatore dissipativo.

Grazie al Teorema di rappresentazione spettrale 4.30 possiamo dimostrare la seguente caratterizzazione.

TEOREMA 4.40. *Siano $T : D(T) \subset H \to H$ un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert separabile H e $c \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti le seguenti proprietà.*

(i) $\langle Tx, x\rangle \geq c||x||^2$ *per ogni $x \in D(T)$.*
(ii) $\sigma(T) \subseteq [c, +\infty[$.

In particolare, $T \geq 0$ se e solo se $\sigma(T) \subseteq [0, +\infty[$.

Dim. Per il Teorema 4.30 esistono uno spazio di misura finita (Y, μ), una funzione limitata μ–misurabile $q : Y \to \mathbb{R}$ e un operatore unitario $U : H \to L^2(Y, \mu)$ tali che $T = U^{-1} M_q U$. Allora possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}
\forall x \in D(T) \ \ \langle Tx, x\rangle \geq c||x||^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in D(T) \ \ \langle U^{-1}M_qUx, x\rangle \geq c||x||^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall f \in D(M_q) \ \ \langle U^{-1}M_q f, U^{-1}f\rangle \geq \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \geq c||U^{-1}f||^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall f \in D(M_q) \ \ \langle M_q f, f\rangle \geq c||f||^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall f \in D(M_q) \int_Y q|f|^2 d\mu \geq c \int_Y |f|^2 d\mu \\
&\Leftrightarrow \quad q \geq c \ \ \mu - \text{q.o.} \Leftrightarrow q_{\text{ess}}(\Omega) \subseteq [c, +\infty[\\
&\Leftrightarrow \quad \sigma(T) \subseteq [c, +\infty[. \qquad \Box
\end{aligned}$$

.

Teorema 4.41 (Formula variazionale di Rayleigh-Ritz). *Sia $T : D(T) \subset H \to H$ un operatore autoaggiunto, positivo con risolvente compatto su uno spazio di Hilbert separabile H. Sia $\{\lambda_n\}_n$ la successione degli autovalori di T ordinati in modo crescente e ripetuti secondo la loro molteplicità. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lambda_n = \inf\{\lambda(L) \mid L \subset D(T), \ \dim L = n\} \tag{4.40}$$

dove

$$\lambda(L) := \sup\{\langle Tx, x\rangle \mid x \in L \text{ e } ||x|| = 1\}\,. \tag{4.41}$$

Dim. Osserviamo prima che se L è un sottospazio finito dimensionale di H con $L \subset D(T)$, allora $T_{|L}$ è chiaramente un operatore limitato così che esiste $c > 0$ tale che $0 \leq \langle Tx, x\rangle \leq c||x||^2$ per ogni $x \in L$. Di conseguenza, $0 \leq \lambda(L) < +\infty$.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $\mu_n := \inf\{\lambda(L) \mid L \subset D(T), \ \dim L = n\}$ e dimostriamo che $\mu_n = \lambda_n$.
Per il Teorema 4.36 esiste un sistema ortonormale completo $\{\varphi_n\}_n \subset D(T)$ di H tale che $T\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n\rangle\varphi_n$ per ogni $x \in D(T)$. Posto $L := \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, se $f \in L$ con $||f|| = 1$, allora

$$f = \sum_{i=1}^{n} \langle f, \varphi_i\rangle\varphi_i, \quad Tf = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f, \varphi_i\rangle\varphi_i\,,$$

così che

$$\langle Tf, f\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\langle f, \varphi_i\rangle|^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} |\langle f, \varphi_i\rangle|^2 = \lambda_n\,.$$

Ne segue che $\lambda(L) \leq \lambda_n$. Ciò implica che $\mu_n \leq \lambda_n$, ricordando la definizione di μ_n.

Viceversa, fissiamo un sottospazio L di $D(T)$ con dimensione n e consideriamo la proiezione ortogonale P su $G = \mathrm{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}\}$ definita da

$$\forall f \in H \quad Pf = \sum_{i=1}^{n-1} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \, .$$

Allora esiste $f \in L$ con $||f|| = 1$ tale che $Pf = 0$ poiché $\dim G = n - 1 < \dim L$. Di conseguenza,

$$f = \sum_{i=n}^{\infty} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i, \qquad Tf = \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \, .$$

Da ciò segue che

$$\langle Tf, f \rangle = \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 \geq \lambda_n \sum_{i=n}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \lambda_n.$$

Pertanto $\lambda(L) \geq \lambda_n$. Per l'arbitrarietà di L, concludiamo che $\mu_n \geq \lambda_n$. □

COROLLARIO 4.42. *Siano $T_1 \colon D(T_1) \colon H \to H$ e $T_2 \colon D(T_2) \colon H \to H$ due operatori positivi e autoaggiunti su uno spazio di Hilbert separabile H tali che $T_1 \leq T_2$. Siano $\{\lambda_n^{(1)}\}_n$ e $\{\lambda_n^{(2)}\}_n$ le successioni degli autovalori di T_1 e T_2 rispettivamente, ordinati in modo crescente e ripetuti secondo la loro molteplicità. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lambda_n^{(1)} \leq \lambda_n^{(2)} \, . \tag{4.42}$$

DIM. Poiché $T_1 \leq T_2$, $D := D(T_1) = D(T_2)$ e $\langle T_1 f, f \rangle \leq \langle T_2 f, f \rangle$ per ogni $f \in D$. Allora

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)}(L) &= \sup\{\langle T_1 x, x \rangle \mid x \in L \text{ e } ||x|| = 1\} \\ &\leq \lambda^{(2)}(L) = \sup\{\langle T_2 x, x \rangle \mid x \in L \text{ e } ||x|| = 1\} \end{aligned}$$

per ogni sottospazio $L \subset D$ con $\dim L = n$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Passando agli estremi inferiori la tesi segue in virtù dell'uguaglianza (4.40). □

APPENDICE A

Funzioni olomorfe a valori vettoriali

In questa appendice richiameremo e dimostreremo alcuni risultati di base sulle funzioni olomorfe a valori vettoriali. A tal fine ricordiamo in primis la definizione di integrale per una funzione continua a valori vettoriali, rinviando a [**6**, Ch.3], per ulteriori approfondimenti.

Definizione A.1. *Siano* $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio di Banach e sia* $f : [a, b] \to X$ *una funzione limitata. Diciamo che* f *è integrabile su* $[a, b]$ *se esiste* $x \in X$ *tale che per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni partizione* $\{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ *di* $[a, b]$ *con* $\sup_{i=1,\ldots,n}(t_i - t_{i-1}) < \delta$ *e per ogni scelta di punti* $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ *risulta*

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| < \varepsilon.$$

In tal caso, si pone

$$\int_a^b f(t)dt = x.$$

Si dimostra che ogni funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile.

Proposizione A.2. *Siano* $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio di Banach,* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*,* $f, g : [a, b] \to X$ *integrabili. Allora valgono le seguenti proprietà.*

(a) $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$
(b) $|| \int_a^b f(t)dt|| \leq \max_{t\in[a,b]} ||f(t)||(b - a).$
(c) $|| \int_a^b f(t)dt|| \leq \int_a^b ||f(t)||dt.$
(d) $\langle \int_a^b f(t)dt, x' \rangle = \int_a^b \langle f(t), x' \rangle dt$ *per ogni* $x' \in X'$.
(e) *Se* $(f_n)_n$ *è una successione di funzioni continue da* $[a, b]$ *in* X *tali che* $\lim_n \max_{t\in[a,b]} ||f_n(t) - f(t)|| = 0$*, then* $\lim_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

Nella Proposizione A.2, e anche in seguito, $\langle x, x' \rangle$ sta a indicare $x'(x)$ se $x \in X$ e $x' \in X'$.

Se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to X$ è una funzione continua e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva regolare a tratti, allora l'integrale di f lungo γ è definito come

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Nel seguito, siano X uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$ e Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$.

DEFINIZIONE A.3. *$f : \Omega \to X$ è detta olomorfa in Ω se per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste in X il limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} := f'(z_0).$$

f è detta debolmente olomorfa in Ω se è continua in Ω e la funzione complessa $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$ è olomorfa in Ω per ogni $x' \in X'$.

Ogni funzione olomorfa è chiaramente debolmente olomorfa. In realtà vale il viceversa.

TEOREMA A.4. *Se $f : \Omega \to X$ è debolmente olomorfa in Ω, allora è olomorfa in Ω.*

DIM. Dato $\overline{B(z_0, r)}$ disco chiuso contenuto in Ω, proviamo che per ogni $z \in B(z_0, r)$ vale la seguente formula integrale di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{A.1}$$

Osserviamo che l'espressione a destra di (A.1) è ben definita perchè f è continua. D'altro canto, f è debolmente olomorfa in Ω, quindi per la funzione olomorfa $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$, con $x' \in X'$, vale la formula integrale ordinaria di Cauchy in $B(z_0, r)$, cioè,

$$\langle f(z), x' \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{\langle f(\xi), x' \rangle}{\xi - z} d\xi = \left\langle \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, x' \right\rangle.$$

Per l'arbitrarietà di x' si ottiene (A.1). Differenziando rispetto a z sotto il segno d'integrale, otteniamo che f è olomorfa e

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

per ogni $z \in B(z_0, r)$ e $n \in \mathbb{N}$. $\square$

DEFINIZIONE A.5. *Si dice che $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è rappresentabile in serie di potenze nel punto $z_0 \in \Omega$ se esistono una successione $(a_n)_n$ a valori in X e*

$r > 0$ tali che $B(z_0, r) \subset \Omega$ e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{in } B(z_0, r).$$

Teorema A.6. *Sia $f : \Omega \to X$ una funzione continua. Allora f è olomorfa se e solo se f è rappresentabile in serie di potenze in ogni punto di Ω.*

Dim. Supponiamo che f sia olomorfa in Ω. Allora se $z_0 \in \Omega$ e $B(z_0, r) \subset \Omega$, la formula integrale di Cauchy (A.1) vale per ogni $z \in B(z_0, r)$. Se $z \in B(z_0, r)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{\xi - z}$$

converge uniformemente rispetto a ξ in $\partial B(z_0, r)$, poichè $\big|(z - z_0)/(\xi - z_0)| = r^{-1}|z - z_0|$. Allora per (A.1) e la Proposizione A.2(e), si ottiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \Big] (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

dove la serie converge in X.

Viceversa, supponiamo che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, r),$$

dove (a_n) è una successione in X. Allora f è continua, e per ogni $x' \in X'$,

$$\langle f(z), x' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle a_n, x' \rangle (z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, r).$$

Dunque la funzione $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$ è olomorfa in $B(z_0, r)$ per ogni $x' \in X'$ e quindi f è olomorfa per il Teorema A.4. □

Teorema A.7 (Teorema di Cauchy). *Sia $f : \Omega \to X$ olomorfa in Ω e sia $D \subseteq \Omega$ un dominio regolare. Allora*

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

Dim. Basta osservare che per ogni $x' \in X'$ la funzione $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$ è olomorfa in Ω e quindi

$$0 = \int_{\partial D} \langle f(z), x' \rangle dz = \Big\langle \int_{\partial D} f(z) dz, x' \Big\rangle.$$

□

Teorema A.8 (Sviluppo di Laurent). *Sia* $f : D := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \to X$ *olomorfa. Allora, per ogni* $z \in D$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,\varrho)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

e $r < \varrho < R$.

Dim. Per ogni $x' \in X'$, la funzione $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$ è olomorfa in D, quindi

$$\langle f(z), x' \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(x')(z - z_0)^n$$

dove

$$a_n(x') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,\varrho)} \frac{\langle f(z), x' \rangle}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Per la Proposizione A.2(d), si ha che

$$a_n(x') = \langle a_n, x' \rangle, \quad n \in \mathbb{Z},$$

dove a_n ha l'espressione indicata nell'enunciato. $\square$

APPENDICE B

Il teorema di Stone Weierstrass

Definizione B.1. *Siano X un insieme non vuoto e A un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni a valori reali (risp. complessi) su X. Si dice che A è un algebra funzionale reale (risp. complessa) se per ogni $f, g \in A$ si ha che $fg \in A$. Un sottospazio $B \subseteq A$ è detto una sottoalgebra di A se B è un algebra.*

Esempio B.2. Sia X uno spazio topologico e sia $C(X, \mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni reali e continue su X. $C(X, \mathbb{R})$ è un'algebra reale funzionale. Il sottospazio $BC(X, \mathbb{R})$ delle funzioni reali limitate e continue su X è una sottoalgebra di $C(X, \mathbb{R})$.

É noto che lo spazio $BC(X, \mathbb{R})$ dotato della norma

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad (f \in BC(X, \mathbb{R}))$$

è uno spazio di Banach.

Definizione B.3. *Date le funzioni $f, g : X \to \mathbb{R}$, si indicano con $f \vee g$ e $f \wedge g$ le funzioni così definite*

$$(f \vee g)(x) := \max\{f(x),\ g(x)\}, \qquad (f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\} \qquad (x \in X)\,.$$

Osservazione B.4. Si prova facilmente che

$$f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \qquad f \wedge g = \frac{f + g - |f - g|}{2}\,.$$

Quindi, se f e g sono funzioni reali continue su uno spazio topologico X, allora anche $f \vee g$ e $f \wedge g$ sono funzioni reali continue su X.

Per quello che segue è bene ricordare che

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \ \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!}$$

e che

Lemma B.5. *Se $\alpha > 0$, allora per ogni $x \in [-1,1]$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$$

e la convergenza della serie è totale in $[-1,1]$.

Dim. Il comportamento della serie binomiale in $]-1,1[$ è un fatto ben noto La convergenza assoluta della serie binomiale in -1 e 1 segue dal criterio di Raabe osservando che

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|} - 1\right) = 1+\alpha\,. \quad \square$$

Teorema B.6. *Sia X uno spazio topologico e sia A una sottoalgebra di $BC(X,\mathbb{R})$. Allora la chiusura $\overline{A}$ di A rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ è una sottoalgebra di $BC(X,\mathbb{R})$. Inoltre, se $f,g \in \overline{A}$, allora $|f|$, $f\vee g$ e $f \wedge g \in \overline{A}$.*

Dim. Siano $f,g \in \overline{A}$. Allora esistono delle successioni $(f_n)_n,\ (g_n)_n \subset A$ tali che

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \qquad \text{e} \qquad \|g_n - g\|_\infty \to 0\,.$$

Poiché A è un'algebra, $(f_n+g_n)_n,\ (\alpha f_n)_n,\ (f_n g_n)_n \subset A$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Dalle seguenti diseguaglianze

$$\begin{array}{rcl} \|f_n + g_n - f - g\|_\infty & \leq & \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty \\ \|\alpha f_n - \alpha f\|_\infty & = & |\alpha|\|f_n - f\|_\infty \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ \|f_n g_n - fg\|_\infty & = & \|f(g-g_n) + g_n(f-f_n)\|_\infty \\ & \leq & \|f\|\|g-g_n\| + \|g_n\|\|f-f_n\| \end{array}$$

segue che $f_n + g_n \to f+g$, $\alpha f_n \to \alpha f$ e $f_n g_n \to fg$ in $(BC(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ quando $n\to\infty$. Di conseguenza, anche $f+g,\ \alpha f,\ fg \in \overline{A}$. Abbiamo così provato che $\overline{A}$ è una sottoalgebra di $BC(X,\mathbb{R})$.
Sia ora $f \in \overline{A}$ con $\|f\| \neq 0$. Per provare che $|f| \in \overline{A}$, procediamo come segue.
Osserviamo che, per il Lemma B.5,

$$\forall t \in [0,1] \quad \sqrt{t} = [1+(t-1)]^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (t-1)^k$$

e che la convergenza della serie è uniforme su [0,1].
Posto $p_n(t) := \sum_{k=0}^n \binom{\frac{1}{2}}{k}(t-1)^k$, allora p_n è un polinomio di grado n e $\lim_{n\to+\infty} p_n(0) = 0$. Di conseguenza, il polinomio $q_n := p_n - p_n(0)$ è omogeneo e $\lim_{n\to\infty} q_n(t) = \lim_{n\to\infty} p_n(t) - p_n(0) = \sqrt{t}$ uniformemente su $[0,1]$. In particolare,

$$|t| = \sqrt{t^2} = \lim_{n\to\infty} q_n(t^2)$$

uniformemente su $[-1,1]$.
Poiché $\left|\frac{f}{\|f\|_\infty}\right| \leq 1$, possiamo scrivere che

$$\frac{|f|}{\|f\|_\infty} = \lim_{n\to\infty} q_n\left(\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2}\right) \quad \text{in } (BC(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)\,. \tag{B.1}$$

Dato che $f^2 \in \overline{A}$ così che $\frac{f^2}{\|f\|^2} \in \overline{A}$, anche $q_n\left(\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2}\right) \in \overline{A}$. Per (B.1) ne segue che $\frac{|f|}{\|f\|} \in \overline{A}$ e quindi che $|f| \in \overline{A}$. □

Definizione B.7. *Sia X un insieme non vuoto e sia A un insieme di funzioni reali definite su X. Si dice che A separa i punti di X se*

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \ \exists f \in A\ \ f(x) \neq f(y).$$

Lemma B.8. *Sia X un insieme non vuoto e sia A uno spazio vettoriale di funzioni reali su X che separa i punti di X e che contiene le funzioni costanti. Allora*

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \forall a,\, b \in \mathbb{R}\ \ \exists f \in A\ \ f(x) = a \ \text{ e } \ f(y) = b\,.$$

Dim. Siano $x, y \in X$ tali che $x \neq y$. Per ipotesi esiste $g \in A$ tale che $g(x) \neq g(y)$. Posto $f := a + \frac{b-a}{g(y)-g(x)}(g - g(x))$, la funzione $f \in A$ poiché è una combinazione lineare della funzione g e di funzioni costanti. Inoltre, la funzione f chiaramente verifica $f(x) = a$ e $f(y) = b$. □

Teorema B.9 (Teorema di Stone-Weierstrass - reale). *Siano X uno spazio topologico compatto e A una sottoalgebra di $C(X,\mathbb{R})$ che separa i punti di X e che contiene le funzioni costanti. Allora A è una sottoalgebra densa di $C(X,\mathbb{R})$.*

Dim. Fissati $f \in C(X,\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$, per provare che esiste $g \in A$ tale che $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ procediamo come segue.

Per ogni $x, y \in X$ tali che $x \neq y$ scegliamo $h_{x,y} \in A$ tale che $h_{x,y}(x) = f(x)$ e $h_{x,y}(y) = f(y)$. Nel caso in cui $x = y$, poniamo $h_{x,x} = f$. Consideriamo ora l'insieme così definito

$$V_{x,y} := \{t \in X \mid h_{x,y}(t) < f(t) + \varepsilon\}\,.$$

Allora x, $y \in V_{x,y}$ e $V_{x,y}$ è un sottoinsieme aperto di X. Infatti, la funzione $\phi := h_{x,y} - f$ è continua in X così che $V_{x,y} = \phi^{-1}(]-\infty, \varepsilon[)$ è un sottoinsieme aperto di X.
Dato che per ogni $x \in X$ la famiglia $\{V_{x,y} \mid y \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X, esistono $y_1, \ldots, y_n \in X$ tali che

$$X = V_{x,y_1} \cup \ldots \cup V_{x,y_n}\,.$$

A questo punto, per ogni $x \in X$ consideriamo la funzione così definita

$$g_x := h_{x,y_1} \wedge \cdots \wedge h_{x,y_m}\,.$$

Allora $g_x \in \overline{A}$ e $g_x(x) = f(x)$. Inoltre, se $t \in X$, esiste $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $t \in V_{x,y_i}$. Di conseguenza, $g_x(t) \le h_{x,y_i} < f(t) + \varepsilon$.
Per ogni $x \in X$ poniamo

$$W_x := \{t \in X : \; g_x(t) > f(t) - \varepsilon\}\,.$$

Procedendo come prima, si dimostra che $x \in W_x$ e che W_x è un sottoinsieme aperto di X. Allora $\{W_x \mid x \in X\}$ è anche un ricoprimento aperto di X. Pertanto, esistono $x_1, \ldots, x_m \in X$ tali che

$$X = W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_m}\,.$$

Consideriamo ora la funzione così definita

$$g := g_{x_1} \vee \cdots \vee g_{x_m}\,.$$

Allora $g \in \overline{A}$. Inoltre, per ogni $t \in X$ esistono $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ tali che

$$g_x(t) = g_{x_i}(t) < f(t) + \varepsilon \quad \text{e} \quad t \in W_{x_j}$$

il che implica che

$$g_x(t) \ge g_{x_j}(t) > f(t) - \varepsilon.$$

Pertanto, $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. $\square$

Teorema B.10 (Teorema di approssimazione di Weierstrass). *Siano K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ e $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste un polinomio P tale che $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$.*

Dim. Sia A l'insieme di tutti i polinomi del tipo

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (a_k \in \mathbb{R})$$

con dominio ristretto a K. Allora A è una sottoalgebra di $C(K)$ che contiene le funzioni costanti e che separa i punti di K (basta prendere $P(x) = x$). Per il teorema precedente segue quindi la tesi. $\square$

Concludiamo con alcune considerazioni sulla validità del teorema di Stone-Weierstrass nel caso complesso.

Esempio B.11. Consideriamo un compatto $K \subseteq \mathbb{C}$ con parte interna $\mathrm{int}(K)$ non vuota e l'insieme così definito

$$A := \{f \in C(X, \mathbb{C}) : \; \text{f analitica in } \mathrm{int}(K)\}\,.$$

Allora A è una sottoalgebra di $C(X, \mathbb{C})$, contiene le funzioni costanti e separa i punti di K (basta considerare $f(z) = z$). Inoltre A è una sottoalgebra

chiusa di $C(X,\mathbb{C})$ poiché limiti uniformi di funzioni analitiche sono ancora funzioni analitiche. D'altro canto $A \neq C(X,\mathbb{C})$ poichè ad esempio $g(z) = |z| \notin A$. Quindi il teorema di Stone-Weierstrass non vale nel caso complesso nella formulazione appena vista.
Con un esempio più articolato si può provare anche che lo spazio dei polinomi complessi non è denso nello spazio delle funzioni continue complesse su un compatto di $\mathbb{C}$ (vedi [**15**]).

Teorema B.12 (Teorema di Stone-Weierstrass-complesso). *Siano X uno spazio topologico compatto e A una sottoalgebra di $C(X,\mathbb{C})$ che separa i punti di X, contiene le costanti ed è chiusa rispetto alla coniugazione, i.e., $\overline{f} \in A$ per ogni $f \in A$. Allora A è una sottoalgebra densa di $C(X,\mathbb{C})$.*

Dim. Sia $A_0 := \{\mathrm{Re} f \mid f \in A\}$. Allora A_0 è un sottospazio vettoriale di $C(X,\mathbb{R})$. In particolare, se $f \in A$, allora $\mathrm{Im}\, f = -\mathrm{Re}\, if \in A_0$ e, per ogni $f, g \in A$,

$$\mathrm{Re}\, f \cdot \mathrm{Re}\, g = \mathrm{Re}\, \frac{1}{2}(fg + f\overline{g}) \in A_0\,.$$

Pertanto, A_0 è una sottoalgebra di $C(X,\mathbb{R})$ che contiene le funzioni costanti. Inoltre, se $x, y \in X$, con $x \neq y$, esiste $h \in A$ tale che $h(x) \neq h(y)$. Questo implica che $\mathrm{Re}\, h(x) \neq \mathrm{Re}\, h(y)$ oppure $\mathrm{Im}\, h(x) \neq \mathrm{Im}\, h(y)$. Quindi A_0 separa i punti di X. Allora, per il teorema di Stone–Weierstass, possiamo concludere che A_0 è una sottoalgebra densa di $C(X,\mathbb{R})$.
Sia ora $f \in C(X,\mathbb{C})$. Per quanto appena provato, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $h_1,\ h_2 \in A_0$ tali che

$$\|\mathrm{Re}\, f - h_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|\mathrm{Im}\, f - h_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

da cui segue che $\|f - h_1 + ih_2\|_\infty < \varepsilon$. Questo completa la dimostrazione. □

Corollario B.13. *Siano K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ e $f : K \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Allora esiste un polinomio P a coefficienti complessi tale che $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$.*

Dim. Sia A l'insieme di tutti i polinomi del tipo

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (a_k \in \mathbb{R})$$

con dominio ristretto a K. Allora A è una sottoalgebra di $C(K,\mathbb{C})$ che contiene le funzioni costanti, separa i punti di K (basta prendere $P(x) = x$) ed è chiusa rispetto alla coniugazione. Per il teorema precedente segue quindi la tesi. □

Corollario B.14. *Sia* $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. *Allora lo spazio delle funzioni del tipo*

$$P(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k \qquad (a_k \in \mathbb{C})$$

è denso in $C(X, \mathbb{C})$.

Dim. Basta osservare che $\overline{z} = z^{-1}$ in X. □

Corollario B.15. *Siano* K *un sottoinsieme compatto di* $\mathbb{C}$ *e* $f : K \to \mathbb{C}$ *una funzione continua. Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un polinomio* $P(x, y)$ *in due variabili a coefficienti complessi tale che* $\sup_K |f(z) - P(z, \overline{z})| < \varepsilon$.

Dim. Basta osservare che l'insieme delle funzioni del tipo $P(z, \overline{z})$, con P polinomio in due variabili a coefficienti complessi, è una sottoalgebra di $C(K, \mathbb{C})$ che verifica tutte le ipotesi del Teorema B.12. □

Bibliografia

[1] W. Arendt, R. Chill, et al.: Semigroups generated by elliptic operators, Internet Seminar 1999-2000.

[2] S. Bernau: The spectral theorem for normal opeators, J. London Math. Soc. 40 (1965), 478–486.

[3] S. Bernau, F. Smithies: A note on normal operators, Proc. Camb. Phil. Soc. 59 (1963), 727–729.

[4] H. Brezis: Analisi Funzionale, Liguori Editore, Napoli, 1986.

[5] E. B. Davies: Spectral Theory and Differential Operators, Cambridge University Press, 1995.

[6] N. Dunford, J. Schwartz: Linear Operators, Vol. I, Interscience, New York, 1958.

[7] K-J. Engel, R. Nagel: One-parameter semigroups for linear evolution equations, Springer, 2000.

[8] M. Fabian, P. Habala, V. Montesinos Santalucia, J. Pelant, V. Zizler: Functional Analysis and Infinite–Dimensional Geometry, Springer, 2001.

[9] S. Fornaro: Semigruppo del calore e congruenza dei domini, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Lecce, Corso di Laurea in Matematica, a.a. 1998–99.

[10] P. R. Halmos: What does the spectral theorem say?, Amer. Math. Monthly 70 (3) (1963), 241–247.

[11] P. R. Halmos: Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity, Chelsea Publishing Company, New York, 1957

[12] M. Reed, B. Simon: Methods of modern mathematical physics I, Functional Analysis. Academic Press, 1972.

[13] W. Rudin: Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973.

[14] W. Rudin: Analisi reale e complessa, Bollati Boringhieri, Torino, 1991.

[15] K. Stromberg: An Introduction to Classical Real Analysis, Wadsworth International Group, Belmont, California, 1981.

[16] R. Whitley: The Spectral Theorem for a normal operator, Amer. Math. Monthly 75 (8) (1968), 856–861.

A. Albanese: angela.albanese@unisalento.it

E. Mangino: elisabetta.mangino@unisalento.it