CAPITOLO 5

Stima del gradiente

1. Per l'equazione di Laplace

Nel caso delle funzioni armoniche, dall'integrale di Poisson (5)

$$u(x) = \frac{\varrho^2 - |x-x_0|^2}{n\omega_n \varrho} \int\limits_{|y-x_0|=\varrho} \frac{u(y)}{|x-y|^n} d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

si ricava

$$\begin{aligned} Du(x) &= -2\frac{x-x_0}{n\omega_n\varrho} \int\limits_{|y-x_0|=\varrho} \frac{u(y)}{|x-y|^n} d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &\quad -n\frac{\varrho^2 - |x-x_0|^2}{n\omega_n\varrho} \int\limits_{|y-x_0|=\varrho} \frac{u(y)(x-y)}{|x-y|^{n+2}} d\mathcal{H}^{n-1}(y), \end{aligned}$$

da cui

$$|Du(x_0)| = \frac{\varrho}{\omega_n} \left| \int\limits_{|y-x_0|=\varrho} \frac{u(y)(y-x_0)}{|y-x_0|^{n+2}} d\mathcal{H}^{n-1}(y) \right|.$$

Quindi

$$|Du(x_0)| \leq \frac{n}{\varrho} \Lambda_n(x_0, \varrho)$$

dove

$$\Lambda_n(x_0,\varrho) = \frac{1}{2}\left(\sup_{|y-x_0|=\varrho} u(y) - \inf_{|y-x_0|=\varrho} u(y) \right).$$

2. Per l'equazione delle superficie minime

Nel caso delle soluzioni dell'equazione delle superficie minime, una diseguaglianza del tipo di quella provata per le funzioni armoniche è molto più riposta.

Finn nel caso $n = 2$ dimostrò il seguente Teorema.

Teorema 5.1 (Finn [**15**]). *Se $z(x,y)$ risolve l'equazione delle superficie minime in $\{(x,y) : x^2+y^2 < R^2\}$ ed è positiva, allora*

$$\sqrt{1+|D_x z(0,0)|^2+|D_y z(0,0)|^2} \le C \exp\left(\frac{\pi z(0,0)}{2R}\right),$$

dove $C = 1.03894$ e il fattore $\pi/2$ non è migliorabile.

3. Il Teorema di Bombieri, De Giorgi e Miranda

Teorema 5.2 (Bombieri, De Giorgi, Miranda [**5**]). *Se u risolve l'equazione delle superficie minime in $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ ed è positiva, allora*

$$\sqrt{1+|Du(0)|^2} \le C_1(n) \exp\left(\frac{C_2(n)u(0)}{R}\right).$$

La dimostrazione di questo Teorema che presentiamo qui è presa dall'articolo di Neil Trudinger (1942–) [**39**]; prima di procedere abbiamo bisogno di alcune definizioni e risultati preliminari.

4. Calcolo differenziale sulle superficie

Supponiamo di avere un aperto $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e una funzione $h \in \mathcal{C}^2(A)$ con $Dh \neq 0$ in ogni punto; se $\mathcal{S}$ è la superficie

$$\mathcal{S} = \{h = 0\},$$

indichiamo con ν la normale alla superficie $\mathcal{S}$ definita da

$$\nu = \frac{Dh}{|Dh|}.$$

Definiamo quindi il gradiente tangenziale a $\mathcal{S}$ come

$$\delta\phi = (I - \nu \otimes \nu)D\phi = D\phi - \langle D\phi, \nu\rangle\nu \tag{19}$$

per ogni $\phi \in \mathcal{C}^1(A)$ e la divergenza tangenziale come

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}} \Phi = \operatorname{div} \Phi - \langle J\Phi\nu, \nu\rangle, \quad \forall \Phi \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^{n+1}).$$

L'operatore di Laplace–Beltrami è quindi definito come

$$\mathcal{D}\phi = \operatorname{div}_{\mathcal{S}} \delta\phi.$$

La condizione che $\mathcal{S}$ sia una superficie minima è che la curvatura media di $\mathcal{S}$ sia nulla, ciò che in termini del vettore ν diventa

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}} \nu = 0. \tag{20}$$

Dalla (19) si ha

$$\delta_i = D_i - \nu_i \langle \nu, D \rangle,$$

da cui la seguente regola di commutazione

$$[\delta_i, \delta_k] := \delta_i \delta_k - \delta_k \delta_i = \sum_{h=1}^{n+1} (\nu_i \delta_k \nu_h - \nu_k \delta_i \nu_h) \delta_h$$

La condizione di minimalità (20) ha come conseguenza che ogni componente ν_k di ν soddisfa l'equazione

$$\mathcal{D}\nu_k + c^2 \nu_k = 0,$$

dove abbiamo posto

$$c^2 = \sum_{i,h=1}^{n+1} (\delta_h \nu_i)^2.$$

Quindi se $\nu_k > 0$, la funzione

$$w = -\ln \nu_k$$

è una sub–soluzione positiva dell'operatore di Laplace–Beltrami; infatti vale

$$\begin{aligned} \mathcal{D}w &= \frac{|\delta \nu_k|^2}{\nu_k^2} - \frac{\mathcal{D}\nu_k}{\nu_k} \\ &= |\delta w|^2 + c^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si noti che si è dimostrato qualcosa di più forte, e cioè che

$$\mathcal{D}w \geq |\delta w|^2. \tag{21}$$

Notando inoltre che

$$|\delta f|^2 = |Df|^2 - |\langle Df, \nu \rangle|^2,$$

si nota che se $D_i f = 0$ allora

$$|\nu_i||Df| \leq |\delta f|. \tag{22}$$

Infatti, dalla precedente uguaglianza e dalla disuguaglianze di Cauchy–Schwarz, si ricava che

$$\begin{aligned} |\delta f|^2 &= |Df|^2 - \sum_{j=1}^{n+1} \nu_j^2 (D_j f)^2 = |Df|^2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \nu_j^2 (D_j f)^2 \\ &\geq |Df|^2 \left(1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \nu_j^2 \right) \\ &= |Df|^2 \nu_i^2. \end{aligned}$$

Vediamo alcune proprietà importanti che ci serviranno in seguito; anzitutto,

$$\langle \nu, \delta \rangle = 0 \tag{23}$$

come segue subito da (19); inoltre, la divergenza della funzione identità $\Phi(x) = x$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ è data da

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}} x = \operatorname{div} x - \langle Jx\nu, \nu\rangle = n + 1 - |\nu|^2 = n.$$

Abbiamo inoltre

$$\delta|x|^p = p|x|^{p-2}(x - \langle x, \nu\rangle\nu). \tag{24}$$

Infatti

$$\delta|x|^p = D|x|^p - \langle D|x|^p, \nu\rangle\nu;$$

siccome

$$D|x|^p = p|x|^{p-1} D\langle x, x\rangle^{1/2} = p|x|^{p-2}x,$$

si ottiene che

$$\delta|x|^p = p|x|^{p-2}x - \big\langle p|x|^{p-2}x, \nu\big\rangle\nu = p|x|^{p-2}(x - \langle x, \nu\rangle\nu)$$

Tenendo inoltre presente che

$$D\ln|x| = \frac{x}{|x|^2},$$

si ha che

$$\delta\ln|x| = \frac{1}{|x|^2}(x - \langle x, \nu\rangle\nu). \tag{25}$$

Notiamo anche che

$$\operatorname{div}(x|x|^p) = |x|^p \operatorname{div} x + \langle x, D|x|^p\rangle = (n + 1 + p)|x|^p,$$

mentre

$$J(x|x|^p) = |x|^p I + x \otimes D|x|^p = |x|^p I + p|x|^{p-2} x \otimes x,$$

da cui si ricava che

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}}(x|x|^p) = |x|^p \left(n + p - \frac{p}{|x|^2}\langle x, \nu\rangle^2\right). \tag{26}$$

Dalle (23) e (20) si ricava che

$$\operatorname{div}_{\mathcal{S}}(|x|^p\langle x, \nu\rangle\nu) = \langle\delta(|x|^p\langle x, \nu\rangle), \nu\rangle + |x|^p\langle x, \nu\rangle \operatorname{div}_{\mathcal{S}} \nu = 0$$

da cui, tenendo presente (26)

$$\mathcal{D}|x|^{p+2} = (p + 2)|x|^p \left(n + p - \frac{p}{|x|^2}\langle x, \nu\rangle^2\right) \tag{27}$$

Da (25), si ottiene inoltre che

$$\mathcal{D}\ln|x| = \frac{1}{|x|^2}\left(n - 2 + \frac{2}{|x|^2}\langle x, \nu\rangle^2\right). \tag{28}$$

Sulla superficie $\mathcal{S}$ vale inoltre il teorema della divergenza, che nel caso in cui $\mathcal{S}$ sia una superficie minima si enuncia come segue; se $E \subset \mathcal{S}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{S}$ con bordo ∂E su $\mathcal{S}$ regolare e se $\mathcal{H}^n$ è la misura di Hausdorff, allora

$$\int_E \operatorname{div}_{\mathcal{S}} \Phi d\mathcal{H}^n = \int_{\partial E} \langle\Phi, \nu_E\rangle d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{29}$$

per ogni $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

Nel seguito, la superficie $\mathcal{S}$ sarà individuata dal grafico di una funzione $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ e $A = \Omega \times \mathbb{R}$; cioè, abbiamo

$$h(x, x_{n+1}) = x_{n+1} - u(x).$$

In questo caso, la condizione di minimalità di $\mathcal{S}$ (20) altro non è che richiedere che u sia soluzione dell'equazione delle superficie minime, cioè

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 0.$$

La misura di Hausdorff n–dimensionale su $\mathcal{S}$ si può in questo caso esprimere come

$$d\mathcal{H}^n = \sqrt{1+|Du|^2}dx = vdx,$$

dove abbiamo posto

$$v = \sqrt{1+|Du|^2}.$$

e si ha che

$$\nu_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} > 0,$$

e quindi la funzione

$$w = -\ln \nu_{n+1} = \ln v \tag{30}$$

è una sub–soluzione positiva dell'operatore di Laplace–Beltrami.

5. Dimostrazione della stima del gradiente

Fissato $\varepsilon > 0$, nel caso $n > 2$ definiamo

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} n\varepsilon^{2-n} + (2-n)\varepsilon^{-n}|x-x_0|^2 & \text{per } |x-x_0| \le \varepsilon \\ \\ 2|x-x_0|^{2-n} & \text{per } |x-x_0| \ge \varepsilon. \end{cases}$$

La funzione ϕ è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^{n+1}$, ed è di classe $\mathcal{C}^2$ in $B_\varepsilon(x_0)$ e $\mathbb{R}^{n+1} \setminus B_\varepsilon(x_0)$; inoltre $\mathcal{D}\phi$ è limitato vicino a $|x-x_0| = \varepsilon$. Difatti, grazie alle (24) e (27), si ha che

$$\delta\phi(x) = n(2-n)\begin{cases} \varepsilon^{-n}(x-x_0-\langle x-x_0,\nu\rangle\nu) & \text{per } |x-x_0| \le \varepsilon \\ \\ |x-x_0|^{-n}(x-x_0-\langle x-x_0,\nu\rangle\nu) & \text{per } |x-x_0| \ge \varepsilon \end{cases}$$

e

$$\mathcal{D}\phi(x) = n(2-n)\begin{cases} \varepsilon^{-n} & \text{per } |x-x_0| \le \varepsilon \\ \\ |x-x_0|^{-(n+2)}\langle x-x_0,\nu\rangle^2 & \text{per } |x-x_0| \ge \varepsilon. \end{cases}$$

Presa una funzione g di classe $\mathcal{C}^2$ e a supporto compatto, si ha che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \phi \mathcal{D} g d\mathcal{H}^n &= -\int_{\mathcal{S}} \langle \delta\phi, \delta g\rangle d\mathcal{H}^n \\
&= -\int_{\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0)} \langle \delta\phi, \delta g\rangle d\mathcal{H}^n + \\
&\quad -\int_{\mathcal{S}\setminus B_\varepsilon(x_0)} \langle \delta\phi, \delta g\rangle d\mathcal{H}^n \\
&= -\int_{\partial(\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0))} g\langle \delta\phi, \nu_B\rangle d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\quad +\int_{\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0))} g\mathcal{D}\phi d\mathcal{H}^n + \\
&\quad +\int_{\partial(\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0))} g\langle \delta\phi, \nu_B\rangle d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\quad +\int_{\mathcal{S}\setminus B_\varepsilon(x_0)} g\mathcal{D}\phi d\mathcal{H}^n \\
&= \int_{\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0)} g\mathcal{D}\phi d\mathcal{H}^n + \int_{\mathcal{S}\setminus B_\varepsilon(x_0)} g\mathcal{D}\phi d\mathcal{H}^n
\end{aligned}$$

e cioè il fatto che

$$\int_{\mathcal{S}} \phi\mathcal{D} g d\mathcal{H}^n = \int_{\mathcal{S}} g\mathcal{D}\phi d\mathcal{H}^n.$$

Da questo, si ottiene che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \phi\mathcal{D} g d\mathcal{H}^n &= \frac{n(2-n)}{\varepsilon^n} \int_{\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0)} g(x) d\mathcal{H}^n(x) \\
&\quad + n(2-n) \int_{\mathcal{S}\setminus B_\varepsilon(x_0)} \frac{g(x)\langle x-x_0, \nu\rangle^2}{|x-x_0|^{n+2}} d\mathcal{H}^n(x).
\end{aligned}$$

Presa, in quest'ultima formula, $g \geq 0$ e facendo tendere $\varepsilon \to 0$, tenendo presente che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathcal{H}^n(\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0))}{\varepsilon^n} = \omega_n,$$

grazie al teorema della convergenza dominata, si ricava che

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \frac{\mathcal{D}g}{|x-x_0|^{n-2}} d\mathcal{H}^n &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathcal{S}} \phi \mathcal{D}g d\mathcal{H}^n \\ &\leq \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{n(2-n)}{\varepsilon^n} \int_{\mathcal{S}\cap B_\varepsilon(x_0)} g(x) d\mathcal{H}^n(x) \\ &= n(2-n)\omega_n g(x_0),\end{aligned}$$

cioè

$$g(x_0) \leq -\frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{\mathcal{S}} \frac{\mathcal{D}g}{|x-x_0|^{n-2}} d\mathcal{H}^n. \tag{31}$$

Se si prende g non necessariamente a supporto compatto, la disequazione precedente (31) vale con al posto di g la funzione ξg, con $\xi \geq 0$ funzione cut-off che vale 1 in un intorno di x_0 ed è a supporto compatto in $\mathcal{S}$. In questo caso la (31) diventa

$$g(x_0) \leq -\frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{\mathcal{S}} \frac{\xi\mathcal{D}g + g\mathcal{D}\xi + 2\langle\delta\xi, \delta g\rangle}{|x-x_0|^{n-2}} d\mathcal{H}^n.$$

Teniamo presente che

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \frac{\langle\delta\xi(x), \delta g(x)\rangle}{|x-x_0|^{n-2}} d\mathcal{H}^n &= -\int_{\mathcal{S}} g \operatorname{div}_{\mathcal{S}} \left(\frac{\delta\xi(x)}{|x-x_0|^{n-2}}\right) d\mathcal{H}^n \\ &= -\int_{\mathcal{S}} g \frac{\mathcal{D}\xi(x)}{|x-x_0|^{n-2}} d\mathcal{H}^n \\ &\quad +(n-2) \int_{\mathcal{S}} g \frac{\langle\delta\xi(x), x-x_0\rangle}{|x-x_0|^n} d\mathcal{H}^n\end{aligned}$$

e scegliamo quindi ξ funzione che vale 1 in $B_{R/2}(x_0)$,

$$|\delta\xi| \leq C/R, \quad |\mathcal{D}\xi| \leq C^2/R^2$$

e ξ nulla esternamente a $B_R(x_0)$; con questa scelta di ξ si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \frac{g\mathcal{D}\xi}{|x-x_0|^{n-2}} d\mathcal{H}^n &= \int_{\mathcal{S}\cap(B_R(x_0)\setminus B_{R/2}(x_0))} \frac{g\mathcal{D}\xi}{|x-x_0|^{n-2}} d\mathcal{H}^n \\ &\leq \frac{1}{(R/2)^{n-2}} \int_{\mathcal{S}\cap(B_R(x_0)\setminus B_{R/2}(x_0))} g\mathcal{D}\xi d\mathcal{H}^n \\ &\leq \frac{C^2 2^{n-2}}{R^n} \int_{\mathcal{S}\cap B_R(x_0)} g d\mathcal{H}^n\end{aligned}$$

mentre

$$\int_{\mathcal{S}} g\frac{\langle\delta\xi, x-x_0\rangle}{|x-x_0|^n}d\mathcal{H}^n = \int_{\mathcal{S}\cap(B_R(x_0)\setminus B_{R/2}(x_0))} g\frac{\langle\delta\xi, x-x_0\rangle}{|x-x_0|^n}d\mathcal{H}^n$$
$$\geq -\frac{C2^n}{R^n}\int_{\mathcal{S}\cap B_R(x_0)} gd\mathcal{H}^n.$$

In definitiva, troviamo che

$$g(x_0) \leq -\frac{1}{n(n-2)\omega_n}\int_{\mathcal{S}} \frac{\xi\mathcal{D}g}{|x-x_0|^{n-2}}d\mathcal{H}^n + \frac{C}{R^n}\int_{\mathcal{S}\cap B_R(x_0)} gd\mathcal{H}^n.$$

Quindi, se per g prendiamo una sub–soluzione dell'operatore di Laplace–Beltrami $\mathcal{D}$, cioè $\mathcal{D}g \geq 0$, otteniamo che

$$g(x_0) \leq \frac{C}{R^n}\int_{\mathcal{S}\cap B_R(x_0)} gd\mathcal{H}^n.$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente lemma, con l'osservazione che nel caso $n = 2$ la dimostrazione va un po' cambiata, in quanto in questo al posto della funzione $|x-x_0|^{2-n}$ va considerata la funzione $\ln|x-x_0|$; rimandiamo all'articolo di Neil Trudinger [**39**] per maggiori dettagli.

Lemma 5.3. *Se g è una sub–soluzione positiva per l'operatore di Laplace–Beltrami, si ha*

$$g(x_0) \leq \frac{C}{R^n}\int_{\mathcal{S}\cap B_R(x_0)} gd\mathcal{H}^n \tag{32}$$

per una qualche costante C dipendente solo da n.

Come sub–soluzione positiva prendiamo la funzione definita in (30)

$$w = -\ln\nu_{n+1} = \ln\sqrt{1+|Du|^2} = \ln v.$$

Per motivi di comodità, possiamo supporre che $x_0 = 0$ e che $u(x_0) = 0$; la (32) per la funzione w diventa quindi

$$w(0) \leq \frac{C}{R^n}\int_{|x|^2+u^2\leq R^2} wvdx \leq \frac{C}{R^n}\int_{|x|,|u|\leq R} wvdx. \tag{33}$$

Denotiamo con S_R la palla di $\mathbb{R}^n$ centrata in 0 e di raggio R, con R scelto in modo che $S_{3R} \subset \Omega$; definiamo

$$u_R(x) = \begin{cases} 2R & u \geq R \\ \\ u(x) + R & |u(x)| \leq R \\ \\ 0 & u(x) \leq -R. \end{cases}$$

Inserendo in (10), nel caso dell'equazione delle superficie minime, la funzione test $wu_R\eta$ con $\eta = 1$ su S_R, $\eta \geq 0$ funzione opportuna da scegliere in seguito, si ottiene che

$$0 = \int \frac{\eta u_R}{v} \langle Du, Dw \rangle dx + \int_{|u| \leq R} \frac{\eta w |Du|^2}{v} dx + \int \frac{w u_R}{v} \langle Du, D\eta \rangle dx.$$

Tenendo presente che $|Du|/v \leq 1$, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{|x|,|u| \leq R} \frac{w|Du|^2}{v} dx &\leq \int_{|u| \leq R} \frac{\eta w |Du|^2}{v} dx \\ &= -\int \frac{\eta u_R}{v} \langle Du, Dw \rangle dx - \int \frac{w u_R}{v} \langle Du, D\eta \rangle dx \\ &\leq 2R \int_{\substack{|x| \leq 2R \\ u \geq -R}} (\eta |Dw| + w |D\eta|) dx. \end{aligned} \tag{34}$$

Studiamo separatamente i due termini di destra; denotiamo con $C_{2R} = S_{2R} \times \mathbb{R}$, e da (21) si ottiene che per ogni $\phi \in \mathcal{C}_0^1(C_{2R})$ con $\phi \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S} \cap C_{2R}} \phi^2 |\delta w|^2 d\mathcal{H}^n &\leq \int_{\mathcal{S} \cap C_{2R}} \phi^2 \mathcal{D} w d\mathcal{H}^n \\ &= -2 \int_{\mathcal{S} \cap C_{2R}} \phi \langle \delta\phi, \delta w \rangle d\mathcal{H}^n. \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Hölder, si ricava quindi che

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S} \cap C_{2R}} \phi |\delta w| d\mathcal{H}^n &\leq \left(\int_{\mathcal{S} \cap C_{2R}} \phi^2 |\delta w|^2 d\mathcal{H}^n \right)^{1/2} \mathcal{H}^n(\mathcal{S} \cap \mathrm{spt}\phi)^{1/2} \\ &\leq \left(2 \|\delta\phi\|_\infty \int_{\mathcal{S} \cap C_{2R}} \phi |\delta w| d\mathcal{H}^n \right)^{1/2} (\mathcal{H}^n(\mathcal{S} \cap \mathrm{spt}\phi))^{1/2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{\mathcal{S} \cap C_{2R}} \phi |\delta w| d\mathcal{H}^n \leq 2 \|\delta\phi\|_\infty \mathcal{H}^n(\mathcal{S} \cap \mathrm{spt}\phi). \tag{35}$$

Prendiamo ϕ della forma

$$\phi(x, x_{n+1}) = \eta(x)\tau(x_{n+1})$$

con $\tau \in \mathcal{C}_0^1(-2R, R + \sup_{S_{2R}} u)$, $\tau = 1$ in $(-R, \sup_{S_{2R}} u)$, $|\tau'| \leq 2/R$, $0 \leq \tau \leq 1$ ed $0 \leq \eta \leq 1$, $|D\eta| \leq 2/R$ con $\eta = 0$ se $|x| > 2R$. Dalla (35), utilizzando (22) con ν_{n+1} dato che w non dipende da x_{n+1}, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\substack{|x|\leq 2R\\ u\geq -R}} \eta|Dw|dx &\leq \int\limits_{\mathcal{S}\cap C_{2R}} \phi|Dw|dx \\
&\leq \int\limits_{\mathcal{S}\cap C_{2R}} \phi|\delta w|d\mathcal{H}^n \\
&\leq \frac{C}{R}\mathcal{H}^n(\mathcal{S}\cap \operatorname{spt}\phi) = \frac{C}{R}\int\limits_{\mathcal{S}\cap C_{2R}} vdx \\
&\leq \frac{C}{R}\int\limits_{\substack{|x|\leq 2R\\ u\geq -2R}} vdx. \qquad (36)
\end{aligned}$$

Dato che $w \leq v$, si ricava che

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\substack{|x|\leq 2R\\ u\geq -R}} w|D\eta|dx &\leq \frac{C}{R}\int\limits_{\substack{|x|\leq 2R\\ u\geq -R}} vdx \\
&\leq \frac{C}{R}\int\limits_{\substack{|x|\leq 2R\\ u\geq -2R}} vdx. \qquad (37)
\end{aligned}$$

Studiamo quindi l'integrale

$$\int\limits_{\substack{|x|\leq 2R\\ u\geq -2R}} vdx;$$

a tale fine, prendiamo come funzione test in (10) la funzione

$$\varphi(x) = \varsigma(x)\max\{u(x) + 2R, 0\}$$

con $\varsigma = 1$ su S_{2R}, ς nulla all'esterno di S_{3R} e $|D\varsigma| \leq 2/R$. Si ottiene che

$$\begin{aligned}
0 &= \int \frac{\langle D\varphi, Du\rangle}{v}dx \\
&= \int\limits_{\substack{2R\leq|x|\leq 3R\\ u\geq -2R}} \frac{u+2R}{v}\langle D\varsigma, Du\rangle dx + \int\limits_{u\geq -2R} \frac{\varsigma|Du|^2}{v}dx,
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\substack{|x|\le 2R\\ u\ge -2R}} v\,dx &\le \int\limits_{u\ge -2R} \varsigma v\,dx = \int\limits_{u\ge -2R} \frac{\varsigma}{v} v^2\,dx \\
&= \int\limits_{u\ge -2R} \frac{\varsigma}{v}\,dx + \int\limits_{u\ge -2R} \frac{\varsigma |Du|^2}{v}\,dx \\
&\le cR^n + \int\limits_{u\ge -2R} \frac{\varsigma |Du|^2}{v}\,dx \\
&= cR^n - \int\limits_{\substack{2R\le |x|\le 3R\\ u\ge -2R}} \frac{u+2R}{v} \langle D\varsigma, Du\rangle\,dx \\
&\le R^n \left(c + \frac{c}{R} \sup_{S_{3R}} u \right) \qquad (38)
\end{aligned}$$

Mettendo insieme le (33), (36), (37) e (38), ricaviamo

$$\begin{aligned}
w(0) &\le \frac{c}{R^n} \int\limits_{|x|,|u|\le R} wv\,dx \\
&= \frac{c}{R^n} \int\limits_{|x|,|u|\le R} \frac{w}{v}\,dx + \frac{c}{R^n} \int\limits_{|x|,|u|\le R} \frac{w|Du|^2}{v}\,dx \\
&\le c\omega_n + \frac{c}{R^{n-1}} \int\limits_{\substack{|x|\le 2R\\ u\ge -R}} (w|D\eta| + \eta|Dw|)\,dx \\
&\le c\omega_n + \frac{c}{R^n} \int\limits_{\substack{|x|\le 2R\\ u\ge -2R}} v\,dx \\
&\le c_1 + \frac{c_2}{R} \sup_{S_{3R}} u,
\end{aligned}$$

e quindi prendendo l'esponenziale,

$$v(0) \le c_1 \exp\left(\frac{c_2}{R} \sup_{S_{3R}} u \right),$$

da cui la stima desiderata

$$|Du(0)| \le \sqrt{1 + |Du(0)^2|} \le v(0) \le c_1 \exp\left(\frac{c_2}{R} \sup_{S_{3R}} u \right).$$

6. La stima del gradiente per le soluzioni intere

Sia $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ soluzione intera dell'equazione delle superficie minime e sia

$$u(x) \geq -K|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, K > 0. \tag{39}$$

Avremo allora per x fissato e $\varrho > |x|$

$$u(x) + K\varrho \geq 0.$$

Dal Teorema di Bombieri, De Giorgi e Miranda 5.2 ricaviamo

$$\sqrt{1 + |Du(x)|^2} \leq C_1 \exp\left(C_2 \frac{u(x) + K\varrho}{\varrho - |x|}\right).$$

Facendo tendere ϱ a $+\infty$ otteniamo

$$\sqrt{1 + |Du(x)|^2} \leq C_1 \exp(C_2 K), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi, grazie al Teorema di Bernstein e Moser 3.3, otteniamo

$$Du \equiv \text{costante}.$$

Vale quindi, per ogni valore di n, la tesi del Teorema di Bernstein, a condizione che sia valida la (39).