CAPITOLO 4

Singolarità rimovibili

Si può dimostrare il seguente teorema (vedi [**28**])

Teorema 4.1. *Per ogni Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, per ogni C chiuso in Ω con*

$$\mathcal{H}^{n-1}(C) = 0$$

e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega \setminus C)$ soluzione dell'equazione delle superficie minime, esiste $U \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ con $U_{|\Omega\setminus C} = u$.

In questo capitolo noi dimostreremo una versione più debole di tale teorema, dovuta a De Giorgi e Guido Stampacchia (1922–1978) e pubblicata nel 1965 [**13**], che ipotizzarono $C = K \subset\subset \Omega$. Senza ledere in generalità, nel seguito supporremo la connessione di Ω.

1. Lemma topologico

La dimostrazione di De Giorgi e Stampacchia richiede il seguente lemma topologico.

Lemma 4.2. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$; se $K \subset\subset \Omega$ con*

$$\mathcal{H}^{n-1}(K) = 0,$$

allora $\Omega \setminus K$ è connesso.

Dim. Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti disgiunti tali che $\Omega \setminus K = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Vogliamo dimostrare che

$$\int\limits_{\Omega_i} \operatorname{div} \phi dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), i = 1, 2. \tag{17}$$

Osserviamo che $\partial\Omega_i \cap \Omega \subset K$, $i = 1, 2$.

La condizione $\mathcal{H}^{n-1}(K) = 0$ implica l'esistenza, per ogni $\varepsilon > 0$, di un numero finito di palle $\{B_{\varrho_i}(x_i)\}_{i=1,\dots,N}$ tali che

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\varrho_i}(x_i) := I_\varepsilon(K), \quad \sum_{i=1}^{N} \varrho_i^{n-1} < \varepsilon. \tag{18}$$

La condizione precedente implica in particolare che $\varrho_i < \varepsilon^{1/(n-1)}$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Notiamo che

$$|I_\varepsilon(K)| \le \sum_{i=1}^{N} |B_{\varrho_i}(x_i)| \le \omega_n \varepsilon^{1/(n-1)} \sum_{i=1}^{N} \varrho_i^{n-1} < \omega_n \varepsilon^{n/(n-1)};$$

inoltre,

$$\partial I_\varepsilon(K) = \bigcup_{i=1}^{N} (\partial B_{\varrho_i}(x_i) \setminus I_\varepsilon(K)),$$

e quindi

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial I_\varepsilon(K)) \le \sum_{i=1}^{N} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{\varrho_i}(x_i)) = n\omega_n \sum_{i=1}^{N} \varrho_i^{n-1} < n\omega_n\varepsilon$$

Possiamo scrivere che

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{div} \phi dx = \int_{\Omega_i \setminus I_\varepsilon(K)} \operatorname{div} \phi dx + \int_{\Omega_i \cap I_\varepsilon(K)} \operatorname{div} \phi dx,$$

Ma

$$\left| \int_{\Omega_i \cap I_\varepsilon(K)} \operatorname{div} \phi dx \right| \le \| \operatorname{div} \phi\|_\infty |I_\varepsilon(K)| \le \omega_n \| \operatorname{div} \phi\|_\infty \varepsilon^{n/(n-1)},$$

mentre

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_i \setminus I_\varepsilon(K)} \operatorname{div} \phi dx \right| &= \left| \int_{\Omega_i \cap \partial I_\varepsilon(K)} \phi \nu_{I_\varepsilon(K)} d\mathcal{H}^{n-1} \right| \\ &\le \|\phi\|_\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial I_\varepsilon(K)) < n\omega_n \|\phi\|_\infty \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi $D\mathbf{1}_{\Omega_i} \equiv 0$ in Ω nel senso delle distribuzioni; ne segue che le funzioni caratteristiche sono costanti. Quindi la coppia (Ω_1, Ω_2) è costituita da $\emptyset$ e da Ω. $\square$

2. Il Teorema di De Giorgi e Stampacchia

TEOREMA 4.3 (De Giorgi-Stampacchia [**13**]). *Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ connesso, sia $K \subset\subset \Omega$ con*

$$\mathcal{H}^{n-1}(K) = 0$$

e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega \setminus K)$ soluzione dell'equazione delle superficie minime. Allora esiste $U \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ con $U_{|\Omega\setminus K} = u$.

DIM. Sia A un aperto limitato con

$$K \subset\subset A \subset\subset \Omega.$$

Per la dimostrazione di questo teorema abbiamo bisogno di due lemmi.

LEMMA 4.4 (Principio del Massimo). *Nelle stesse ipotesi del Teorema 4.3, vale che*

$$M := \max_{\partial A} u = \sup_{A\setminus K} u.$$

DIM. Dimostreremo che

$$\{x \in A \setminus K : u(x) > M\} = \emptyset.$$

Consideriamo a tal fine la funzione

$$B(t) = \begin{cases} 0 & t \leq M \\ \\ \arctan(t) - \arctan(M) & t \geq M. \end{cases}$$

La funzione B è Lipschitziana, limitata da $0 \leq B(t) \leq \pi$ e la sua derivata è positiva.

Definiamo quindi per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione

$$\varphi_\varepsilon(x) = \max\left\{1 - \frac{d(x, I_\varepsilon(K))}{\varepsilon}, 0\right\},$$

dove $I_\varepsilon(K)$ è l'insieme costruito nella dimostrazione del Lemma 4.2. La funzione φ_ε è chiaramente Lipschitziana con $|D\varphi_\varepsilon| \leq 1/\varepsilon$, si ha che $\varphi_\varepsilon \equiv 1$ su $I_\varepsilon(K)$ e, se $2\varepsilon < d(K, \partial\Omega)$, $\varphi_\varepsilon \in \mathrm{Lip}_c(\Omega)$. Infine si ha che, se indichiamo con

$$A_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N} B_{\varrho_i+\varepsilon}(x_i),$$

con $B_{\rho_i}(x_i)$ gli insiemi costruiti nel Lemma 4.2, vale la seguente proprietà

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |D\varphi_\varepsilon| dx &= \int_{A_\varepsilon} |D\varphi_\varepsilon| dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \int_{B_{\varrho_i+\varepsilon}(x_i)} |D\varphi_\varepsilon| dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\varepsilon} |B_{\varrho_i+\varepsilon}(x_i) \setminus B_{\varrho_i}(x_i)| \\
&= \sum_{i=1}^{N} \omega_n (n\varrho_i^{n-1} + o(1)) < n\omega_n \varepsilon + N\omega_n o(1),
\end{aligned}$$

dove l'ultima condizione discende da (18).

Se poniamo $\phi = B(u)(1 - \varphi_\varepsilon)$, chiaramente $\phi \in \mathrm{Lip}_0(A \setminus K)$, e quindi utilizzando questa funzione ϕ in (10), si ottiene

$$\begin{aligned}
0 &= \int_A \frac{\langle Du, D(B(u)(1-\varphi_\varepsilon))\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\
&= \int_A (1-\varphi_\varepsilon) \frac{\langle Du, DB(u)\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx - \int_A B(u) \frac{\langle Du, D\varphi_\varepsilon\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx.
\end{aligned}$$

Siccome

$$\left| \int_A B(u) \frac{\langle Du, D\varphi_\varepsilon\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx \right| \leq \pi \int_A |D\varphi_\varepsilon| dx \to 0, \quad \text{per } \varepsilon \to 0,$$

ricaviamo, grazie al Lemma di Fatou, che

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_A B'(u) \frac{|Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx = \int_A \frac{\langle Du, DB(u)\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\
&= \int_\Omega \lim_{\varepsilon\to 0} (1-\varphi_\varepsilon) \frac{\langle Du, DB(u)\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\
&\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_A (1-\varphi_\varepsilon) \frac{\langle Du, DB(u)\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx = 0.
\end{aligned}$$

Questo implica che la funzione $B(u)$ deve essere costante su A, e quindi, siccome si deve avere che

$$\lim_{x\to\partial A} B(u(x)) = 0,$$

deve essere $B(u) \equiv 0$ su A, da cui $u \leq M$ su tutto A. $\square$

LEMMA 4.5 (Principio del Massimo Forte in $A \setminus K$). *Sia v un'altra soluzione avente le stesse proprietà della u. Supponiamo che valga la diseguaglianza*

$$v(x) \geq u(x), \quad \forall x \in \partial A.$$

Allora la diseguaglianza vale in tutti i punti di $A \setminus K$.

DIM. Entrambe le soluzioni u e v sono limitate in $A \setminus K$. Vogliamo dimostrare che

$$\{x \in A \setminus K : v(x) < u(x)\} = \emptyset.$$

Questa proprietà è conseguenza della stretta convessità del funzionale delle superficie minime. Indichiamo con ϕ la funzione

$$\phi(x) = \mathbf{1}_A(x) \max\{u(x) - v(x), 0\}.$$

Difatti, con una tale scelta di ϕ, dal fatto che sia u che v sono soluzioni, si ottiene

$$0 = \int_A \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) D\phi dx = \int_A \left(\frac{Dv}{\sqrt{1+|Dv|^2}} \right) D\phi dx,$$

quindi

$$0 = \int_A \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \frac{Dv}{\sqrt{1+|Dv|^2}} \right) D\phi dx,$$

cioè

$$\int_{\{u>v\}} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \frac{Dv}{\sqrt{1+|Dv|^2}} \right) (Du - Dv) dx = 0.$$

Poichè l'integrando è strettamente positivo se $Du(x) \neq Dv(x)$, segue che $Du(x) - Dv(x) = 0$ in ogni punto $x \in A$ con $u(x) > v(x)$, e ciò implica che $u(x) \leq v(x)$ in tutti i punti di A. $\square$

Corollario del Principio di Massimo Forte 4.4 è il principio di massimo dei rapporti incrementali 2.4. Possiamo allora dire che la funzione u è Lipschitziana in $A \setminus K$, quindi è estendibile ad una funzione Lipschitziana U definita su tutto A. Tale U verifica l'equazione di Eulero,

$$\int_A \frac{DU}{\sqrt{1+|DU|^2}} D\phi dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathrm{Lip}_c(A).$$

Grazie al Teorema di regolarità di De Giorgi, possiamo concludere che $U \in \mathcal{C}^2(A)$. $\square$

OSSERVAZIONE 2. Robert Finn (1922–) [**14**] aveva dimostrato nel 1953 il risultato di De Giorgi e Stampacchia nel caso bidimensionale, e per $K =$

$\{x_0\}$, $x_0 \in \Omega$. La dimostrazione di Finn passa attraverso i Principi di Massimo e di Massimo Forte, ma non ha bisogno del ricorso al Teorema di regolarità di De Giorgi [**11**].